

具有预设暂态性能的一类不确定非线性系统渐近状态跟踪控制

陈浪雷, 刘勇华[†], 苏春翌

(广东工业大学 自动化学院, 广东 广州 510006)

摘要: 研究一类不确定非线性时变系统的预设暂态性能渐近状态跟踪控制问题. 在无需系统函数先验知识的条件下, 本文采用漏斗控制技术和障碍李雅普诺夫函数方法, 提出了一种新颖的鲁棒自适应状态反馈控制策略. 所设计的控制器不仅能够确保状态跟踪误差渐近收敛到零点, 而且满足其预先设定的性能要求. 仿真实例验证了所提控制策略的有效性.

关键词: 非线性系统; 渐近状态跟踪; 鲁棒自适应控制; 障碍函数

引用格式: 陈浪雷, 刘勇华, 苏春翌. 具有预设暂态性能的一类不确定非线性系统渐近状态跟踪控制. 控制理论与应用, 2021, 38(9): 1421 – 1426

DOI: 10.7641/CTA.2021.00741

Asymptotic state tracking control for a class of uncertain nonlinear systems with guaranteed transient performance

CHEN Lang-lei, LIU Yong-hua[†], SU Chun-yi

(School of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong 510006, China)

Abstract: This paper investigates the problem of asymptotic state tracking control with guaranteed transient performance for a class of uncertain nonlinear time-varying systems. By using the funnel control approach and the concept of barrier Lyapunov function, we develop a new robust adaptive state feedback control strategy, without involving a priori knowledge of system functions. It is shown that the designed algorithm can not only guarantee asymptotic state tracking, but also transient performance. Finally, simulation studies are used to demonstrate the validity of the proposed approach.

Key words: nonlinear systems; asymptotic state tracking; robust adaptive control; barrier function

Citation: CHEN Langlei, LIU Yonghua, SU Chunyi. Asymptotic state tracking control for a class of uncertain nonlinear systems with guaranteed transient performance. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(9): 1421 – 1426

1 引言

在过去几十年中, 不确定非线性系统跟踪控制研究得到了众多学者的广泛关注^[1–2]. 考虑预设暂态性能的跟踪控制设计是其中的一个热点问题. 具有预设暂态性能的跟踪控制是通过设计合适的控制器使得跟踪误差满足系统预设的控制性能要求. 在现有文献中, 存在两种行之有效的解决方案, 即漏斗控制^[3]和预设性能控制^[4]. 漏斗控制是一种基于高增益自适应控制方法的时变控制策略, 已成功地应用于各类非线性系统中^[5–7]. 另一种方法为预设性能控制, 该方法主要采用误差变换来解决系统跟踪控制中的预设性能约束问题^[8–10].

近年来, 基于上述两种方法, 不确定非线性系统的预设性能跟踪控制取得了一系列具有重要意义的研

究成果^[11–22]. 然而, 这些结果存在一个共同的不足, 即当被控系统函数缺少足够的先验知识时, 所设计的控制器仅能满足闭环系统的预设性能要求, 无法确保系统输出或状态的渐近跟踪. 为解决这一问题, 文献[23]结合误差符号鲁棒积分(robust integral of the sign of the error, RISE)技术和预设性能控制方法, 提出了一种自适应神经网络渐近跟踪控制算法, 但该算法要求系统扰动的一阶与二阶导数存在且有界. 同时, 神经网络的使用增加了控制器的复杂度. 为克服这一不足, 文献[24]基于切换逻辑技术, 设计了一种由局部控制模块和预设性能控制模块组成的无逼近结构混合控制策略, 在满足输出跟踪预设暂态性能要求的基础上, 实现了闭环系统全局渐近稳定性. 值得注意的是, 尽管文献[24]保证了输出跟踪的预设暂态性能要求与

收稿日期: 2020–10–24; 录用日期: 2021–03–09.

[†]通信作者. E-mail: yonghua.liu@outlook.com; Tel.: +86 15914259099.

本文责任编辑: 刘淑君.

国家自然科学基金项目(61803097, 61733006, U2013601)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61803097, 61733006, U2013601).

渐近状态跟踪,但其无法实现状态跟踪的预设暂态性能。

基于以上讨论,本文研究一类不确定非线性系统的预设暂态性能渐近状态跟踪控制问题,提出了一种新颖的鲁棒自适应控制算法。本文的主要贡献在于如下两方面:1)采用漏斗控制技术和障碍李雅普诺夫函数方法设计时变状态反馈控制器,有效消除了系统中未知非线性函数引起的技术困难;2)所提控制算法不仅保证了预设的状态跟踪性能,而且实现了状态跟踪误差渐近收敛至零点。仿真结果表明了文中所提控制算法的有效性。

下文采用如下符号: $\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 分别表示实数,非负实数, n 维实向量和 $n \times n$ 维实矩阵的集合。 $|\cdot|$ 表示绝对值, $\|\cdot\|$ 为欧氏范数。 $\mathcal{W}^{r,\infty}(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R})$ 表示 r 次连续可微函数 $h: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ 的集合,并且 $h, \dot{h}, \dots, h^{(r)}$ 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上有界。 $\exp(\cdot)$ 表示指数函数。 $\ln(\cdot)$ 表示自然对数函数。如果对任意向量 z 都有 $z^T S z > 0$ 成立,或者对称矩阵 S 的所有特征值都为正数,则称对称矩阵 S 正定。 $S > 0$ 表示 S 正定。 $\lambda_{\min}(S)$ 为对称矩阵 S 的最小特征值。

2 问题描述与预备知识

2.1 问题描述

考虑如下类单输入单输出非线性时变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t), i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) := [x_1(t) \dots x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$ 为控制输入, $y(t) \in \mathbb{R}$ 为系统(1)的输出。系统函数 $f, g: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 在 t 上分段连续,且关于 $x(t)$ 满足局部 Lipschitz 条件。

注 1 需说明的是,许多实际系统的数学模型可转化为系统(1)的形式,如单机械臂系统、压电驱动定位系统、倒立摆系统等^[25]。

假设 1 存在未知的连续函数 $\bar{f}(x(t)), \bar{g}(x(t))$ 和 $\underline{g}(x(t))$, 满足

$$|f(t, x(t))| \leq \bar{f}(x(t)), \quad (2)$$

$$0 < \underline{g}(x(t)) \leq g(t, x(t)) \leq \bar{g}(x(t)). \quad (3)$$

注 2 假设 1 表明本文无需知晓系统函数 $f(t, x(t)), g(t, x(t))$ 及相应的界函数 $\bar{f}(x(t)), \bar{g}(x(t)), \underline{g}(x(t))$ 的解析表达式信息。

本文的控制目标: 对任意初始条件 $x(0) = [x_1(0) \dots x_n(0)]^T$, 设计时变状态反馈控制器 $u(t, x(t))$, 使得状态跟踪误差 $e(t)$ 在预设性能漏斗

$$\mathcal{F}_\varrho := \{(t, e) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n | \varrho(t) \|e\| < 1\} \quad (4)$$

内,且收敛至零点,即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$, 其中 $e(t) = x(t) - \bar{y}_r(t)$, $\bar{y}_r(t) = [y_r(t) \ \dot{y}_r(t) \ \dots \ y_r^{(n-1)}(t)]^T$ 为期望轨迹, $y_r(t) \in \mathcal{W}^{n,\infty}$ 。预设的性能漏斗由漏斗函数 $\varrho(t)$ 决定, $\varrho(t)$ 满足如下性质:

- 1) $\varrho(t): \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 为连续可微函数,且存在正常数 $\underline{\varrho}, \bar{\varrho}$, 使得 $\underline{\varrho} \leq \varrho(t) \leq \bar{\varrho}$;
- 2) $\dot{\varrho}(t)$ 为分段连续函数且有界;
- 3) 存在非负常数 η , 使得 $\dot{\varrho}(t) \leq \eta \varrho(t)$, 即 $\varrho(t) \leq \varrho(0) \exp(\eta t)$ 。

注 3 考虑在预设性能控制方法中广泛使用的性能函数 $\tilde{\rho}(t) = (\tilde{\rho}(0) - \tilde{\rho}(\infty)) \exp(-\eta t) + \tilde{\rho}(\infty)$, 其中 $\tilde{\rho}(0), \tilde{\rho}(\infty)$ 和 η 为正常数。显然, $\tilde{\rho}(t)$ 的倒数满足上述 3 条性质, 故可选漏斗函数 $\varrho(t) = \frac{1}{\tilde{\rho}(t)}$ 。

2.2 预备知识

定义 1^[26] 考虑初值问题

$$\dot{\xi}_r(t) = \zeta_r(t, \xi_r), \xi_r(0) = \xi_r^0 \in \Xi_r, \quad (5)$$

其中: $\zeta_r: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Xi_r \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 t 上分段连续,且关于 ξ_r 满足局部 Lipschitz 条件, $\Xi_r \subset \mathbb{R}^m$ 为非空开子集。若初值问题(5)的解不能向右再延拓,所得到的存在区间称为解的最大存在区间。

引理 1^[26] 对任意 $\xi_r^0 \in \Xi_r$, 初值问题(5)在最大存在区间 $[0, t'_m)$ 上存在唯一解 $\xi_r: [0, t'_m) \rightarrow \Xi_r$, $t'_m \in \mathbb{R}_{>0}$ 。

引理 2^[27] $\xi_r(t)$ 是初值问题(5)在最大存在区间 $[0, t'_m)$ 上的解, $t'_m < +\infty$, 设 Ξ'_r 是 Ξ_r 的紧子集, 则存在 $t_s \in [0, t'_m)$, 使得 $\xi_r(t'_s) \notin \Xi'_r$ 。

引理 3^[28] 对任意 $\delta > 0, \chi \in \mathbb{R}$, 下列不等式成立:

$$0 \leq |\chi| - \frac{\chi^2}{\sqrt{\chi^2 + \delta^2}} < \delta. \quad (6)$$

3 自适应控制设计和稳定性分析

为实现具有预设暂态性能的渐近状态跟踪控制, 本节提出了一种基于障碍李雅普诺夫函数的自适应控制策略。本文的主要结果可总结为如下定理。

定理 1 考虑由系统(1)和自适应控制器

$$u(t) = -\frac{\sigma \hat{\psi}(t) \varphi(t)}{\sqrt{\varphi^2(t) + v^2(t)}}, \quad (7)$$

$$\dot{\hat{\psi}}(t) = \frac{\varsigma \varphi^2(t)}{\sqrt{\varphi^2(t) + v^2(t)}}, \hat{\psi}(0) = \hat{\psi}^0 \geq 0 \quad (8)$$

组成的闭环系统, 其中: $e_0(t) = \frac{\varrho(t)e(t)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}$, $\varphi(t) =$

$\frac{e_0^T(t)PB}{1-e_0^T(t)Pe_0(t)}$, P 为满足 $e_0^T(0)Pe_0(0) < 1$ 的正定矩阵, $\varrho(t)$ 为漏斗函数; $\hat{\psi}(t)$ 为自适应补偿器; σ, ς 为正设计常数; $v(t)$ 为满足 $\int_0^t v(s)ds \leq \bar{v} < \infty, \forall t \geq 0$ 的正定函数, $\bar{v}$ 为正常数. 如果存在 $K = [k_1 \ \dots \ k_n]^T \in \mathbb{R}^n, 0 < P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$(A - BK^T)^T P + P(A - BK^T) + 2\eta P < 0 \quad (9)$$

成立, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

则对任意初始条件 $x(0)$, 闭环系统的所有信号都一致有界, 并且状态跟踪误差在预设性能漏斗 $\mathcal{F}_e$ 内收敛至零点.

证 本证明包括3个部分. 首先, 证明由系统(1)和控制器(7)–(8)构成的闭环系统在最大存在区间 $[0, t_m)$ 上存在唯一解. 其次, 通过反证法证明 $t_m = +\infty$. 最后, 实现本文控制目标.

P₁: 根据式(1), 可推得状态跟踪误差系统为

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B(f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t) - y_r^{(n)}(t)). \quad (10)$$

由式(1)(7)和式(8)构成的闭环系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{e}_0(t) &= \frac{\dot{\varrho}(t)e_0(t)}{\varrho(t)} + \frac{\varrho(t)B}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}(f(t, x(t)) - y_r^{(n)}(t)) + \\ &Ae_0(t) - \frac{\sigma g(t, x(t))\varrho(t)\varphi(t)\hat{\psi}(t)B}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}(\varphi^2(t) + v^2(t))}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\hat{\psi}}(t) = \frac{\varsigma\varphi^2(t)}{\sqrt{\varphi^2(t) + v^2(t)}}. \quad (12)$$

定义向量 $\xi(t) := [e_0^T(t) \ \hat{\psi}(t)]^T$ 及开集 $\Xi := \mathcal{E} \times R$, 其中 $\mathcal{E} = \{e_0(t) | e_0^T(t)Pe_0(t) < 1\}$. 显然, $\xi(0) = [e_0^T(0) \ \hat{\psi}(0)]^T \in \Xi$. 同时, 由于 $y_r(t) \in \mathcal{W}^{n, \infty}$, $\varrho(t)$ 和 $\dot{\varrho}(t)$ 有界且分段连续, 函数 f, g 在 t 上分段连续, 且关于 x 满足局部Lipschitz条件. 根据引理1可知, 闭环系统(11)–(12)在最大存在区间 $[0, t_m)$ 上存在唯一解 $\xi(t) \in \Xi$, 即 $e_0^T(t)Pe_0(t) < 1$ 对所有 $t \in [0, t_m)$ 都成立.

P₂: 本部分将通过反证法证明 $t_m = +\infty$, 不妨假设 $t_m < +\infty$.

考虑如下障碍李雅普诺夫函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1 - e_0^T(t)Pe_0(t)} + \frac{\sigma\omega}{2\varsigma} \tilde{\psi}^2(t), \quad (13)$$

其中: $\tilde{\psi}(t) = \psi - \hat{\psi}(t)$, ω 为未知正常数.

根据式(10), 对 $V(t)$ 进行求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{e_0^T(t)((A - BK^T)^T P + P(A - BK^T))e_0(t)}{2(1 - e_0^T(t)Pe_0(t))} + \\ &\frac{\varrho(t)\dot{\varrho}(t)e^T(t)Pe(t)}{\lambda_{\min}(P)(1 - e_0^T(t)Pe_0(t))} - \frac{\sigma\omega}{\varsigma} \tilde{\psi}(t)\dot{\hat{\psi}}(t) + \\ &\frac{\varrho(t)\varphi(t)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}(f(t, x(t)) - y_r^{(n)}(t) + K^T e(t)) + \\ &\frac{g(t, x(t))\varrho(t)\varphi(t)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}u(t), \quad \forall t \in [0, t_m). \end{aligned} \quad (14)$$

考虑到 $\varrho(t)$ 满足 $\dot{\varrho}(t) \leq \eta\varrho(t)$, 可知

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{e_0^T(t)Qe_0(t)}{2(1 - e_0^T(t)Pe_0(t))} - \frac{\sigma\omega}{\varsigma} \tilde{\psi}(t)\dot{\hat{\psi}}(t) + \\ &\frac{\varrho(t)\varphi(t)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}(f(t, x(t)) - y_r^{(n)}(t) + K^T e(t)) + \\ &\frac{g(t, x(t))\varrho(t)\varphi(t)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}u(t), \quad \forall t \in [0, t_m), \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $Q = -(A - BK^T)^T P - P(A - BK^T) - 2\eta P$.

将式(7)–(8)代入式(15), 并结合假设1, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{e_0^T(t)Qe_0(t)}{2(1 - e_0^T(t)Pe_0(t))} - \\ &\frac{\sigma\omega\varphi^2(t)\tilde{\psi}(t)}{\sqrt{\varphi^2(t) + v^2(t)}} + \vartheta(t)|\varphi(t)| - \\ &\frac{\sigma\gamma(t)\varphi^2(t)\hat{\psi}(t)}{\sqrt{\varphi^2(t) + v^2(t)}}, \quad \forall t \in [0, t_m), \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \frac{\varrho(t)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}(\bar{f}(x(t)) + |y_r^{(n)}(t)| + \|K^T e(t)\|), \\ \gamma(t) &= \frac{g(x(t))\varrho(t)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}. \end{aligned}$$

根据 **P₁** 可知, $e_0^T(t)Pe_0(t) < 1, \forall t \in [0, t_m)$. 同时, $y_r(t) \in \mathcal{W}^{n, \infty}$. 因此, 可推出 $\|e(t)\|$ 和 $\|x(t)\|$ 均有界, $\forall t \in [0, t_m)$. 注意到 $\bar{f}(x(t))$ 和 $\underline{g}(x(t))$ 连续, 运用极值定理, 对所有 $t \in [0, t_m)$, 有

$$0 \leq \vartheta(t) \leq \vartheta_{\max}, \quad 0 < \gamma_{\min} \leq \gamma(t), \quad (17)$$

其中 $\vartheta_{\max}, \gamma_{\min}$ 为未知常数. 进一步, 根据引理1, 对所有 $t \in [0, t_m)$, 易得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{e_0^T(t)Qe_0(t)}{2(1 - e_0^T(t)Pe_0(t))} + \\ &\vartheta_{\max}|\varphi(t)| - \frac{\sigma\omega\psi\varphi^2(t)}{\sqrt{\varphi^2(t) + v^2(t)}} \leq \end{aligned}$$

$$-\frac{e_0^T(t)Qe_0(t)}{2(1-e_0^T(t)Pe_0(t))} + \vartheta_{\max}v(t), \quad (18)$$

其中: $\psi := \frac{\vartheta_{\max}}{\sigma\omega}$, $\omega := \gamma_{\min}$.

对式(18)两边同时进行积分, 可得

$$V(t) + \int_0^t \frac{e_0^T(\tau)Qe_0(\tau)}{2(1-e_0^T(\tau)Pe_0(\tau))} d\tau \leq V(0) + \vartheta_{\max}\bar{v}, \quad \forall t \in [0, t_m]. \quad (19)$$

显见, 若 $Q > 0$, 即式(9)成立, 对所有 $t \in [0, t_m]$, 有

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-e_0^T(t)Pe_0(t)} \leq V(t) \leq \mu, \quad (20)$$

$$\frac{\sigma\omega}{2\varsigma} \tilde{\psi}^2(t) \leq V(t) \leq \mu, \quad (21)$$

其中 $\mu = V(0) + \vartheta_{\max}\bar{v}$.

根据式(20)–(21), 可知, 对所有 $t \in [0, t_m]$,

$$e_0^T(t)Pe_0(t) \leq 1 - \exp(-2\mu) < 1, \quad (22)$$

$$|\hat{\psi}(t)| \leq \tilde{\psi} = \sqrt{\frac{2\varsigma\mu}{\sigma\omega}} + \psi. \quad (23)$$

因此, 存在紧子集 $\Xi' \subset \Xi$, 使得闭环系统在 $[0, t_m]$ 上存在唯一解 $\xi(t) \in \Xi'$. 根据引理 2, 可知 $t_m = +\infty$, 即对所有 $t \in [0, +\infty)$, $e_0^T(t)Pe_0(t) < 1$ 都成立.

P₃: 依据 **P₂** 中的式 (22)–(23) 及 $\underline{\varrho} \leq \varrho(t) \leq \bar{\varrho}$, $y_r(t) \in \mathcal{W}^{n,\infty}$, 其中 $\underline{\varrho}, \bar{\varrho}$ 为正常数, 可知 $\|e_0(t)\|, \hat{\psi}(t), \|e(t)\|$ 和 $u(t)$ 有界, $\forall t \geq 0$. 此外, 由式 (19) 和式 (11), 易知

$$\int_0^t e_0^T(\tau)e_0(\tau)d\tau \leq \frac{2}{\lambda_{\min}(Q)}(V(0) + \vartheta_{\max}\bar{v}) \quad (24)$$

成立, 并且 $\|\dot{e}_0(t)\|$ 有界. 根据 Barbalat 引理, 可推得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e_0(t)\| = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$.

由式(22), 可进一步推出

$$\frac{\varrho^2(t)}{\lambda_{\min}(P)} e^T(t)Pe(t) < 1 \implies \varrho^2(t)e^T(t)e(t) < 1, \quad (25)$$

即状态跟踪误差 $e(t)$ 始终在预设的性能漏斗 $\mathcal{F}_{\varrho}$ 内.

证毕.

注 4 与文献[11–18]提出的渐近输出跟踪结果以及文献[23–24]所提的预设性能渐近跟踪控制方法相比, 本文所设计控制器的显著优点是在缺乏系统函数先验知识的条件下, 不仅可确保渐近状态跟踪, 而且满足状态跟踪误差的预设暂态性能要求.

4 仿真

为验证文中所提控制策略的有效性与通用性, 本节分别对单机械臂系统和倒立摆系统进行仿真实验.

例 1 考虑如下一类单机械臂系统:

$$M\ddot{y}(t) + 0.5mgl \sin y(t) = \nu(t) + d(t), \quad (26)$$

其中: M 为惯性, $y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)$ 分别为角位置、角速度和连杆的角加速度, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, l 和 m 为机械臂的长度和质量, $\nu(t)$ 为机械臂的控制力, $d(t)$ 为外部扰动.

定义 $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$, $u(t) = \nu(t)$, 系统(26)可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = f_r(t, x(t)) + g_r(t, x(t))u(t), \end{cases} \quad (27)$$

其中:

$$f_r(t, x(t)) = -0.5 mgl \sin x_1(t) + d(t),$$

$$g_r(t, x(t)) = \frac{1}{M}.$$

控制目标是设计控制器 $u(t)$ 使得系统状态向量 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ 渐近跟踪期望轨迹 $\bar{y}_r(t) = [\sin t \ \cos t]^T$, 且状态跟踪误差收敛速度不低于 $\exp(-t)$.

本次仿真中, 选取单机械臂的系统参数 $M = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $m = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$, $d(t) = 0.1 \sin t$. 系统的预设性能采用漏斗函数

$$\varrho(t) = \frac{1}{(2 - 0.1) \exp(-t) + 0.1}$$

来描述. 为得到满足条件(9)的正定矩阵 P , 令 $K = [1 \ 1]^T$, $\eta = 1$, 通过 MATLAB LMI 工具箱计算可得

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

控制参数设置为 $\varsigma = 1$, $\sigma = 1$ 和 $v(t) = \frac{1}{t^2 + 0.1}$.

系统(27)和自适应律(8)的初始条件设置为 $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [0.2 \ 1]^T$, $\hat{\psi}(0) = 1$. 仿真结果如图1–3所示. 显然, 在本文所提控制器作用下, 状态跟踪不仅满足预设的性能要求, 且状态跟踪误差收敛至零点.

例 2 考虑如下一类小车倒立摆系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = f_p(t, x(t)) + g_p(t, x(t))u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (28)$$

其中:

$$f_p(t, x(t)) = \frac{9.8 \sin x_1 - \frac{m_d l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m_d}}{l(\frac{4}{3} - \frac{m_d \cos^2 x_1}{m_c + m_d})} + 0.2 \sin t,$$

$$g_p(t, x(t)) = \frac{\cos x_1}{l(\frac{4}{3} - \frac{m_d \cos^2 x_1}{m_c + m_d})},$$

$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别为摆杆的角位置和角速度, $u(t)$ 控制输入; $m_c = 1$ kg, $m_d = 0.1$ kg分别为小车和摆杆的质量, $l = 0.5$ m为摆杆长度的一半. 系统(28)的初始条件设置为 $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [-0.1 \ 0.2]^T$. 控制目标与例1相同.

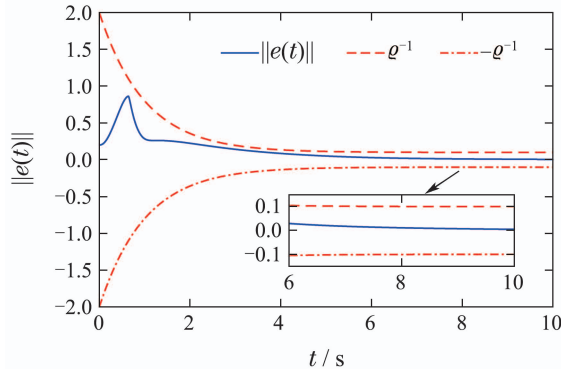


图1 单机器臂的状态跟踪误差 $\|e(t)\|$

Fig. 1 State tracking error $\|e(t)\|$ of single-link robot system

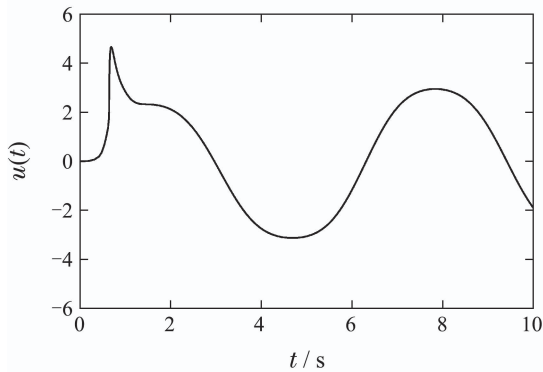


图2 单机器臂的控制信号 $u(t)$

Fig. 2 Control signal $u(t)$ of single-link robot system

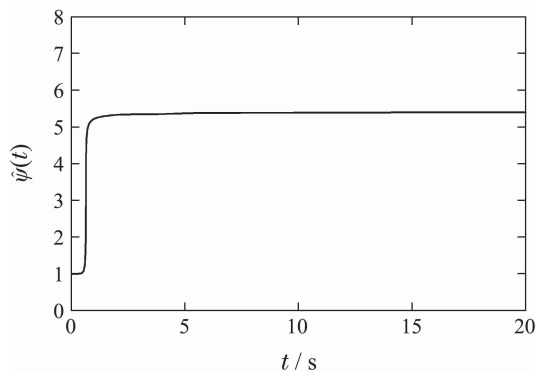


图3 单机器臂的参数估计 $\hat{\psi}(t)$

Fig. 3 Parameter estimate $\hat{\psi}(t)$ of single-link robot system

为验证本文所提控制策略的通用性, 本例采用与例1完全相同的控制参数, 所得仿真结果如图4—6所示.

显见, 在此控制器作用下, 倒立摆系统同时满足了状态跟踪的预设性能与渐近收敛的要求.

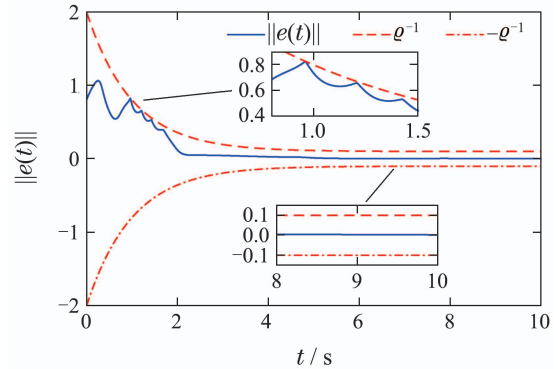


图4 小车倒立摆的状态跟踪误差 $\|e(t)\|$

Fig. 4 State tracking error $\|e(t)\|$ of cart-inverted pendulum system

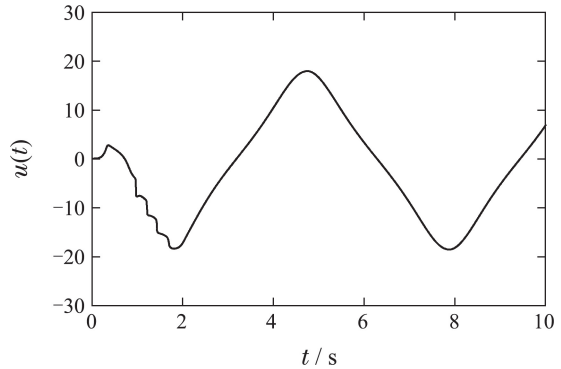


图5 小车倒立摆的控制信号 $u(t)$

Fig. 5 Control signal $u(t)$ of cart-inverted pendulum system

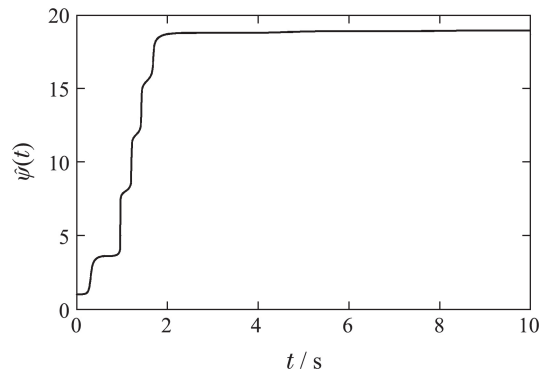


图6 小车倒立摆的参数估计 $\hat{\psi}(t)$

Fig. 6 Parameter estimate $\hat{\psi}(t)$ of cart-inverted pendulum system

5 结论

本文研究了一类不确定非线性时变系统的预设暂态性能渐近状态跟踪控制问题. 通过将漏斗控制技术和障碍李雅普诺夫函数方法结合, 提出了一种新颖的鲁棒自适应状态反馈控制策略. 所设计控制器不仅实现了渐近状态跟踪, 而且保证了其预设的暂态性能. 仿真结果验证了所提控制策略的有效性.

参考文献:

- [1] HA I J, GILBERT E G. Robust tracking in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32(9): 763 – 771.
- [2] CHEN M, GE S S, REN B. Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints. *Automatica*, 2011, 47(3): 452 – 465.
- [3] ILCHMANN A, RYAN E P, SANGWIN C J. Tracking with prescribed transient behaviour. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2002, 7: 471 – 493.
- [4] BECHLIOLIS C P, ROVITHAKIS G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2090 – 2099.
- [5] HOPFE N, ILCHMANN A, RYAN E P. Funnel control with saturation: Nonlinear SISO systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(9): 2177 – 2182.
- [6] LIBERZON D, TRENN S. The bang–bang funnel controller for uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(12): 3126 – 3141.
- [7] BERGER T, HOANG L H, REIS T. Funnel control for nonlinear systems with known strict relative degree. *Automatica*, 2018, 87: 345 – 357.
- [8] BECHLIOLIS C P, ROVITHAKIS G A. A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems. *Automatica*, 2014, 50(4): 1217 – 1226.
- [9] ZHANG J X, YANG G H. Prescribed performance fault-tolerant control of uncertain nonlinear systems with unknown control directions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(12): 6529 – 6535.
- [10] LI F, LIU Y. Prescribed-performance control design for pure-feedback nonlinear systems with most severe uncertainties. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2018, 56(1): 517 – 537.
- [11] CAI Z, QUEIROZ de M S, DAWSON D M. Robust adaptive asymptotic tracking of nonlinear systems with additive disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 524 – 529.
- [12] WANG W, WEN C. Adaptive actuator failure compensation control of uncertain nonlinear systems with guaranteed transient performance. *Automatica*, 2010, 46(12): 2082 – 2091.
- [13] ZHANG Z, XU S, ZHANG B. Asymptotic tracking control of uncertain nonlinear systems with unknown actuator nonlinearity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(5): 1336 – 1341.
- [14] DENG W, YAO J, MA D. Robust adaptive asymptotic tracking control of a class of nonlinear systems with unknown input dead-zone. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352: 5686 – 5707.
- [15] LI Y X, YANG G H. Adaptive asymptotic tracking control of uncertain nonlinear systems with input quantization and actuator faults. *Automatica*, 2016, 72: 177 – 185.
- [16] LAI G, LIU Z, CHEN C L P, et al. Adaptive asymptotic tracking control of uncertain nonlinear system with input quantization. *Systems & Control Letters*, 2016, 96: 23 – 29.
- [17] LIU Y H. Adaptive dynamic surface asymptotic tracking for a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(4): 1233 – 1245.
- [18] LIU Y H. Dynamic surface asymptotic tracking of a class of uncertain nonlinear hysteretic systems using adaptive filters. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(1): 123 – 140.
- [19] CHEN Ming, ZHANG Shiyong. Prescribed performance robust controller design for nonlinear systems based on backstepping. *Control Theory & Applications*, 2015, 30(5): 877 – 881.
(陈明, 张士勇. 基于Backstepping的非线性系统预设性能鲁棒控制器设计. 控制与决策, 2015, 30(5): 877 – 881.)
- [20] LI Xiaobing, ZHAO Siyuan, BU Xiangwei, et al. Prescribed performance control method for non-affine model of hypersonic vehicles. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(10): 1672 – 1681.
(李小兵, 赵思源, 卜祥伟, 等. 高超声速飞行器非仿射模型的预设性能反演控制. 控制理论与应用, 2019, 36(10): 1672 – 1681.)
- [21] DING Chao, SHI Chao, DONG Xinmin, et al. Low-complexity prescribed performance control of high-order uncertain nonlinear system with unknown control directions. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(10): 1622 – 1630.
(丁超, 石超, 董新民, 等. 控制方向未知的高次不确定非线性系统低复杂度预定性能控制. 控制理论与应用, 2019, 36(10): 1622 – 1630.)
- [22] WANG Minlin, DONG Xueming, REN Xuemei, et al. Optimal robust guaranteed cost Funnel control for multi-motor driving system. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(3): 540 – 550.
(王敏林, 董雪明, 任雪梅, 等. 多电机驱动系统的保性能鲁棒Funnel控制. 控制理论与应用, 2020, 37(3): 540 – 550.)
- [23] FAN B, YANG Q, JAGANNATHAN S, et al. Asymptotic tracking controller design for nonlinear systems with guaranteed performance. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(7): 2001 – 2011.
- [24] KANAKIS G S, ROVITHAKIS G A. Guaranteeing global asymptotic stability and prescribed transient and steady state attributes via uniting control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(5): 1956 – 1968.
- [25] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: Wiley, 1995.
- [26] LOGEMANN M, RYAN E P. *Ordinary Differential Equations: Analysis. Qualitative Theory and Control*. London, UK: Springer, 2014.
- [27] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2002.
- [28] ZUO Z, WANG C. Adaptive trajectory tracking control of output constrained multi-rotors systems. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(13): 1163 – 1174.

作者简介:

陈浪雷 硕士研究生, 目前研究方向为自适应控制, E-mail: Lang lei.Chen@outlook.com;

刘勇华 博士, 副教授, 目前研究方向为非线性与自适应控制及在移动机器人中的应用, E-mail: yonghua.liu@outlook.com;

苏春翌 教授, 博士生导师, 目前研究方向为机器人、机电一体化系统及智能材料控制, E-mail: cy.su@gdut.edu.cn.