第 38 卷第 7 期
2021 年 7 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 38 No. 7
Jul. 2021

基于super-twisting算法的多航天器姿态有限时间分布式协同控制

许　淼[1], 方一鸣[1,2†], 李建雄[1,2], 赵晓东[1]

(1. 燕山大学 工业计算机控制工程河北省重点实验室, 河北 秦皇岛 066004;

2. 燕山大学 智能控制系统与智能装备教育部工程研究中心, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 针对受外界干扰和执行器故障影响的多航天器姿态协同控制问题, 本文设计了一种基于干扰观测器的分布式协同supper-twisting滑模控制器. 首先, 将各航天器的外界干扰和执行器故障看作一个集总干扰, 设计自适应滑模干扰观测器对其进行估计. 其次, 将supper-twisting算法和积分滑模面相结合, 设计一种基于多航天器姿态一致性误差的分布式协同控制器, 并由Lyapunov稳定性理论证明了所设计的多航天器姿态可以在有限时间内收敛到平衡点附近的邻域内. 最后的仿真研究及比较结果表明, 所设计的控制器可以加快系统的收敛速度, 并提高系统的控制精度.

关键词: 协同控制; super-twisting算法; 分布式控制; 多航天器; 有限时间

引用格式: 许淼, 方一鸣, 李建雄, 等. 基于super-twisting算法的多航天器姿态有限时间分布式协同控制. 控制理论与应用, 2021, 38(7): 924 – 932

DOI: 10.7641/CTA.2021.00710

Finite time distributed coordinated control for attitude of multi-spacecraft based on super-twisting algorithm

XU Miao[1], FANG Yi-ming[1,2†], LI Jian-xiong[1,2], ZHAO Xiao-dong[1]

(1. Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China;
2. Engineering Research Center of the Education Ministry for Intelligent Control System and Intelligent Equipment, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: A distributed cooperative super-twisting sliding mode controller based on disturbance observer is designed for multi-spacecraft attitude cooperative control problem affected by external disturbances and actuator faults. Firstly, the external disturbances and actuator faults of each spacecraft are regarded as a lumped disturbance, and adaptive sliding mode disturbance observer is designed to estimate the disturbance. A distributed cooperative controller based on attitude consensus error of multi-spacecraft is designed by combining super-twisting algorithm with integral sliding mode surface. It is proved by Lyapunov stability theory that the designed attitude of multi-spacecraft can converge to the neighborhood near the equilibrium point in finite time. Finally, simulation and comparison results show that the designed controller can accelerate the convergence speed of the system and improve the control accuracy of the system.

Key words: coordinated control; super-twisting algorithm; distributed control; multi-spacecraft; finite time

Citation: XU Miao, FANG Yiming, LI Jianxiong, et al. Finite time distributed coordinated control for attitude of multi-spacecraft based on super-twisting algorithm. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(7): 924 – 932

1　引言

与传统大型航天器相比, 一组小而经济的航天器具有更高的灵活性、更强的鲁棒性和更低的成本[1–4]. 由于分布式合成孔径雷达、三维立体成像等多航天器对地观测任务需要各航天器指向地球上的特定位置, 这就必须保证各航天器能跟踪上预设的姿态轨迹[5]. 因此, 多航天器协同控制技术作为对大型航天器技术的必要扩展和补充, 具有重要的研究价值.

收稿日期: 2020−10−14; 录用日期: 2021−03−04.
†通信作者. E-mail: fyming@ysu.edu.cn; Tel.: +86 335-8387556.
本文责任编委: 董希旺.
国家自然科学基金项目(61873226), 河北省自然科学基金项目(F2017203304, F2019203090), 河北省研发计划项目(18212109)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61873226), the Natural Science Foundation of Hebei Province (F2017203304, F2019203090) and the Research and Development Program Project of Hebei Province (18212109).

滑模控制作为一种特殊的非线性控制, 被应用于多航天器姿态协同控制[6–8]. 滑模面可以独立于参数和干扰进行设计, 因此滑模控制具有响应速度快、对参数变化和干扰不敏感、物理实现简单等优点. 然而, 传统的滑模控制会产生影响系统性能的抖振. 文献[9]用"sigmoid"或者饱和函数代替不连续控制项来抑制抖振. 然而, 这种近似控制是以牺牲系统的性能为代价. 文献[10–11]提出的super-twisting算法是一种典型的二阶滑模控制算法, 该算法在保持传统滑模鲁棒性的同时, 可以提高系统的精度, 削弱抖振的影响. 文献[12]基于齐次性方法设计了一个有限时间super-twisting控制器, 但不能计算系统的收敛时间.文献[13]将Lyapunov方法应用于不确定系统的super-twisting算法的性能分析, 克服了收敛时间无法计算的问题. 文献[14]提出一种无模型自适应分数阶super-twisting滑模控制来实现机器人在不确定性和外部干扰下的轨迹跟踪问题. 文献[15]针对一类带有非匹配干扰的非线性系统, 设计一种自适应super-twisting滑模控制器, 提高了系统的鲁棒性. 文献[16]将super-twisting滑模与模糊系统相结合, 设计了一种鲁棒控制器, 利用super-twisting滑模的概念来削弱抖振问题.

上述研究都是基于单输入单输出系统, 不适用于多输入多输出系统. 文献[17–19]针对带有未知干扰和不确定性的多机器人系统编队控制问题, 基于领导–跟随结构, 设计了super-twisting滑模控制器. 在所设计的控制器下, 系统领导–跟随误差可以在有限时间内收敛. 文献[20]针对多机器人协调控制问题, 提出了一种新的super-twisting神经网络及其外部干扰抑制模型, 以提高协调控制的有限时间收敛性和对外界干扰的鲁棒性. 上述文献中, 每个航天器的控制器设计都是基于各自的领导–跟随误差, 并未考虑与邻居的交互信息. 并且当领导者与第i个跟随者之间没有信息交互时, 该控制器的设计方法将不再适用. 为了实现具有双积分动力学的多智能体系统有限时间编队控制和目标跟踪, 基于多输入多输出super-twisting算法, 文献[21]提出了一种由观测器和非光滑反馈控制律组成的算法. 在所设计的控制器下, 系统状态在有限时间内快速收敛. 然而, 控制器设计是集中式的, 集中控制方式的系统结构较为简单, 但由于控制器设计时需要系统的全局变量, 因此, 对系统的通讯要求较高.

此外, 实际航天器系统中通常存在多种影响因素, 包括由重力和太阳辐射等外作用力产生的干扰力矩以及执行器故障等. 这些干扰和故障会对系统性能产生影响. 针对带有外部干扰的一组航天器, 文献[28]提出了一种分布式自适应姿态协同控制方案, 由于采用有限时间控制方法, 提高了系统的响应速度. 本文针对存在外界干扰和执行器故障的多航天器姿态分布式协同控制问题, 设计了基于多航天器姿态一致性误差的super-twisting分布式协同控制器. 首先, 对每个航天器设计有限时间自适应滑模干扰观测器来估计系统外界干扰和执行器故障构成的集总干扰. 其次, 将积分滑模与super-twisting算法相结合, 提出一种分布式协同控制器. 由于所设计的控制器不需要包含系统的全局信息, 因此该控制器可以实现分布式控制. 再次, 利用Lyapunov稳定性理论证明了多航天器姿态可以在有限时间内收敛到平衡点附近的邻域内. 最后, 仿真及对比结果表明, 本文所提出的分布式控制器具有更快的收敛速度和更高的控制精度.

2　系统描述与控制问题提出

2.1　符号定义

给定向量$\boldsymbol{x}=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n]^{\mathrm{T}}$及常数$\alpha>0$, 定义$\mathrm{sig}^{\alpha}(\boldsymbol{x})=[|x_1|^{\alpha}\mathrm{sgn}\,x_1\ \ |x_2|^{\alpha}\mathrm{sgn}\,x_2\ \ \cdots\ \ |x_n|^{\alpha}\mathrm{sgn}\,x_n]^{\mathrm{T}}$, 其中$\mathrm{sgn}(\cdot)$为符号函数. 对于向量$\boldsymbol{q}=[q_1\ \ q_2\ \ q_3]^{\mathrm{T}}$, 定义向量$\boldsymbol{q}$的反对称矩阵$\boldsymbol{q}^{\times}$为

$$\boldsymbol{q}^{\times}=\begin{bmatrix}0 & -q_3 & q_2\\ q_3 & 0 & -q_1\\ -q_2 & q_1 & 0\end{bmatrix}.$$

2.2　引理及定义

引理 1[29]　若在包含原点的邻域$\Omega(\Omega\subset\mathbb{R}^n)$内, 存在连续可微函数$V(x)$和实数$l_0>0,\ \vartheta>0,\ \mu\in(0,1)$, 对于满足

1) $V(x)$在Ω中正定;

2) $\dot V(x)+l_0V^{\mu}(x)-\vartheta\leqslant 0,\ x\in\Omega$,

则系统状态x可以在有限时间T内收敛至原点附近邻域内, 而且当$t\geqslant T$时, 有$\lim\limits_{\rho\to\rho_0}x(t)\in(V^{\mu}(x)\leqslant\dfrac{\vartheta}{(1-\rho)l_0})$, 其中

$$T\leqslant\frac{V^{1-\mu}(x_0)}{l_0\rho_0(1-\mu)},\tag{1}$$

$V(x_0)$为$V(x)$的初始值, $0<\rho\leqslant 1,\ 0<\rho_0<1$.

引理 2[23]　若在包含原点的邻域$U(U\subset\mathbb{R}^n)$内, 存在连续可微函数$V(x,t)$和实数$l_1>0,\ l_2>0,\ \theta\in(0,1),\ \xi>0$, 对于满足:

1) $V(x,t)$在U中正定;

2) $\dot V(x,t)+l_1V(x,t)+l_2V^{\theta}(x,t)-\xi\leqslant 0,\ x\in U$,

则系统状态x可以在有限时间T内收敛至原点附近邻域内, 而且当$t\geqslant T$时, 有$V(x,t)\leqslant\dfrac{\xi}{(l_1-\kappa)}$, 其中

$$T\leqslant\frac{1}{\kappa(1-\theta)}\ln(\frac{l_2+\kappa V^{1-\theta}(x_0,0)}{l_2+\kappa(\frac{\xi}{l_1-\kappa})^{1-\theta}}),\tag{2}$$

$V(x_0,0)$为$V(x,t)$的初始值, $0<\kappa<l_1$.

引理 3[24]　对于任意正实数m,n,w和实数变量φ和ψ, 有如下不等式

$$|\varphi|^m|\psi|^n \leqslant \frac{mw}{m+n}|\varphi|^{m+n} + \frac{nw^{-\frac{m}{n}}}{m+n}|\psi|^{m+n}. \quad (3)$$

2.3 通讯拓扑

用图$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{\Upsilon},\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$来表示通讯拓扑, 其中$\boldsymbol{\Upsilon}=[\zeta_1\ \zeta_2\ \cdots\ \zeta_n]$为节点集合, 有限非空集$\boldsymbol{E}\subseteq\boldsymbol{\Upsilon}\times\boldsymbol{\Upsilon}$为边集合, $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$为图$\boldsymbol{G}$的邻接矩阵. 若$(\zeta_i,\zeta_j)\in\boldsymbol{E}$, 则$a_{ij}>0$, 否则$a_{ij}=0$. 定义入度矩阵$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$, 其中$d_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$. 定义Laplacian矩阵$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$.

针对多航天器姿态协同控制, 本文假设存在一个虚拟领导者, 记为第0个航天器, 其状态为多航天器的参考轨迹. 定义静态领导航天器姿态为$\boldsymbol{q}_0\in\mathbb{R}^3$. 采用图$\bar{\boldsymbol{G}}$来表示由$n$个航天器和一个虚拟航天器组成的系统的网络拓扑. 定义图$\bar{\boldsymbol{G}}$的领导跟随连通矩阵$\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$, 当且仅当领导航天器与第$i$个航天器有通讯时, $b_i>0$; 否则$b_i=0$. 定义图$\bar{\boldsymbol{G}}$的Laplacian矩阵$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{B}$. 若图$\bar{\boldsymbol{G}}$中有一条从节点$\zeta_0$到每个节点$\zeta_i(i=1,2,\cdots,n)$的连通路径, 那么称图$\bar{\boldsymbol{G}}$为连通图.

假设 1 通讯拓扑$\bar{\boldsymbol{G}}$是固定的, 且包含一个以领导者为根的生成树.

引理 4[25] 若$\bar{\boldsymbol{G}}$为连通图, 图$\bar{\boldsymbol{G}}$的Laplacian矩阵$\boldsymbol{H}$是正定对阵的.

2.4 系统描述

本文采用修正的Rodrigues参数(MPRs)[26]来描述各航天器的刚体姿态运动. 第$i(i=1,2,\cdots,n)$个航天器的动力学方程如下

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}_i=\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{q}_i)\boldsymbol{\omega}_i,\\ \boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i=-\boldsymbol{\omega}_i^{\times}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i+\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_i,\end{cases} \quad (4)$$

其中: $\boldsymbol{q}_i=[q_{i1}\ \ q_{i2}\ \ q_{i3}]^{\mathrm{T}}$表示第$i$个航天器姿态; $\boldsymbol{\omega}_i=[\omega_{i1}\ \ \omega_{i2}\ \ \omega_{i3}]^{\mathrm{T}}$为第$i$个航天器本体坐标系相对于惯性坐标系的角速度; $\boldsymbol{\omega}_i^{\times}$为$\boldsymbol{\omega}_i$的反对称矩阵; $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}i}+\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}i}$为航天器被控对象的实际输入转矩, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}i}$为航天器期望的输入转矩(待设计的), $\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}i}$为执行器故障, 其中故障表示为偏差故障和效率故障, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}i}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{a}i}+(\boldsymbol{\varXi}_i-\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}i}$; $\boldsymbol{f}_{\mathrm{a}i}$为执行器的偏差故障, 且$\boldsymbol{f}_{\mathrm{a}i}$有界; $\boldsymbol{\varXi}_i=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\varXi}_{i1},\boldsymbol{\varXi}_{i2},\boldsymbol{\varXi}_{i3}\}$, 为执行机构的效率因子, 且$0<\boldsymbol{\varXi}_{ij}\leqslant 1,\ j=1,2,3$. 当$\boldsymbol{\varXi}_{ij}=1$时, 第$i$个航天器的执行器处于健康状态. 当$\boldsymbol{\varXi}_{ij}=0$时, 第$i$个航天器的执行器完全失效. 当$0<\boldsymbol{\varXi}_{ij}<1$时, 第$i$个航天器的执行器部分失效; $\boldsymbol{\varepsilon}_i\in\mathbb{R}^3$为外部干扰力矩; $\boldsymbol{G}_i=\frac{1}{2}\cdot[\frac{1-\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_i}{2}\boldsymbol{I}_3+\boldsymbol{q}_i^{\times}+\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_i]$, $\boldsymbol{I}_3$为3阶单位阵; $\boldsymbol{q}_i^{\times}$为$\boldsymbol{q}_i$的反对称矩阵; $\boldsymbol{J}_i\in\mathbb{R}^{3\times 3}$为转动惯量.

根据文献[26], 得到Euler-Lagrange形式的多航天器运动学方程如下

$$\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{q}_i)\ddot{\boldsymbol{q}}_i+\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{q}_i,\dot{\boldsymbol{q}}_i)=\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{q}_i)=\boldsymbol{G}_i^{-T}(\boldsymbol{q}_i)\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{G}_i^{-1}(\boldsymbol{q}_i),\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{q}_i,\dot{\boldsymbol{q}}_i)=\\ &-\boldsymbol{G}_i^{-T}(\boldsymbol{q}_i)(\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{G}_i^{-1}(\boldsymbol{q}_i)\dot{\boldsymbol{q}}_i)^{\times}\boldsymbol{G}_i^{-1}(\boldsymbol{q}_i)-\boldsymbol{G}_i^{-T}(\boldsymbol{q}_i)\times\\ &\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{G}_i^{-1}(\boldsymbol{q}_i)\dot{\boldsymbol{G}}_i(\boldsymbol{q}_i)\boldsymbol{G}_i^{-1}(\boldsymbol{q}_i).\end{aligned}$$

Euler-Lagrange系统的性质如下:

性质 1[27] 惯性矩阵$\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{q}_i)$有界, 且满足$0<\lambda_{\min}\{\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{q}_i)\}\boldsymbol{I}\leqslant\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{q}_i)\leqslant\lambda_{\max}\{\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{q}_i)\}\boldsymbol{I}<\infty$.

定义$\boldsymbol{x}_{i,1}=\boldsymbol{q}_i,\ \boldsymbol{x}_{i,2}=\dot{\boldsymbol{q}}_i$, 第$i$个航天器的运动学方程(5)转化为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_{i,1}=\boldsymbol{x}_{i,2},\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{i,2}=\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_{i,1},\boldsymbol{x}_{i,2})+\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_{i,1})\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}i}+\boldsymbol{d}_i,\end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_{i,1},\boldsymbol{x}_{i,2})=-\boldsymbol{M}_i^{-1}(\boldsymbol{x}_{i,1})\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{x}_{i,1},\boldsymbol{x}_{i,2})\boldsymbol{x}_{i,2},\\ &\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_{i,1})=\boldsymbol{M}_i^{-1}(\boldsymbol{x}_{i,1}),\ \boldsymbol{d}_i=M_i^{-1}(\boldsymbol{x}_{i,1})(\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}i}).\end{aligned}$$

假设 2 外界干扰$\boldsymbol{\varepsilon}_i$有界, 集总干扰$\boldsymbol{d}_i$及其导数$\dot{\boldsymbol{d}}_i$有界, 且满足$\|\dot{\boldsymbol{d}}_i\|\leqslant\alpha_i,\ \alpha_i>0$为未知常数.

由性质1可知, $\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{q}_i)$有界. 根据$\boldsymbol{d}_i$的定义, 假设2是合理的.

本文的主要目的是设计分布式协同控制器$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 使得多航天器的姿态在具有外界干扰及执行器故障的情况下, 在有限时间内快速跟踪参考轨迹.

3 自适应滑模干扰观测器设计

为了估计系统的集总干扰$\boldsymbol{d}_i$, 本文使用了一个自适应滑模干扰观测器.

定义一个滑模面

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}=\dot{\boldsymbol{e}}_i+r_i\mathrm{sig}^{\gamma_i}(\boldsymbol{e}_i), \quad (7)$$

其中: $\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{x}_{i,2}-\hat{\boldsymbol{x}}_{i,2}$为估计误差, $\hat{\boldsymbol{x}}_{i,2}$为$\boldsymbol{x}_{i,2}$的估计, $r_i>0,\ 0<\gamma_i<1$.

对第i个航天器, 干扰观测器设计为

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_{i,2}=\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_{i,1},\boldsymbol{x}_{i,2})+\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_{i,1})\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}i}+\\ \qquad r_i\mathrm{sig}^{\gamma_i}(\boldsymbol{e}_i)+\hat{\boldsymbol{d}}_i,\\ \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}_i=\eta_i\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}+\hat{\alpha}_i\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i},\end{cases} \quad (8)$$

其中: $\hat{\boldsymbol{d}}_i$为$\boldsymbol{d}_i$的估计, $\eta_i>0$为常数, $\hat{\alpha}_i$为α_i的估计值, 其自适应律设计为如下形式:

$$\dot{\hat{\alpha}}_i=\ell\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}\|-\hat{\alpha}_i, \quad (9)$$

其中$\ell>0$为常数.

定理 1 在假设2下, 针对第i个航天器系统(6), 在所设计的滑模干扰观测器(8)及自适应律(9)下, 观测误差$\tilde{\boldsymbol{d}}_i=\boldsymbol{d}_i-\hat{\boldsymbol{d}}_i$可以在有限时间内收敛到平衡点附近的邻域内.

对$\boldsymbol{e}_i$求导, 可得

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i = \dot{\boldsymbol{x}}_{i,2} - \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_{i,2} = -r_i \mathrm{sig}^{\gamma_i}(\boldsymbol{e}_i) + \boldsymbol{d}_i - \hat{\boldsymbol{d}}_i, \tag{10}$$

将式(10)代入滑模面(7)中, 可得

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i} = \boldsymbol{d}_i - \hat{\boldsymbol{d}}_i. \tag{11}$$

对$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}$求导, 可得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{d}i} = \dot{\boldsymbol{d}}_i - \eta_i \mathrm{sgn}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i} - \hat{\alpha}_i \mathrm{sgn}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}. \tag{12}$$

选取Lyapunov函数$V_{\sigma i} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i} + \dfrac{1}{2\ell}\tilde{\alpha}_i^2$, 令$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - \hat{\alpha}_i$, 求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_{\sigma i} = {}& \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{d}i} + \frac{1}{\ell}\tilde{\alpha}_i\dot{\tilde{\alpha}}_i = \\ & \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{d}}_i - \eta_i\mathrm{sgn}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i} - \hat{\alpha}_i\mathrm{sgn}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}) = \\ & -\frac{1}{\ell}\tilde{\alpha}_i\dot{\hat{\alpha}}_i.\end{aligned} \tag{13}$$

根据假设2, $\|\dot{\boldsymbol{d}}_i\| \leqslant \alpha_i$及自适应律(9), 可得

$$\begin{aligned}&\dot{V}_{\sigma i} \leqslant \\ &\alpha_i\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}\| - \eta_i\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}\| - \hat{\alpha}_i\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}\| - \frac{1}{\ell}\tilde{\alpha}_i(\ell\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}\| - \hat{\alpha}_i) \leqslant \\ &-\eta_i\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}\| + \frac{1}{\ell}\tilde{\alpha}_i\hat{\alpha}_i = \\ &-\eta_i\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}\| - (\frac{1}{2\ell}\tilde{\alpha}_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\frac{1}{2\ell}\tilde{\alpha}_i^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\ell}\tilde{\alpha}_i\hat{\alpha}_i.\end{aligned} \tag{14}$$

根据不等式$\tilde{\alpha}_i\hat{\alpha}_i \leqslant -\dfrac{1}{2}\tilde{\alpha}_i^2 + \dfrac{1}{2}\alpha_i^2$, 可得

$$\frac{1}{\ell}\tilde{\alpha}_i\hat{\alpha}_i \leqslant -\frac{1}{2\ell}\tilde{\alpha}_i^2 + \frac{1}{2\ell}\alpha_i^2. \tag{15}$$

根据引理3, 令$\varphi = 1$, $\psi = \dfrac{1}{2\ell}\tilde{\alpha}_i^2$, $m = 1 - \dfrac{1}{2}$, $n = \dfrac{1}{2}$, $w = \dfrac{1}{2}^{[\frac{1}{2}/(1-\frac{1}{2})]}$, 可得

$$(\frac{1}{2\ell}\tilde{\alpha}_i^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (1 - \frac{1}{2})w + \frac{1}{2\ell}\tilde{\alpha}_i^2. \tag{16}$$

将式(15)和式(16)代入式(14)中, 可得

$$\begin{aligned}&\dot{V}_{\sigma i} \leqslant \\ &-\eta_i\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}\| - (\frac{1}{2\ell}\tilde{\alpha}_i^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\ell}\alpha_i^2 + (1 - \frac{1}{2})w \leqslant \\ &-k_1 V_{\sigma i}^{\frac{1}{2}} + k_2,\end{aligned} \tag{17}$$

其中:

$$k_1 = \min\{(2\eta_i)^{\frac{1}{2}}, (\frac{1}{\ell})^{\frac{1}{2}}\} > 0,$$

$$k_2 = \frac{1}{2\ell}\alpha_i^2 + (1 - \frac{1}{2})w > 0.$$

根据引理1, 观测误差可以在有限时间收敛到平衡点附近的邻域内.

4 基于super-twisting和积分滑模面的分布式协同控制器设计

定义一致性误差

$$\begin{cases}\boldsymbol{\chi}_{i,1} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}_{i,1} - \boldsymbol{x}_{j,1}) + b_i(\boldsymbol{x}_{i,1} - \boldsymbol{q}_0), \\ \boldsymbol{\chi}_{i,2} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}_{i,2} - \boldsymbol{x}_{j,2}) + b_i\boldsymbol{x}_{i,2}.\end{cases} \tag{18}$$

定义滑模面

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_i = {}& \boldsymbol{x}_{i,2} + \int_0^t (c_{i,1}\mathrm{sig}^{\beta_1}(\boldsymbol{\chi}_{i,1}(\tau)) + \\ & c_{i,2}\mathrm{sig}^{\beta_2}(\boldsymbol{\chi}_{i,2}(\tau)))\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{19}$$

其中: $\boldsymbol{S}_i = [S_{i,1}\ \ S_{i,2}\ \ S_{i,3}]^{\mathrm{T}}$, $\beta_1 = \dfrac{\beta_2}{2-\beta_2}$, $\beta_2 \in (0,1)$, $c_{i,1} > 0$, $c_{i,2} > 0$, 且满足多项式$\lambda^2 + c_{i,2}\lambda + c_{i,1}$为Hurwitz 多项式, $i = 1, 2, \cdots, n$.

设计分布式协同控制器如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}i} = -(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_{i,1}))^{-1}[\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{nom}} + \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{sw}}], \\ \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{nom}} = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_{i,1}, \boldsymbol{x}_{i,2}) + \hat{\boldsymbol{d}}_i + c_{i,1}\mathrm{sig}^{\beta_1}(\boldsymbol{\chi}_{i,1}) + \\ \qquad\quad c_{i,2}\mathrm{sig}^{\beta_2}(\boldsymbol{\chi}_{i,2}), \\ \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{sw}} = \delta_{i,1}\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{S}_i) - \int_0^t \dot{\boldsymbol{z}}_i(\boldsymbol{S}_i)\mathrm{d}\tau,\end{cases} \tag{20}$$

其中:

$$\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{S}_i) = \mu_{i,1}\mathrm{sig}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{S}_i) + \mu_{i,2}\boldsymbol{S}_i, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{z}}_i(\boldsymbol{S}_i) = \\ &-\delta_{i,2}(\frac{\mu_{i,1}^2}{2}\mathrm{sig}^0(\boldsymbol{S}_i) + \mu_{i,2}^2\boldsymbol{S}_i + \frac{3}{2}\mu_{i,1}\mu_{i,2}\mathrm{sig}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{S}_i)) = \\ &-\delta_{i,2}\boldsymbol{\varGamma}_i\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{S}_i),\end{aligned} \tag{22}$$

$\boldsymbol{\varGamma}_i = \dfrac{\mu_{i,1}}{2}\mathrm{diag}\{|S_{i,1}|^{-\frac{1}{2}}, |S_{i,2}|^{-\frac{1}{2}}, |S_{i,3}|^{-\frac{1}{2}}\} + \mu_{i,2}\boldsymbol{I}_3$, $\delta_{i,1} > 0$, $\delta_{i,2} > 0$, $\mu_{i,1} > 0$, $\mu_{i,2} > 0$为常数.

定理 2 针对多航天器系统(6), 在自适应滑模干扰观测器(8)及控制器(20)作用下, 若存在对角矩阵$\boldsymbol{P} > \boldsymbol{0}$及常数$\mu_{\mathrm{m},2}$满足

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{F} = -\theta\boldsymbol{I}_{6n}, \tag{23}$$

$$\frac{\theta\mu_{\mathrm{m},2}}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})} - \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}) > 0, \tag{24}$$

其中: $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}-\boldsymbol{\delta}_1 & \boldsymbol{I}_{3n} \\ -\boldsymbol{\delta}_2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$, $\mu_{\mathrm{m},2} = \min\{\mu_{1,2}, \mu_{2,2}, \cdots, \mu_{n,2}\}$, $\boldsymbol{\delta}_1 = \mathrm{diag}\{\delta_{1,1}, \delta_{2,1}, \cdots, \delta_{n,1}, \} \otimes \boldsymbol{I}_3$, $\boldsymbol{\delta}_2 = \mathrm{diag}\{\delta_{1,2}, \delta_{2,2}, \cdots, \delta_{n,2}, \} \otimes \boldsymbol{I}_3$, $\theta > 0$为常数, 多航天器姿态可以在有限时间收敛到平衡点附近的邻域内.

根据所设计的控制器(20), 对滑模面$\boldsymbol{S}_i$求导, 可得

$$\dot{\boldsymbol{S}}_i = \boldsymbol{d}_i - \hat{\boldsymbol{d}}_i - \delta_{i,1}\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{S}_i) + \boldsymbol{z}_i(\boldsymbol{S}_i). \tag{25}$$

定义变量$\boldsymbol{\varsigma} = [\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S})\ \ \boldsymbol{\varDelta}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 其中:

$$\boldsymbol{\varDelta} = [\boldsymbol{\varDelta}_1^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{\varDelta}_2^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \boldsymbol{\varDelta}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varDelta}_i = \boldsymbol{d}_i - \hat{\boldsymbol{d}}_i + \boldsymbol{z}_i(\boldsymbol{S}_i),$$

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{S}) = [\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}_1)\ \ \boldsymbol{\phi}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}_2)\ \cdots\ \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}_n)]^{\mathrm{T}}.$$

对变量$\boldsymbol{\varsigma}$求导, 可得

$$\dot{\boldsymbol{\varsigma}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}(-\delta_1\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{S})+\boldsymbol{\Delta})\\ -\delta_2\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{S})+\dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}\boldsymbol{\varsigma}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}\end{bmatrix}, \tag{26}$$

其中: $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Gamma}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\Gamma}_1,\boldsymbol{\Gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\Gamma}_n\}$.

选取Lyapunov函数$V=\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varsigma}$, 求导可得

$$\dot{V}=\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F})\boldsymbol{\varsigma}+2\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}\end{bmatrix}. \tag{27}$$

根据定理2可知, $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{F})\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}=-\theta\boldsymbol{I}_{6n}$, 代入式(27), 可得

$$\dot{V}=-\theta\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\varsigma}+2\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}\end{bmatrix}\leqslant -\theta\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\varsigma}+\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varsigma}+\dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}^{\mathrm{T}}\dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}. \tag{28}$$

根据$\boldsymbol{\varsigma}$及$\boldsymbol{\Lambda}$定义, 可得如下形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\varsigma}=&\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S})\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{S})+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S})\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{S})=\\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}(\frac{\mu_{i,1}}{2}|\boldsymbol{S}_{ji}|^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\phi}_{ji}^2(\boldsymbol{S}_{ji})+\\ &\frac{\mu_{i,1}}{2}|\boldsymbol{S}_{ji}|^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{z}_{ji}^2(\boldsymbol{S}_{ji}))+\mu_{\mathrm{m},2}\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2\leqslant\\ &\frac{\mu_{\mathrm{m},1}}{2}\|\boldsymbol{S}\|^{-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2+\mu_{\mathrm{m},2}\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2,\end{aligned} \tag{29}$$

其中: $\mu_{\mathrm{m},1}=\min\{\mu_{1,1},\mu_{2,1},\cdots,\mu_{n,1}\}$, $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \boldsymbol{S}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

根据式(21), 得$\|\boldsymbol{\phi}\|^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}(\mu_{i,1}|\boldsymbol{S}_{ji}|+2\mu_{i,1}\cdot\mu_{i,2}|\boldsymbol{S}_{ji}|^{\frac{3}{2}})+\mu_{\mathrm{m},2}\|\boldsymbol{S}\|^2$. 根据上式及$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})\times\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2\leqslant V\leqslant\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2$, 得$\mu_{\mathrm{m},1}\|\boldsymbol{S}\|^{\frac{1}{2}}\leqslant\|\boldsymbol{\phi}\|\leqslant\|\boldsymbol{\varsigma}\|\leqslant\dfrac{V^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{P})}$. 故

$$-\|\boldsymbol{S}\|^{\frac{1}{2}}\leqslant-\frac{\mu_{\mathrm{m},1}\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{P})}{V^{\frac{1}{2}}}. \tag{30}$$

根据$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2\leqslant V\leqslant\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2$, 可得

$$\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varsigma}\leqslant\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})V. \tag{31}$$

根据上节所设计的自适应滑模干扰观测器(8), $\dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}=\dot{\boldsymbol{d}}-\eta_i\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}-\hat{\alpha}_i\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}i}$可得

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}^{\mathrm{T}}\dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}=\|\dot{\boldsymbol{d}}\|^2\leqslant(2\|\alpha\|+\|\eta\|+\|\tilde{\alpha}\|)^2, \tag{32}$$

其中: $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}=[\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n]^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}=[\tilde{\alpha}_1\ \tilde{\alpha}_2\ \cdots\ \tilde{\alpha}_n]^{\mathrm{T}}$.

将式(29)–(32)代入式(28), 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}\leqslant&-\theta\mu_{\mathrm{m},1}^2\frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{P})}{2\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})}V^{\frac{1}{2}}-\theta\frac{\mu_{\mathrm{m},2}}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})}V+\\ &\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})V+(2\|\alpha\|+\|\eta\|+\|\tilde{\alpha}\|)^2\leqslant\\ &-c_1V^{\frac{1}{2}}-c_2V+c_3,\end{aligned} \tag{33}$$

其中: $c_1=\theta\mu_{\mathrm{m},1}^2\dfrac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{P})}{2\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})}>0$, $c_2=\dfrac{\theta\mu_{\mathrm{m},2}}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})}-\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})$, $c_3=(2\|\alpha\|+\|\eta\|+\|\tilde{\alpha}\|)^2>0$.

由式(24)可知, $c_2=\dfrac{\theta\mu_{\mathrm{m},2}}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})}-\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})>0$.

根据引理2, 状态$\boldsymbol{\varsigma}$可以在有限时间内有界稳定. 接下来的证明过程分为两部分: 第1步证明状态$\boldsymbol{\chi}_1$, $\boldsymbol{\chi}_2$有界稳定; 第2步证明状态$\boldsymbol{\chi}_1$, $\boldsymbol{\chi}_2$可以在有限时间内有界稳定.

第1步 证明状态$\boldsymbol{\chi}_1$, $\boldsymbol{\chi}_2$有界稳定.

根据定义$\boldsymbol{\varsigma}=[\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S})\ \ \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$可知, $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{S})$, $\boldsymbol{\Delta}$可以在有限时间内有界稳定. 根据式(25)可知, $\dot{\boldsymbol{S}}$可以在有限时间内有界稳定. 假定存在常数$c_s>0$使得$\|\dot{\boldsymbol{S}}\|\leqslant c_s$.

根据式(19)中滑模面定义, 可得

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2=-\boldsymbol{C}_1\mathrm{sig}^{\beta_1}(\boldsymbol{\chi}_1)-\boldsymbol{C}_2\mathrm{sig}^{\beta_2}(\boldsymbol{\chi}_2)+\dot{\boldsymbol{S}}, \tag{34}$$

其中:

$$\boldsymbol{C}_1=\mathrm{diag}\{c_{1,1},c_{2,1},\cdots,c_{n,1}\}\otimes\boldsymbol{I}_3,$$
$$\boldsymbol{C}_2=\mathrm{diag}\{c_{1,2},c_{2,2},\cdots,c_{n,2}\}\otimes\boldsymbol{I}_3.$$

由于$\boldsymbol{\chi}_2=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_2$, 将式(34)两边同乘$\boldsymbol{H}$, 得

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_2=-\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_1\mathrm{sig}^{\beta_1}(\boldsymbol{\chi}_1)-\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_2\mathrm{sig}^{\beta_2}(\boldsymbol{\chi}_2)+\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{S}}. \tag{35}$$

选取$V_2=\dfrac{1}{\beta_1+1}\boldsymbol{\chi}_1^{\mathrm{T}}\mathrm{sig}^{\beta_1}(\boldsymbol{\chi}_1)+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\chi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{\chi}_2$, 根据引理4, 矩阵$\boldsymbol{H}$是正定的, 故$V_2$为正定的. 根据式(35), 求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2=&\\ &(\mathrm{sig}^{\beta_1}(\boldsymbol{\chi}_1))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\chi}_2+\boldsymbol{\chi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}\times\\ &(-\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_1\mathrm{sig}^{\beta_1}(\boldsymbol{\chi}_1)-\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}_2\mathrm{sig}^{\beta_2}(\boldsymbol{\chi}_2)+\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{S}})=\\ &(\mathrm{sig}^{\beta_1}(\boldsymbol{\chi}_1))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\chi}_2-\boldsymbol{\chi}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{sig}^{\beta_1}(\boldsymbol{\chi}_1)-\\ &\boldsymbol{\chi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2\mathrm{sig}^{\beta_2}(\boldsymbol{\chi}_2)+\boldsymbol{\chi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{-1}\dot{\boldsymbol{S}}\leqslant\\ &-c_4\|\boldsymbol{\chi}_2\|^{\beta_2+1}+\|\boldsymbol{\chi}_2\|\|\boldsymbol{C}_1^{-1}\|\|\dot{\boldsymbol{S}}\|,\end{aligned} \tag{36}$$

其中$c_4=\min\{\dfrac{c_{1,2}}{c_{1,1}},\dfrac{c_{2,2}}{c_{2,1}},\cdots,\dfrac{c_{n,2}}{c_{n,1}}\}$. 根据$\|\dot{S}\|\leqslant c_s$, 可得

$$\dot{V}_2\leqslant-\|\boldsymbol{\chi}_2\|(c_4\|\boldsymbol{\chi}_2\|^{\beta_2}-\|\boldsymbol{C}_1^{-1}\|c_s). \tag{37}$$

由式(37)可知, 当$\|\boldsymbol{\chi}_2\|^{\beta_2}>\dfrac{\|\boldsymbol{C}_1^{-1}\|c_s}{c_4}$时, $\dot{V}_2<0$. 故系统状态$\boldsymbol{\chi}_1$, $\boldsymbol{\chi}_2$是有界稳定的.

第2步 证明状态$\boldsymbol{\chi}_1$, $\boldsymbol{\chi}_2$可以在有限时间内有界稳定.

选取Lyapunov函数$V_3=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\chi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{\chi}_2$, 求导可得

$$\dot{V}_3=$$

$$-\chi_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1\mathrm{sig}^{\beta_1}(\chi_1)-\chi_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2\mathrm{sig}^{\beta_2}(\chi_2)+\chi_2^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}}\leqslant$$
$$\|\chi_2\|\|\boldsymbol{C}_1\|\|\chi_1\|^{\beta_1}-c_{2,\min}\|\chi_2\|^{\beta_2+1}+\|\chi_2\|\|\dot{\boldsymbol{S}}\|, \tag{38}$$

其中$c_{2,\min}=\{c_{1,2},c_{2,2},\cdots,c_{n,2}\}$.

由于系统状态χ_1有界, 故假定存在常数$c_\chi>0$, 使得$\|\chi_1\|\leqslant c_\chi$.

$$\begin{aligned}&\dot{V}_3=\\&-\varrho c_{2,\min}\|\chi_2\|^{\beta_2+1}-\epsilon\|\chi_2\|^{\beta_2+1}+\\&\|\chi_2\|\|\boldsymbol{C}_1\|c_\chi^{\beta_1}+\|\chi_2\|c_s=\\&-\varrho c_{2,\min}\|\chi_2\|^{\beta_2+1}-\|\chi_2\|(\epsilon\|\chi_2\|^{\beta_2}-c_5)\leqslant\\&-c_6V_3^{\frac{\beta_2+1}{2}}-\|\chi_2\|(\epsilon\|\chi_2\|^{\beta_2}-c_5),\end{aligned} \tag{39}$$

其中$0<\varrho<1$, $\epsilon=(1-\varrho)c_{2,\min}$, $c_5=\|C_1\|c_\chi^{\beta_1}+c_s$, $c_6=\varrho c_{2,\min}(\dfrac{2}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{H}^{-1})})^{\frac{\beta_2+1}{2}}$.

由式(39)可知, 当$\|\chi_2\|^{\beta_2}>\dfrac{c_5}{\epsilon}$时, $\dot{V}_3\leqslant-c_5\times V_3^{\frac{\beta_2+1}{2}}$. 故状态$\chi_2$可以在有限时间内有界稳定. 根据$\chi_2=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{H}$为正定对称矩阵, $\boldsymbol{x}_2$可以在有限时间内有界稳定. 由于状态$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{S})$, $\boldsymbol{\Delta}$可以在有限时间内有界稳定, 根据式(21)–(22)可知, $\boldsymbol{S}$可以在有限时间内有界稳定. 由式(19)知

$$\int_0^t(c_{i,1}\mathrm{sig}^{\beta_1}(\chi_{i,1}(\tau))+c_{i,2}\mathrm{sig}^{\beta_2}(\chi_{i,2}(\tau)))\mathrm{d}\tau$$

可以在有限时间内有界稳定. 由于χ_2可以在有限时间内有界稳定, 故状态χ_1也可以在有限时间内有界稳定. 即: 多航天器的姿态可以在有限时间内收敛到平衡点附近的邻域内.

注 1　将文献[22]中的滑模面

$$\boldsymbol{S}_i=\chi_{i,2}+\int_0^t(c_{i,1}\mathrm{sig}^{\beta_1}(\chi_{i,1}(\tau))+c_{i,2}\mathrm{sig}^{\beta_2}(\chi_{i,2}(\tau)))\mathrm{d}\tau$$

改为

$$\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{x}_{i,2}+\int_0^t(c_{i,1}\mathrm{sig}^{\beta_1}(\chi_{i,1}(\tau))+c_{i,2}\mathrm{sig}^{\beta_2}(\chi_{i,2}(\tau)))\mathrm{d}\tau.$$

将第1项中的$\chi_{i,2}$变为$\boldsymbol{x}_{i,2}$, 可以避免在控制器设计时引入全局的拉普拉斯矩阵$\boldsymbol{H}$, 从而实现了分布式控制. 即: 当领导航天器与第i个航天器有信息交互时, 第i个航天器仅根据自身信息、邻居航天器的信息及领导航天器信息进行姿态调整. 当领导航天器与第i个航天器没有信息交互时, 第i个航天器仅根据自身信息及邻居航天器的信息进行姿态调整. 与集中式控制器相比, 本文所设计的分布式控制器仅采用自身信息及邻居航天器信息, 具有更低的通讯要求和更高的灵活性.

注 2　由于引入super-twisting算法, 加快了系统的收敛速度. 控制器设计包含快速趋近律$\mathrm{sig}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{S}_i)$和指数趋近律$\boldsymbol{S}_i$两部分. 当系统状态离滑模面较远时, 指数趋近项$\boldsymbol{S}_i$保证系统的快速收敛. 当系统状态离滑模面较近时, 快速趋近项$\mathrm{sig}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{S}_i)$保证系统的快速收敛.

5　仿真研究

为了验证本文所提方法的有效性, 针对1个虚拟领导者和4个跟随者的多航天器模型, 将本文所提方法与文献[28]方法进行仿真对比研究.

4个跟随者的惯性矩阵为

$$J_1=\mathrm{diag}\{17,12,9\},\ J_2=\mathrm{diag}\{14,13,10\},$$
$$J_3=\mathrm{diag}\{20,10,12\},\ J_4=\mathrm{diag}\{15,9,16\}.$$

虚拟领导者的姿态为$q_0=[0.5\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$. 系统的外部干扰为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i=0.1\times[\cos(0.2t)\ \ \sin(0.3t)\ \ \cos(0.4t)]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}.$$

执行器故障的效率因子为

$$\boldsymbol{\varXi}_i=\mathrm{diag}\{0.2,0.4,1\}.$$

偏差故障为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{f}_{\mathrm{a}i}=[f_{\mathrm{a}i1}\ \ f_{\mathrm{a}i2}\ \ f_{\mathrm{a}i3}]^{\mathrm{T}},\\&f_{\mathrm{a}i1}=0.05\times[0.9+0.1\sin(t/10)+0.01\varpi]\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m},\\&f_{\mathrm{a}i2}=0.05\times[0.9+0.1\cos(t/10)+0.015\varpi]\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m},\\&f_{\mathrm{a}i3}=0.05\times[0.9+0.1\sin(t/10)+0.02\varpi]\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m},\end{aligned}$$

其中$\varpi\in[-1,1]$为一个随机数.

自适应滑模干扰观测器参数选取$r_i=0.05$, $\gamma_i=0.5$, $\eta_i=0.1$, $\ell_{i,1}=0.2$.

控制器参数选取

$$\delta_{i,1}=2,\ \delta_{i,2}=0.1,\ \beta_{i,1}=\frac{3}{7},$$
$$\beta_{i,2}=\frac{3}{5},\ c_{i,1}=c_{i,2}=1,\ \mu_{i,1}=\mu_{i,2}=0.01.$$

图1为多航天器的通讯拓扑图. 图2为有限时间姿态跟踪曲线. $\boldsymbol{q}_{ij}$和$\dot{\boldsymbol{q}}_{ij}$为第$i$个航天器的第$j$个姿态及其导数. 图2(a)–2(b)表示4个航天器姿态及其导数的第1个状态. 图2(c)–2(d)表示4个航天器姿态及其导数的第2个状态. 图2(e)–2(f)表示4个航天器姿态及其导数的第3个状态. 图3表示了式(8)所示的系统在文献[28]提出的控制器下4个航天器姿态及其导数的有限时间跟踪曲线. 从图2和图3(a)–3(b)等可以看出多航天器的姿态可以在有限时间收敛到达稳定状态.

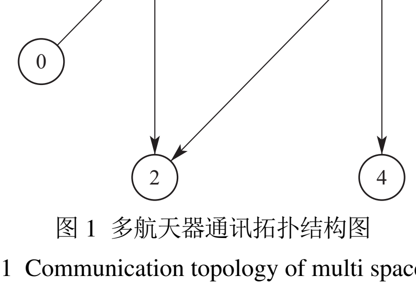
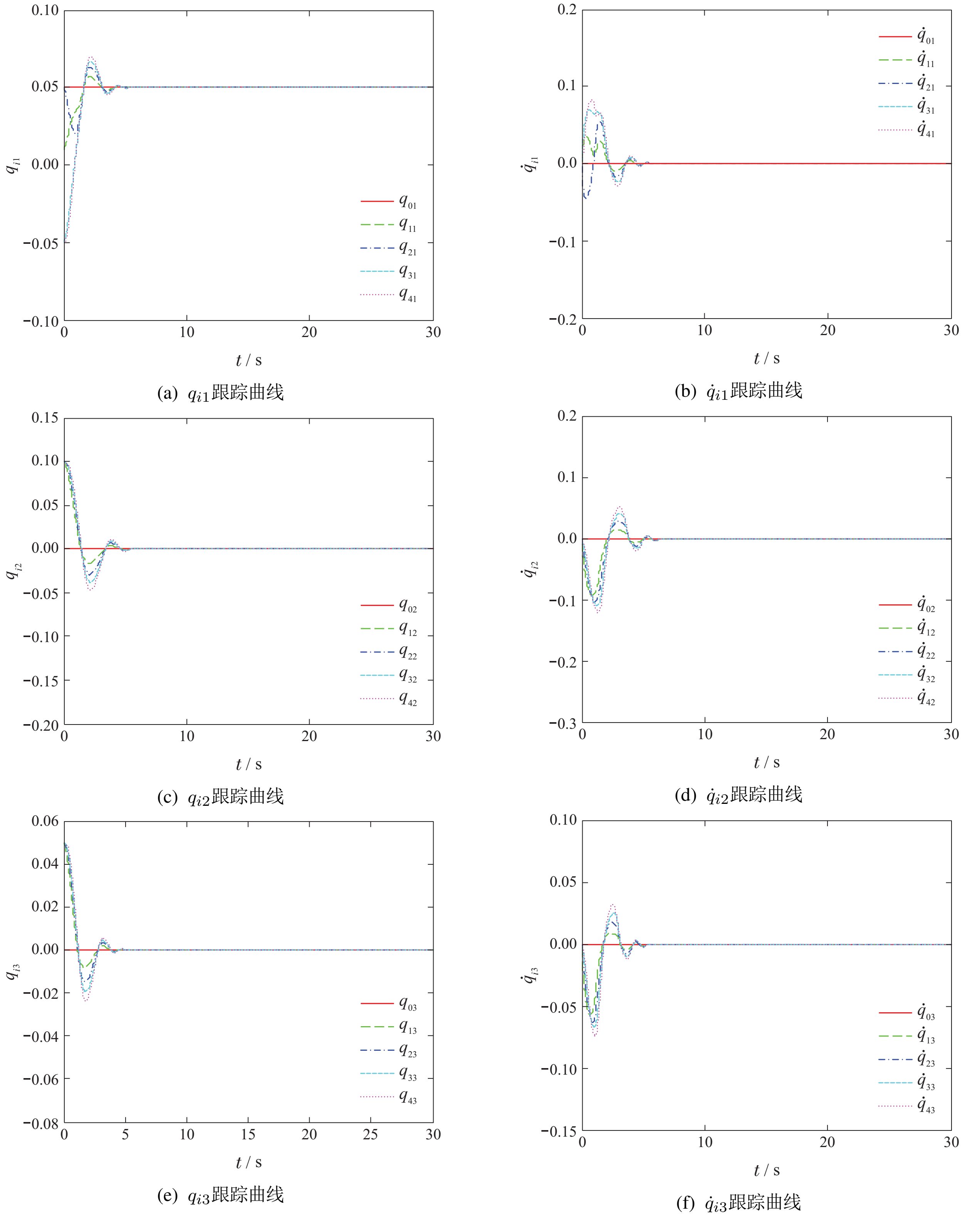


图 1　多航天器通讯拓扑结构图

Fig. 1　Communication topology of multi spacecraft



(a) q_{i1}跟踪曲线

(b) $\dot{q}_{i1}$跟踪曲线

(c) q_{i2}跟踪曲线

(d) $\dot{q}_{i2}$跟踪曲线

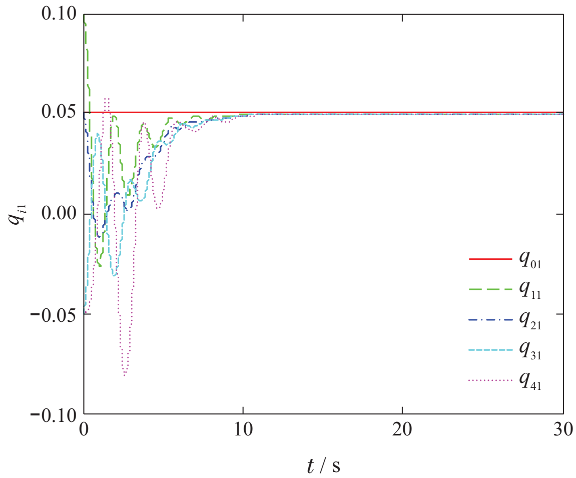
(e) q_{i3}跟踪曲线

(f) $\dot{q}_{i3}$跟踪曲线

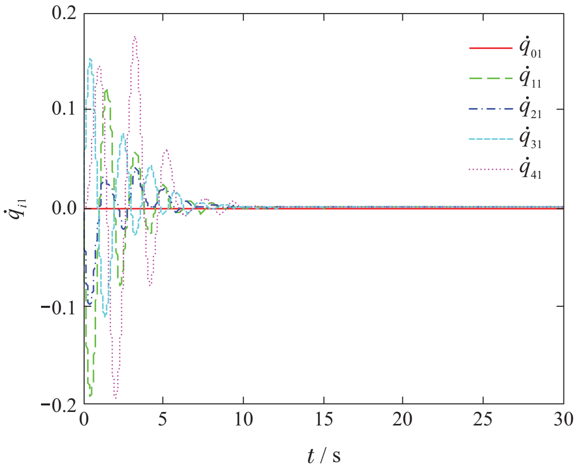
图 2　本文控制器下的多航天器姿态及其导数跟踪曲线

Fig. 2　Multi spacecraft attitude and its derivative tracking curve under this paper

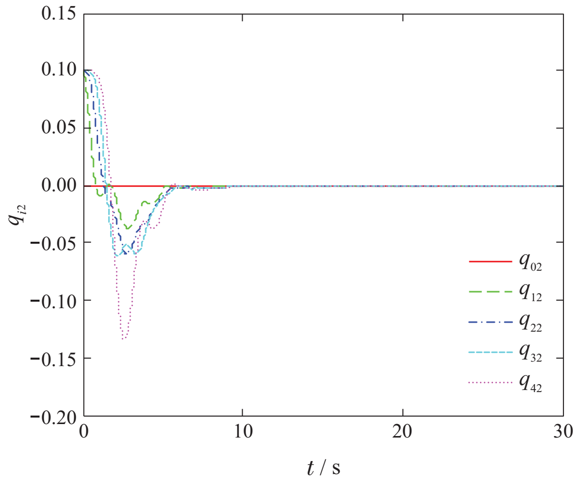
将图2和图3做对比可以看出, 本文提出的控制器具有更快的瞬态响应和更强的鲁棒性. 在本文提出的控制器下, 4个航天器姿态在5秒左右到达稳定; 而在文献[28]提出的控制器下, 4个航天器姿态在10 s左右到达稳定. 在文献[28]提出的控制器下要达到稳定状态还需要多5 s的时间. 与文献[28]所设计的分布式有限时间姿态协同控制器相比, 由于引入了super-twisting算法, 本文提出的有限时间分布式协同控制器具有更快的收敛速度. 从图2和图3对比可以看出, 本文所提出的控制器具有更高的控制精度.



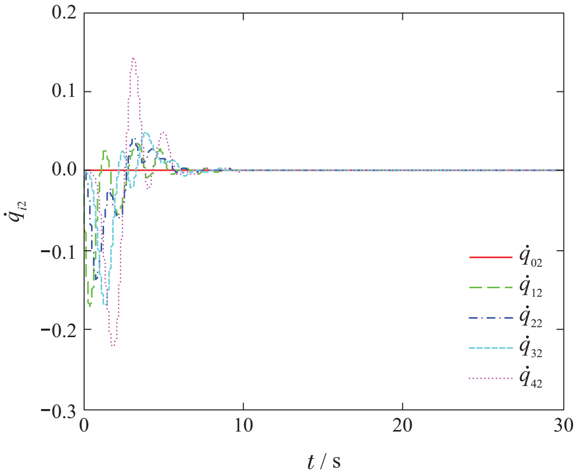
(a) q_{i1}跟踪曲线



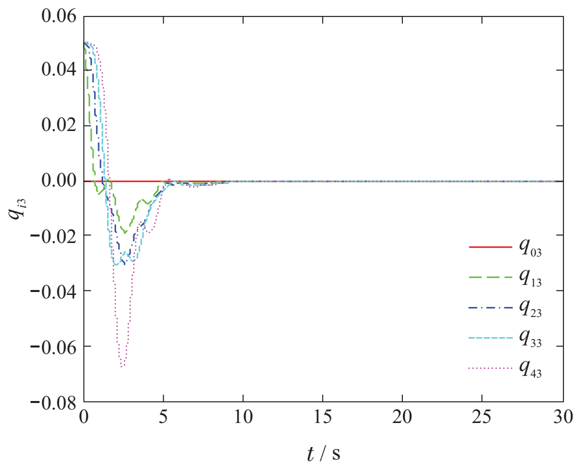
(b) $\dot{q}_{i1}$跟踪曲线



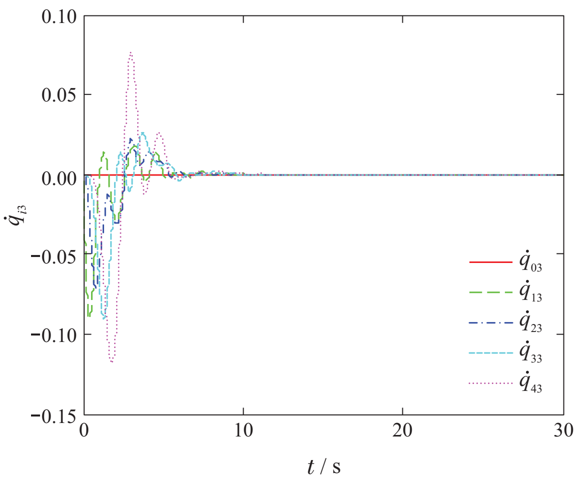
(c) q_{i2}跟踪曲线



(d) $\dot{q}_{i2}$跟踪曲线



(e) q_{i3}跟踪曲线



(f) $\dot{q}_{i3}$跟踪曲线

图 3 文献[28]控制器下的多航天器姿态及其导数跟踪曲线

Fig. 3 Multi spacecraft attitude and its derivative tracking curve under reference [28]

6 结论

本文研究了基于super-twisting算法和自适应滑模干扰观测器的多航天器姿态协同控制问题. 首先, 通过对每个航天器构造自适应滑模干扰观测器来估计系统外界干扰及执行器故障构成的集总干扰; 然后, 基于多航天器姿态的一致性误差将super-twisting算法与积分滑模控制相结合设计了分布式协同控制器, 有效地避免了控制器设计中全局信息的引入, 实现了分布式控制, 简化了控制器的设计过程; 最后, 通过Lyapunov稳定性理论证明了多航天器姿态可以在有限时

间内收敛到平衡点附近的邻域内. 通过仿真及对比, 结果表明: 本文所设计的控制器具有更快的收敛速度和更高的控制精度.

参考文献:

[1] REN W, BEARD R W. Decentralized scheme for spacecraft formation flying via the virtual structure approach. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2004, 27(1): 73 – 82.

[2] HU Q L, DONG H Y, ZHANG Y M, et al. Tracking control of spacecraft formation flying with collision avoidance. *Aerospace Science and Technology*, 2015, 42(3): 353 – 364.

[3] ZHANG Haibo, MEI Jie, MA Guangfu, et al. Coupled-distributed-adaptive-coordinated control for relative orbit and attitude of multiple spacecrafts. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1086 – 1098.
(张海博, 梅杰, 马广富, 等. 多航天器相对轨道与姿态耦合分布式自适应协同控制. 控制理论与应用, 2013, 30(9): 1086 – 1098.)

[4] CAI Guangbin, YAN Jie, ZHAO Yushan, et al. Attitude consensus of multi-spacecraft cooperative formation with stochastic multi-hop time-varying delay. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(10): 1415 – 1421.
(蔡光斌, 闫杰, 赵玉山, 等. 具有随机多跳时变时延的多航天器协同编队姿态一致性. 控制理论与应用, 2018, 35(10): 1415 – 1421.)

[5] SUI Weishun, DUAN Guangren, ZHANG Maorui. Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft. *Control and Decision*, 2019, DOI: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968.
(隋维舜, 段广仁, 张卯瑞. 多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制. 控制与决策, 2019, DOI: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968.)

[6] YANG H J, YOU X, XIA Y Q, et al. Nonlinear attitude tracking control for spacecraft formation with multiple delays. *Advances in Space Research*, 2014, 54(4): 759 – 769.

[7] ZHANG C X, WANG J H, ZHANG D X, et al. Fault-tolerant adaptive finite-time attitude synchronization and tracking control for multi-spacecraft formation. *Aerospace Science and Technology*, 2018, 73: 197 – 209.

[8] WU B L, WANG D W, POH E K. Decentralized sliding-mode control for spacecraft attitude synchronization under actuator failures. *Acta Astronautica*, 2014, 105(1): 333 – 343.

[9] BURTON J A, ZINOBER A S I. Continuous approximation of variable structure control. *International Journal of Systems Science*, 1986, 17(6): 875 – 885.

[10] LEVANT A. Universal single-input-single-output (SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1447 – 1451.

[11] LEVANT A. Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 2007, 43: 576 – 586.

[12] LEVANT A. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 2005, 41: 823 – 830.

[13] MORENO J A, OSORIO M. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: IEEE, 2008, 2856 – 2861.

[14] AHMED S, AHMED A, MANSOOR I, et al. Output feedback adaptive fractional-order super-twisting sliding mode control of robotic manipulator. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering*, 2020, DOI: https://doi.org/10.1007/s40998-020-00364-y.

[15] GURUMURTHY G, DAS D K. Terminal sliding mode disturbance observer based adaptive super twisting sliding mode controller design for a class of nonlinear systems. *European Journal of Control*, 2021, 57: 232 – 241.

[16] ABDUL ZAHRA A K, ABDALLA T Y. Design of fuzzy super twisting sliding mode control scheme for unknown full vehicle active suspension systems using an artificial bee colony optimization algorithm. *Asian Journal of Control*, 2020, DOI: 10.1002/asjc.2352.

[17] ZHANG G G, WANG Y, WANG J, et al. Disturbance observer-based super-twisting sliding mode control for formation tracking of multi-agent mobile robots. *Measurement and Control*, 2020, 53(5/6): 908 – 921.

[18] QIAN D W, ZHANG G G, CHEN J R, et al. Coordinated formation design of multi-robot systems via an adaptive-gain super-twisting sliding mode method. *Applied Sciences*, 2019, 9(4315): 1 – 19.

[19] QIAN D W, ZHANG G G, WANG J, et al. Second-order sliding mode formation control of multiple robots by extreme learning machine. *Symmetry-Basel*, 2019, 11(1444): 1 – 19.

[20] CHEN D C, LI S, WU Q, et al. Super-twisting ZNN for coordinated motion control of multiple robot manipulators with external disturbances suppression. *Neurocomputing*, 2020, 371: 78 – 90.

[21] KAMAL S, SACHAN A, KUMAR D. K, et al. Robust finite time cooperative control of second order agents: A multi-input multi-output higher order super-twisting based approach. *ISA Transactions*, 2019, 86: 1 – 8.

[22] WANG X Y, LI S H, YU X H, et al. Distributed active anti-disturbance consensus for leader follower higher-order multi-agent systems with mismatched disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(11): 5795 – 5801.

[23] SHANG Y, CHEN B, LIN C. Fast finite-time adaptive neural control of multi-agent systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(15): 10432 – 10452.

[24] WANG H Q, LIU X P, ZHAO X D, et al. Adaptive fuzzy finite-time control of nonlinear systems with actuator faults. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(5): 1786 – 1797.

[25] WANG X H, JI H B. Leader-follower consensus for a class of nonlinear multi-agent systems. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2012, 10(1): 27 – 35.

[26] CHUNG S J, AHSUN U, SLOTINE J J E. Application of synchronization to formation flying spacecraft: Lagrangian approach. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2009, 32(2): 512 – 526.

[27] XIA Y Q, YANG H J, YOU X, et al. Adaptive control for attitude synchronisation of spacecraft formation via extended state observer. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 8(18): 2171 – 2185.

[28] HU Q L, ZHANG J, ZHANG Y M. Velocity-free attitude coordinated tracking control for spacecraft formation flying. *ISA Transactions*, 2018, 73: 54 – 65.

[29] ZHU Z, XIA Y Q, FU M Y. Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2011, 21(6): 686 – 702.

作者简介:

许　淼　博士研究生, 目前研究方向为多航天器姿态协同跟踪控制, E-mail: 18332552097@163.com;

方一鸣　博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂系统建模仿真与控制优化、智能优化算法及应用、故障诊断与容错控制、冶金自动化等, E-mail: fyming@ysu.edu.cn;

李建雄　博士, 副教授, 目前研究方向为多智能体协同控制、网络化系统控制、复杂机电系统分析、控制及应用, E-mail: jxli@ysu.edu.cn;

赵晓东　博士研究生, 目前研究方向为群智能优化算法及应用, E-mail: xiaodongzhaoys@163.com.