基于收缩反步的不确定机械臂轨迹跟踪控制

孟宪洋[1,2], 尤海荣[3], 何　平[4†], 张　果[5], 李　恒[5]

(1. 四川轻化工大学 自动化与信息工程学院, 四川 自贡 643000; 2. 人工智能四川省重点实验室, 四川 自贡 643000;

3. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819; 4. 华中农业大学 工学院, 湖北 武汉 430070;

5. 香港理工大学 智能建造实验室, 香港 九龙 999077)

摘要: 针对不确定机械臂系统的轨迹跟踪控制问题, 基于干扰观测器原理, 提出了一种收缩反步控制算法. 首先, 采用非线性观测器对系统的模型不确定项和未知外部干扰部分进行观测. 然后, 使用收缩反步控制求解出控制输入力矩, 从而实现对参考轨迹的精确跟踪, 并分析二阶闭环系统的增量稳定性和Lyapunov方程解的原点指数稳定性. 最后, 将上述所提控制律应用于2-DOF机械臂, 通过收缩反步与滑模控制的对比仿真, 证明其有效性.

关键词: 机械臂; 轨迹跟踪; 收缩理论; 反步法

引用格式: 孟宪洋, 尤海荣, 何平, 等. 基于收缩反步的不确定机械臂轨迹跟踪控制. 控制理论与应用, 2022, 39(5): 906 – 914

DOI: 10.7641/CTA.2021.00937

Trajectory tracking control of uncertain manipulator via contraction backstepping

MENG Xian-yang[1,2], YOU Hai-rong[3], HE Ping[4†], ZHANG Guo[5], LI Heng[5]

(1. College of Automation and Information Engineering, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong Sichuan 643000, China;
2. Artificial Intelligence Key Laboratory of Sichuan Province, Zigong Sichuan 643000, China;
3. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China;
4. College of Engineering, Huazhong Agricultural University, Wuhan Hubei 430070, China;
5. Smart Construction Laboratory, The Hong Kong Polytechnic University, Kowloon Hong Kong 999077, China)

Abstract: A contraction backstepping control for manipulator position tracking is proposed by using disturbance observer. First of all, the model uncertainties and unknown external disturbances are observed by using the nonlinear observer, and the observation error is exponential convergence. Then, control input torque is solved by the contraction backstepping control to achieve accurate tracking of the reference trajectory, and analyze the incremental stability of the second-order closed-loop system and the exponential stability of the origin in term of Lyapunov equation solution. Finally, the above-mentioned control law is applied to the 2-DOF manipulator, and its effectiveness is proved by the comparison simulation of contraction backstepping and sliding mode control.

Key words: manipulator; trajectory tracking; contractive theory; backstepping

Citation: MENG Xianyang, YOU Hairong, HE Ping, et al. Trajectory tracking control of uncertain manipulator via contraction backstepping. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(5): 906 – 914

1 引言

随着机器人技术的发展, 机械臂作为机器人的核心部件, 其应用领域正在迅速拓宽[1]. 如代替人类从事重复且持久(工业流水线)、恶劣且危险(涉及核及化学武器)等性质的任务. 这些任务都需要对期望轨迹进行高精度的轨迹跟踪. 但是, 由于机械臂是一个具有时变、强耦合性质的非线性系统[2], 存在模型不确定、未知外部干扰和测量误差等问题. 因此, 实现不确定

收稿日期: 2020−12−31; 录用日期: 2021−11−17.

†通信作者. E-mail: pinghecn@qq.com.

本文责任编委: 黄攀峰.

国家自然科学基金项目(11705122), 四川省科技计划项目(2020YFH0124), 自贡市重点科技计划项目(2020YGJC01), 四川轻化工大学大学生创新创业训练计划项目(CX2020159)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11705122), the Sichuan Science and Technology Program of China (2020YFH0124), the Zigong Key Science and Technology Project of China (2020YGJC01) and the Undergraduate Innovation and Entrepreneurship Training Program of Sichuan University of Science & Engineering (CX2020159).

机械臂的轨迹跟踪控制非常具有挑战性.

针对机械臂的轨迹跟踪问题, 国内外许多学者进行了大量的研究, 提出了许多有效的方案. 当前主流的控制方法有: 滑模控制法[3]、自适应控制法[4]、模糊控制法[5]、神经网络控制法[6]等. 滑模变结构控制作为常用的控制方案, 对参数变化及匹配不确定性、未知外部干扰和时滞等方面都具有强鲁棒性, 核心是利用尽可能大的切换增益来减少扰动的影响. 但也造成了严重的抖振敏感问题, 从而导致机械臂的磨损. 基于自适应反演非奇异快速末端滑模控制可以很好的解决机械臂的扰动和不确定性问题, 不仅瞬时响应快而且可以有效的减小抖动[7]. 针对机器人的高精度运动控制, 采用样本延迟测量单元来消除机械臂的非线性和不确定性, 非奇异终端滑模自适应无模型控制方法展现出良好的跟踪性能[8]. 此外, 采用延时估计方法对系统模型和外部干扰进行估计, 并把时延估计误差看作外部干扰也能够实现机械臂的轨迹跟踪[9]. 虽然自适应控制法在面对受控系统参数变化时, 可以通过及时的辨识以调整控制规律. 但需要严格的实时性, 否则无法实现轨迹跟踪控制目标. 在无干扰的情况下, 利用自适应反演控制策略, 可以使得机械臂的轨迹跟踪误差是全局渐进一致稳定的[10]. 基于任务空间分布的自适应控制策略对解决电机发热可能引起参数漂移的问题具有良好的效果[11]. 此外, 还可以利用神经网络、模糊逻辑等方法逼近系统的不确定性[12], 并将学习到的结果与常规的控制方法相结合, 从而实现对机械臂的轨迹跟踪. 基于自适应模糊滑模控制策略就是将模糊逻辑与滑模控制相结合来解决具有未知非线性动力学的机械臂轨迹跟踪控制问题[13]. 而基于神经网络的滑模自适应控制方法就是神经网络与自适应滑模控制相结合, 不仅实现了机械臂的轨迹跟踪控制, 而且减弱了滑模引起的抖振问题[14]. 将神经网络模型与终端滑模相结合, 以径向基神经网络来逼近机械臂模型中各个元素, 可以实现无模型控制[15]. 但是, 这些控制方案需要实时在线学习模型的参数信息, 且设计复杂.

近年来, 收缩理论伴随着黎曼几何的发展[16]而提出, 且在非线性控制方面进行了一定的应用[17]. 其中收缩反步控制是以收缩理论为基础引入反步法的一种收缩分析控制方法. JOUFFROY等人首次设计了基于收缩稳定性理论的反步控制器[18]. 此外, 基于收缩分析的状态反馈控制方法可以用来解决不确定参数和外部干扰的全驱动机械系统的跟踪问题[19]. 与滑动面的滑模控制方法相结合, 则可以解决具有不确定性的非线性系统的稳定性问题[20]. 更进一步, 利用收缩理论来研究水下航行器的增量稳定性[21]. 本文从四旋翼无人机的跟踪控制命令中得到启发[22], 将基于连续介质力学和微分几何的收缩理论[23], 即增量稳定收敛分析方案[24]运用到机械臂的轨迹跟踪控制. 相比已有的研究成果, 本文的创新之处在于: 1) 本文设计了非线性干扰观测器, 实现对未知干扰的有效观测; 2) 扩展了收缩反步控制方法的应用范围, 解决了机械臂的轨迹跟踪控制问题. 最后, 在二连杆机械臂上进行对比仿真实验, 不仅证明了本算法具有良好的鲁棒性, 而且具有结构设计简单、计算效率高的优点.

2 收缩理论

考虑以下非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{x}$是系统(1)的n维状态, $\boldsymbol{f}$是非线性向量场且各阶偏导数存在. 此外, 进一步假设系统是光滑的. 收缩理论[23]的概念与微分几何密切相关, 粗略地讲, 就是对状态进行参数化以观察任意两条轨迹距离的变化.

参考文献[25–26], 流形$\mathcal{M}(\boldsymbol{x} \in \mathcal{M})$上的光滑系统(1), 令$\varGamma(a, b) \in \mathcal{M}$表示连接流形中两点的曲线的集合, 如图1所示. 对于满足$\boldsymbol{\gamma}(0) = a$与$\boldsymbol{\gamma}(1) = b$的任意路径曲线$\boldsymbol{\gamma} \in \varGamma(a, b)$满足$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}(s, t), t)$. 在$t$时刻流形$\mathcal{M}$切丛上的虚位移$\delta\boldsymbol{x} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\gamma}(s)}{\partial s} \in \mathcal{T}_{\mathrm{x}}\mathcal{M}$切向量$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{s}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\gamma}(s)}{\partial s}$满足$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathrm{s}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}, t)}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{s}}$. 对流形$\mathcal{M}$上所有曲线上的所有点, 系统(1)的虚拟动力学可定义为$\delta\dot{\boldsymbol{x}} = \delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} \delta\boldsymbol{x}$. 记$\gamma(s)$是测地线, 表示空间中连接两点最短的曲线($s \in [0, 1]$), $\gamma(0)$表示曲线的起点, $\gamma(1)$表示曲线的终点, 对于流形$\mathcal{M}$有距离

$$L = \int_0^1 \sqrt{\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{s}}} \mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{\delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \delta\boldsymbol{x}} \mathrm{d}s,$$

即任意两条轨迹上两点的距离L被定义为沿着连接它们的参数化曲线$\boldsymbol{\gamma}$的路径积分.

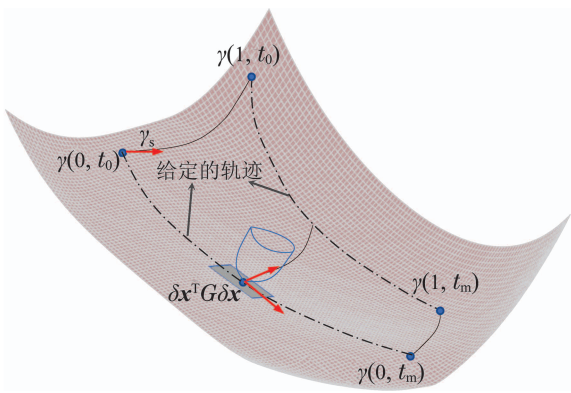

图 1 距离收缩图示

Fig. 1 Distance contraction illustration

引理 1 记$\nu(t) \triangleq \delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \delta\boldsymbol{x}$, 若在区域$R$有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nu(t) = \delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{M} + \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{M}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)\delta\boldsymbol{x} \leqslant -\lambda \delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \delta\boldsymbol{x}.$$

则系统(1)是收缩的, 任意给定两条轨迹上两点的距离L将会指数收敛到零. 这里$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t)$是对称正定矩阵, 也称度量矩阵. λ是正常数, 也称收缩率.

引理 2 考虑如下具有扰动形式的动力系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}},t) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}},\omega,t),$$

其中: ω是外部参数, $\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}},\omega,t)\| \leqslant H$, H是非负常数. 若标称系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$以变换矩阵$\boldsymbol{\Theta}$和收缩率λ收缩[25], 则扰动系统和标称系统之间的距离满足

$$\|\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) - \boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \kappa\|\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(0) - \boldsymbol{x}(0)\|\mathrm{e}^{-\lambda t} + \kappa H/\lambda,$$

其中κ是变换矩阵$\boldsymbol{\Theta}$的条件数的上确界.

3 机械臂动力学模型

考虑图2所示的二连杆机械臂, 其拉格朗日模型为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau},$$

其中: $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$和$\ddot{\boldsymbol{q}}$分别表示关节角位置、角速度、角加速度向量; $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$是正定惯性矩阵; $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$是哥氏力和离心力矩阵; $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$是重力矢量; $\boldsymbol{\tau}$是输入力矩矢量. 假设该系统在建模过程中存在建模误差(或未建模动态)和未知的外部干扰, 则存在不确定项的机械臂动力学模型可以表示为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}},$$

其中:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}}) + \Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}),\\&\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}}) + \Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\\&\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}}) + \Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}).\end{aligned}$$

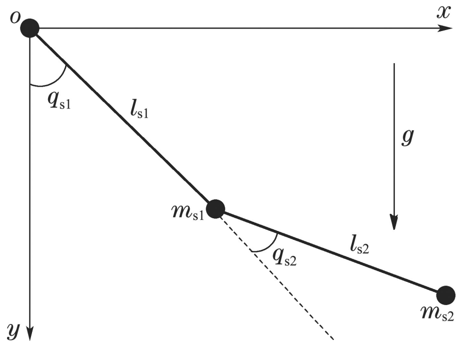

图 2 2-DOF机械臂

Fig. 2 2-DOF robot manipulator

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}})$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}})$和$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}})$是标称系统的模型参数. $\Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}})$, $\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}})$和$\Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}})$均表示模型的不确定部分. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$是库伦和粘性摩擦力及外部扰动. $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$是有界输入干扰. 则系统变为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}})\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}})\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d}_{\mathrm{s}},$$

其中系统总的有界不确定项$\boldsymbol{d}_{\mathrm{s}}$为

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - \Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} - \Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} - \Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}).$$

因此, 不确定二连杆机械臂动力学方程可以表示为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}},\\ \dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}})^{-1}[\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}})\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} - \\ \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}})] + \boldsymbol{d}_{\mathrm{s}}.\end{cases} \tag{2}$$

4 基于干扰观测器的收缩反步法控制设计

机械臂系统控制设计主要目标是使实际角度$\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}}$跟随到期望角度$\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}$. 由于未知干扰信号$\boldsymbol{d}_{\mathrm{s}}$的存在, 在设计控制器时, 首先, 使用干扰观测器对干扰进行观测得到观测信号. 然后, 对机械臂系统采用收缩反步法进行控制设计, 得到最终控制力矩$\boldsymbol{\tau}$, 从而实现对整个系统的控制. 其控制系统结构框图如图3所示.

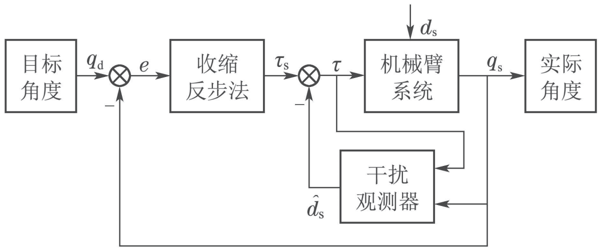

图 3 控制器结构框图

Fig. 3 Block diagram of controller

4.1 扰动观测器设计

假设 1 假设未知干扰$\boldsymbol{d}_{\mathrm{s}}$的时变方程有界, 令其表示为$\dot{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{\varphi}$. 这里$\boldsymbol{\varphi}$是未知的有界函数, 即存在正标量$\varsigma$, 使得$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \leqslant \varsigma$. 常见的摩擦、饱和、平滑周期不确定性因素等不确定性扰动均属于此类情形.

为了实现对有界不确定性干扰的有效观测并增强系统的鲁棒性, 可以设计干扰观测器

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{s}} = -k_{\mathrm{s}}(-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}})^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}})\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} - \\ \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}})) + \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{s}} + k_{\mathrm{s}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}),\\ \hat{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{s}} + k_{\mathrm{s}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}},\end{cases} \tag{3}$$

其中: $k_{\mathrm{s}} > 0$, $\hat{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}}$是$\boldsymbol{d}_{\mathrm{s}}$的估计值, $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{s}}$是中间状态变量. 由观测器(3)进一步可得

$$\dot{\hat{\boldsymbol{d}}}_{\mathrm{s}} = k_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{d}_{\mathrm{s}} - \hat{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}}). \tag{4}$$

定义干扰观测的误差为

$$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{d}_{\mathrm{s}} - \hat{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}}. \tag{5}$$

结合式(4)–(5)和假设1, 观测误差$\tilde{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}}$的导数为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}_{\mathrm{s}} = \dot{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}} - \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{\varphi} - k_{\mathrm{s}}\tilde{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}}. \tag{6}$$

由于假设1界定的扰动项$\boldsymbol{\varphi}$为时变有界的数, 式(6)的虚拟动力学可表示为[1]

$$\delta\dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}_{\mathrm{s}} = \delta\dot{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}} - \delta\dot{\hat{\boldsymbol{d}}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{\varphi} - k_{\mathrm{s}}\delta\tilde{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{s}}. \tag{7}$$

[1]https://zhuanlan.zhihu.com/p/71717022.

令$\dot{\boldsymbol{d}}=-k_{\rm s}\boldsymbol{d}$为式(6)的标称系统, 可以看它是一个收缩系统, 进一步使用引理2可以导出以下边界

$$\|\tilde{\boldsymbol{d}}_{\rm s}(t)-\boldsymbol{d}(t)\|\leqslant\mu_1{\rm e}^{-k_{\rm s}t}+\varsigma/k_{\rm s},\tag{8}$$

其中常数$\mu_1=\|\tilde{\boldsymbol{d}}_{\rm s}(0)-\boldsymbol{d}(0)\|$. 同时, 由于式(6)的标称系统是线性收缩的且期望为零, 即

$$\|\boldsymbol{d}(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{d}(0)\|{\rm e}^{-k_{\rm s}t}.\tag{9}$$

结合式(8)–(9)和绝对值三角不等式, 有

$$\|\tilde{\boldsymbol{d}}_{\rm s}(t)\|\leqslant\mu{\rm e}^{-k_{\rm s}t}+\varsigma/k_{\rm s},\tag{10}$$

其中常数$\mu=\mu_1+\|\boldsymbol{d}(0)\|$.

注 1 对式(10)选择足够大的收缩率$k_{\rm s}$, 稳态估计误差将收敛到原点附近充分小的邻域内. 在慢变扰动($\dot{\boldsymbol{d}}_{\rm s}\approx0$)作用下, $\varsigma=0$. 因此, 当$\lim\limits_{t\to\infty}\|\dot{\boldsymbol{d}}_{\rm s}\|=0$时, 扰动观测器也能够精准估计扰动($\hat{\boldsymbol{d}}_{\rm s}\to\boldsymbol{d}_{\rm s}$).

4.2 控制器设计

基于收缩理论的反步控制的详细设计过程如下:

步骤 1 首先定义跟踪误差$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{q}_{\rm s}-\boldsymbol{q}_{\rm d}$, 辅助变量$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{v}_{\rm s}-\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q}_{\rm s})$, $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q}_{\rm s})=-k_{\rm q}\boldsymbol{e}+\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm d}$ 表示虚拟控制输入. 为使动力学方程(2)的第1个子系统收敛到$\boldsymbol{q}_{\rm d}$, 结合辅助变量$\boldsymbol{z}_1$, 可重写为$\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm s}=\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q}_{\rm s})$. 其虚拟位移可表示为$\delta\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm s}=\delta\boldsymbol{z}_1+\dfrac{\partial\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q}_{\rm s})}{\partial\boldsymbol{q}_{\rm s}}\delta(\boldsymbol{q}_{\rm s})$. 由辅助变量$\boldsymbol{z}_1$和虚拟控制输入$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q}_{\rm s})$的定义知

$$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{v}_{\rm s}+k_{\rm q}\boldsymbol{e}-\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm d}.\tag{11}$$

因此, 沿着系统(2)的第1个子系统和式(11)可知, 跟踪误差的动力学可以化简为

$$\dot{\boldsymbol{e}}=\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm s}-\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm d}=\boldsymbol{v}_{\rm s}-\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm d}=\boldsymbol{z}_1-k_{\rm q}\boldsymbol{e}.\tag{12}$$

步骤 2 对$\boldsymbol{z}_1$求导, 并结合式(2)(12)可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}}_1=&\dot{\boldsymbol{v}}_{\rm s}+k_{\rm q}\dot{\boldsymbol{e}}-\ddot{\boldsymbol{q}}_{\rm d}=\\&\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_{\rm s})^{-1}[\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}_{\rm s},\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm s})\boldsymbol{v}_{\rm s}-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\rm s})]+\\&\boldsymbol{d}_{\rm s}+k_{\rm q}(\boldsymbol{z}_1-k_{\rm q}\boldsymbol{e})-\ddot{\boldsymbol{q}}_{\rm d}.\end{aligned}\tag{13}$$

设计控制律

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}=&\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_{\rm s})(k_{\rm q}^2\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}+k_{\rm q}\boldsymbol{z}_1-k_{\rm v}\boldsymbol{z}_1-\hat{\boldsymbol{d}}_{\rm s}+\\&\ddot{\boldsymbol{q}}_{\rm d})+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}_{\rm s},\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm s})\boldsymbol{v}_{\rm s}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\rm s}),\end{aligned}\tag{14}$$

将控制律(14)引入子系统$\boldsymbol{z}_1$(式(13))有

$$\dot{\boldsymbol{z}}_1=-\boldsymbol{e}+2k_{\rm q}\boldsymbol{z}_1-k_{\rm v}\boldsymbol{z}_1+\tilde{\boldsymbol{d}}_{\rm s}.\tag{15}$$

控制律(14)可使子系统$\boldsymbol{z}_1$(式(13))满足收缩特性, 并与子系统$\boldsymbol{e}$(式(12))构成反馈式联接的二阶闭环系统. 记

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\\boldsymbol{z}_1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}-k_{\rm q}&1\\-1&2k_{\rm q}-k_{\rm v}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

由式(12)和式(15)构成的微分框架的虚拟位移表示为

$$\delta\dot{\boldsymbol{z}}=(\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{I}_2)\delta\boldsymbol{z}+(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_2)\delta\tilde{\boldsymbol{d}}_{\rm s}.\tag{16}$$

5 稳定性分析

定 理 1 记$\boldsymbol{w}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\\tilde{\boldsymbol{d}}_{\rm s}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{J}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}&\boldsymbol{B}\\0,&-k_{\rm s}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}\triangleq[0\ \ 0\ \ 1]^{\rm T}$, 采用干扰观测器(3)的动态输出$\hat{\boldsymbol{d}}_{\rm s}$估计未知干扰$\boldsymbol{d}_{\rm s}$, 将控制律(14)引入二连杆机械臂系统(2)得到由式(7)(16)组成微分框架下的增广系统

$$\delta\dot{\boldsymbol{\omega}}=(\boldsymbol{J}\otimes\boldsymbol{I}_2)\delta\boldsymbol{\omega}+(\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{\varphi},\tag{17}$$

可收缩至球域$\dfrac{2\varsigma}{\varrho}$内.

证 记$(\boldsymbol{J}\otimes\boldsymbol{I}_2)^{\rm T}+(\boldsymbol{J}\otimes\boldsymbol{I}_2)\triangleq\lfloor\boldsymbol{J}\rceil$, 由矩阵分析知, 选择适当的控制器参数$k_{\rm q}$, $k_{\rm v}$和$k_{\rm s}$可使$\lfloor\boldsymbol{J}\rceil$在一定区域内一致严格负定, 即存在常数$\varrho$满足

$$\lfloor\boldsymbol{J}\rceil\leqslant-\varrho\boldsymbol{I}_6.\tag{18}$$

记$\psi(t)\triangleq\sqrt{\delta\boldsymbol{w}^{\rm T}\boldsymbol{M}\delta\boldsymbol{w}}$, 考虑6阶单位矩阵为本文的度量矩阵, 即$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}_6$, 则$\psi(t)=\|\delta\boldsymbol{w}(t)\|$, 沿着增广系统(17)的轨迹有

$$\dot{\psi}(t)=\frac{\delta\boldsymbol{w}^{\rm T}\lfloor\boldsymbol{J}\rceil\delta\boldsymbol{w}+2\delta\boldsymbol{w}^{\rm T}[(\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{\varphi}]}{2\psi(t)}.\tag{19}$$

由Cauchy–Schwarz不等式和$\|\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{I}_2\|_2=1$有

$$\delta\boldsymbol{w}^{\rm T}[(\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{\varphi}]\leqslant\sqrt{\delta\boldsymbol{w}^{\rm T}\delta\boldsymbol{w}}\sqrt{\boldsymbol{\varphi}^{\rm T}\boldsymbol{\varphi}}.\tag{20}$$

综合式(18)(20), 考虑式(19)有

$$\frac{\rm d}{{\rm d}t}\sqrt{\delta\boldsymbol{w}^{\rm T}\delta\boldsymbol{w}}\leqslant-\frac{\varrho}{2}\sqrt{\delta\boldsymbol{w}^{\rm T}\delta\boldsymbol{w}}+\sqrt{\boldsymbol{\varphi}^{\rm T}\boldsymbol{\varphi}}.\tag{21}$$

将$\sqrt{\delta\boldsymbol{w}^{\rm T}\delta\boldsymbol{w}}$看作一个整体, 则由一阶非齐次线性微分方程通解可知, 上述不等式的解满足

$$\|\delta\boldsymbol{w}(t)\|\leqslant{\rm e}^{-\frac{\varrho}{2}(t-t_0)}\|\delta\boldsymbol{w}(t_0)\|+\frac{2}{\varrho}\sup\|\boldsymbol{\varphi}\|.\tag{22}$$

对式(21)进行路径积分有

$$\|\boldsymbol{w}(t)\|\leqslant{\rm e}^{-\frac{\varrho}{2}(t-t_0)}\|\boldsymbol{w}(t_0)\|+\frac{2}{\varrho}\sup\|\boldsymbol{\varphi}\|.\tag{23}$$

由式(18)知$k_{\rm s}$与ϱ正相关, 由假设1知$\sup\|\boldsymbol{\varphi}\|\leqslant\varsigma$.

综上所述, 通过选择足够大的观测增益$k_{\rm s}$, 收缩反步控制律(14)和干扰观测器(3), 可使增广系统(17)的轨迹$\boldsymbol{w}(t)$收缩至区域$\mathcal{O}(\boldsymbol{w}^\star(t),\dfrac{2\varsigma}{\varrho})$的零域内.

证毕.

注 2 此处测地线$\boldsymbol{\gamma}(s)=s(\cdot)+(1-s)(\cdot)^\star$为直线, 对式(21)进行路径积分得到式(23)时, 当指定误差系统的初始轨迹$\boldsymbol{\gamma}(0)=\boldsymbol{w}^\star=0$, 则对于系统实际产生的任意轨迹$\boldsymbol{\gamma}(1)=\boldsymbol{w}$. 故而由以上分析可知: 一旦证明系统收缩即可得出系统轨迹与期望轨迹之间的距离是有界的结论.

引理 3 当且仅当对任意一个正定对称矩阵$\boldsymbol{Q}$, 存在一个正定矩阵$\boldsymbol{P}$满足Lyapunov方程

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\rm T}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q},$$

则矩阵$\boldsymbol{A}$是Hurwitz的. 此外, 如果$\boldsymbol{A}$是Hurwitz矩阵, 则存在唯一正定解$\boldsymbol{P}$[30].

若考虑无扰动估计环境, 那么由式(14)和式(2)组成的系统可表示为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm s}=\boldsymbol{v}_{\rm s},\\ \dot{\boldsymbol{v}}_{\rm s}=k_{\rm q}^2\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}+k_{\rm q}\boldsymbol{z}_1-k_{\rm v}\boldsymbol{z}_1+\ddot{\boldsymbol{q}}_{\rm d}.\end{cases}$$

将跟踪误差$\boldsymbol{e}$和辅助变量$\boldsymbol{z}_1$带入上式并化简整理得

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm s}=\boldsymbol{v}_{\rm s},\\ \dot{\boldsymbol{v}}_{\rm s}=(2k_{\rm q}^2-k_{\rm q}k_{\rm v}-1)\boldsymbol{q}_{\rm s}+(k_{\rm q}-k_{\rm v})\boldsymbol{v}_{\rm s}+\boldsymbol{\varSigma},\end{cases}$$

其中: $\boldsymbol{\varSigma}=(2k_{\rm q}^2-k_{\rm q}k_{\rm v}-1)\boldsymbol{q}_{\rm d}+\ddot{\boldsymbol{q}}_{\rm d}-(k_{\rm q}-k_{\rm v})\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm d}$. 记$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{q}_{\rm s}^{\rm T}\ \ \boldsymbol{v}_{\rm s}^{\rm T}]^{\rm T}$, $\boldsymbol{\varPsi}=[\boldsymbol{0}^{\rm T}\ \ \boldsymbol{\varSigma}^{\rm T}]^{\rm T}$, 其矩阵形式为

$$\dot{\boldsymbol{R}}=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\varPsi},$$

其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2k_{\rm q}^2-k_{\rm v}k_{\rm q}-1, & k_{\rm q}-k_{\rm v}\end{bmatrix}$.

若选取控制器参数$k_{\rm v}=3$, $k_{\rm q}=1$, 有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}. \tag{24}$$

计算特征值$\lambda(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_2)=-1\pm{\rm i}$, 可知矩阵$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_2$是Hurwitz的. 令$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}_4$, 由引理3求得其唯一正定解为$\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{I}_2$, 其中,

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}5/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/8\end{bmatrix}.$$

综上所述, 在无扰动的情况下, 选取适当的参数可使矩阵$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_2$是Hurwitz的, 证明本文所设的收缩反步控制律可使系统稳定.

6 数值仿真

6.1 二连杆机械臂模型参数

为了验证上述所提方法的有效性, 考虑动力学模型如下所示的二连杆机械臂[29]

$$\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\rm s}+\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm s}+\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{\tau},$$

其中:

$$H_{11}=J_{\rm s1}+m_{\rm s2}l_{\rm s1}^2+0.25m_{\rm s2}l_{\rm s2}^2+J_{\rm s2}+ m_{\rm s2}l_{\rm s1}l_{\rm s2}\cos q_{\rm s2},$$

$$H_{12}=0.25m_{\rm s2}l_{\rm s2}^2+J_{\rm s2}+0.5m_{\rm s2}l_{\rm s1}l_{\rm s2}\cos q_{\rm s2},$$

$$H_{21}=0.25m_{\rm s2}l_{\rm s2}^2+J_{\rm s2}+0.5m_{\rm s2}l_{\rm s1}l_{\rm s2}\cos q_{\rm s2},$$

$$H_{22}=0.25m_{\rm s2}l_{\rm s2}^2+J_{\rm s2},$$

$$C_{11}=-0.5m_{\rm s2}l_{\rm s1}l_{\rm s2}\dot{q}_{\rm s2}\sin q_{\rm s2},$$

$$C_{12}=-0.5m_{\rm s2}l_{\rm s1}l_{\rm s2}(\dot{q}_{\rm s1}+\dot{q}_{\rm s2})\sin q_{\rm s2},$$

$$C_{21}=0.5m_{\rm s2}l_{\rm s1}l_{\rm s2}\dot{q}_{\rm s1}\sin q_{\rm s2},$$

$$C_{22}=0,$$

$$g_1=(0.5m_{\rm s1}+m_{\rm s2})l_{\rm s1}{\rm g}\cos q_{\rm s1}+ 0.5m_{\rm s2}l_{\rm s2}{\rm g}\cos(q_{\rm s1}+q_{\rm s2}),$$

$$g_2=0.5m_{\rm s2}l_{\rm s2}\cos(q_{\rm s1}+q_{\rm s2}),$$

其中${\rm g}=9.8\ {\rm m/s^2}$是重力加速度. $J_{\rm s1}$和$J_{\rm s2}$分别表示每个连杆的转动惯量. $m_{\rm s1}$和$m_{\rm s2}$分别表示每个连杆的质量. $l_{\rm s1}$和$l_{\rm s2}$分别是每个连杆的长度. 其动力学参数如表1所示.

表 1 二连杆机械臂的参数

Table 1 Parameters of two-link manipulator

参数	符号	实际值
连杆1质量	$m_{\rm s1}$	1 kg
连杆2质量	$m_{\rm s2}$	1 kg
连杆1长度	$l_{\rm s1}$	1.02 m
连杆2长度	$l_{\rm s2}$	1.12 m
转动惯量	$J_{\rm s1}$	$0.21\ {\rm kg\cdot m^2}$
转动惯量	$J_{\rm s2}$	$1.12\ {\rm kg\cdot m^2}$

6.2 可靠性验证

为了验证本文控制算法的有效性、可行性和可靠性, 不失一般性, 二连杆机械臂的初始状态拟定为$q_0=[0.6\ \ 0.5]^{\rm T}$, $v_0=[0\ \ 0]^{\rm T}$, 二连杆机械臂的期望轨迹分别拟定为$q_{01}=\sin(0.5\pi t)$, $q_{02}=\cos(0.5\pi t)$. 控制器参数为$k_{\rm q}=1$, $k_{\rm v}=3$, 与式(24)相一致.

在传统滑模控制上引入指数趋近律可以有效的减弱抖振问题, 但只要控制中含有符号函数${\rm sgn}(\cdot)$, 抖振现象在控制输出中就不可避免, 利用饱和函数连续变化的特征, 用饱和函数中的双曲正切函数

$$\tanh\boldsymbol{\sigma}=\frac{\exp(\boldsymbol{\sigma})-\exp(-\boldsymbol{\sigma})}{\exp(\boldsymbol{\sigma})+\exp(-\boldsymbol{\sigma})},$$

代替指数趋近律$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=-\varepsilon\boldsymbol{\sigma}^2\,{\rm sgn}\,\boldsymbol{\sigma}-k_1\boldsymbol{\sigma}$中的符号函数, 可以得到输出平滑有界的改进指数趋近滑模控制律[31]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}=\ &\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_{\rm s})(\boldsymbol{\varLambda}\dot{\boldsymbol{e}}+\ddot{\boldsymbol{q}}_{\rm d}+\varepsilon\boldsymbol{\sigma}^2\tanh\boldsymbol{\sigma}+k_1\boldsymbol{\sigma})+\\ &\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}_{\rm s},\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm s})\dot{\boldsymbol{q}}_{\rm s}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\rm s}),\end{aligned} \tag{25}$$

其中: 控制器参数选取为$\boldsymbol{\varLambda}={\rm diag}\{1,1\}$, $\varepsilon=0.8$, $k_1=5$. 跟踪误差被定义为$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{q}_{\rm s}-\boldsymbol{q}_{\rm d}$, 滑模面被设计为$\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{\varLambda}\boldsymbol{e}$. 其实质就是利用饱和特性减弱切换的不连续特性.

通过对本文所提方法(14)和基于指数趋近律的滑模控制策略(25)进行数值仿真, 分别从位置轨迹跟踪、位置轨迹跟踪误差和控制输入等3个方面来进行对比仿真实验, 其仿真结果如图4–9所示.

对比图4和图5的位置轨迹跟踪曲线, 可以看出, 大约在3 s左右时, 二关节机械臂的每个关节位置跟踪到了预定的轨迹曲线. 因此, 本项实验表明, 通过收缩反

步法设计的控制力矩能够有效的实现二连杆机械臂的轨迹跟踪.

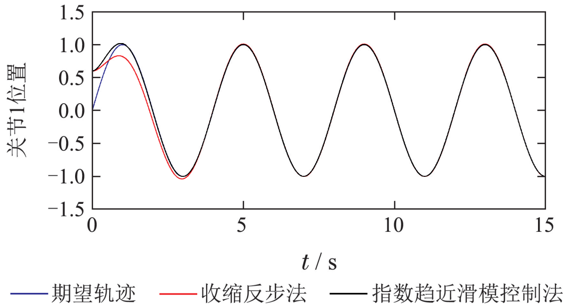

图 4　关节1位置跟踪曲线

Fig. 4　Position tracking curves of joints 1

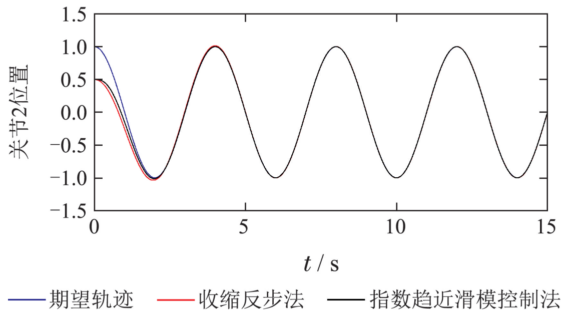

图 5　关节2位置跟踪曲线

Fig. 5　Position tracking curves of joints 2

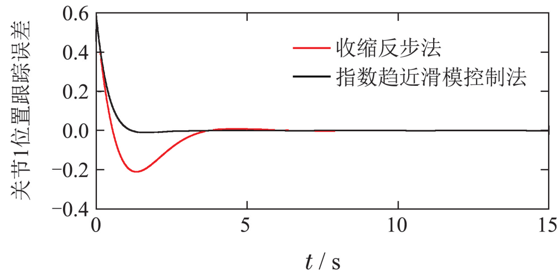

图 6　关节1位置跟踪误差曲线

Fig. 6　Position tracking error curves of joints 1

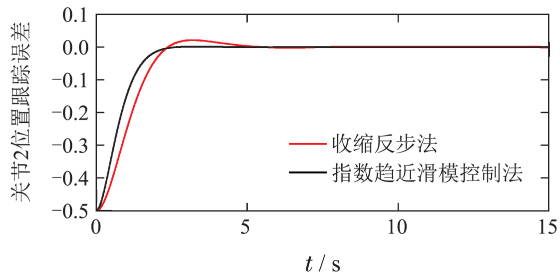

图 7　关节2位置跟踪误差曲线

Fig. 7　Position tracking error curves of joints 2

分析图6和图7所呈现的位置跟踪误差曲线, 调整时间约为5 s. 随后, 位置跟踪误差曲线的波动逐渐平稳并趋向于零. 两种控制策略在稳定误差的调整时间段内没有明显的差异. 因此, 本项实验结果表明在收缩反步法的输入控制力矩的作用下, 可以保持被控对象“稳”、“快”、“准”的特性, 其跟踪误差能够有效的收敛到稳定状态, 使得机械臂能够快速且稳定的跟踪到期望参考轨迹.

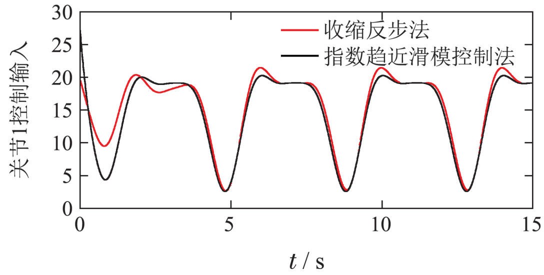

图 8　关节1控制输入

Fig. 8　Control input for joint 1

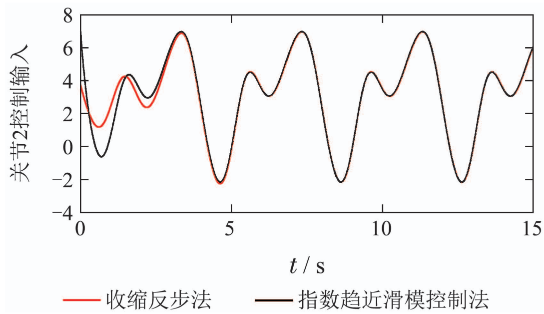

图 9　关节2控制输入

Fig. 9　Control input for joint 2

分析图8和图9, 其为输入力矩的动态响应变化曲线, 其控制力矩是光滑的控制输入曲线, 同时产生周期性的输入现象. 而且从控制力矩中看出基于收缩反步控制策略与用于抑制抖振的改进指数趋近的滑模控制策略相一致, 保证了机械臂系统对期望轨迹的良好的趋近和收敛特性.

从理论角度来看, 一方面, 由于滑动模态需要在工程实践中现场设计, 而系统的滑模运动又与被控制对象的参数变换和外界干扰无关, 另一方面, 滑模变结构控制对具有外界干扰和未建模动态的非线性系统具有很强的鲁棒性. 因此, 滑模变结构控制比较适合机械臂的控制. 然而, 滑模控制作为一种不连续的控制方法, 其控制输出的抖振现象是不可避免的. 而改进后的指数趋近滑模控制方法已经具备良好的趋近特性和收敛特性, 是一种较为成熟的机械臂控制方案. 基于连续介质力学与微分几何的收缩理论, 本文将增量稳定收敛分析方法运用到机械臂的轨迹跟踪控制, 通过与常规且成熟的机械臂控制方案进行实验对比, 充分说明了本算法不仅具有良好的鲁棒性, 而且具备设计机构简单, 计算效率高的优点.

6.3　鲁棒性验证

为了验证本文控制算法的鲁棒性, 在前述相同的初始状态$q_0 = [0.6\ \ 0.5]^{\mathrm{T}}$, $v_0 = [0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$, 和相同的期望轨迹$q_{01}$和$q_{02}$的条件下, 考虑未知的外界干扰为$\boldsymbol{d}_{\mathrm{s}} = [d_{\mathrm{s1}}\ \ d_{\mathrm{s2}}]^{\mathrm{T}} = [-\mathrm{e}^{-t} - \cos t\ \ \ -\mathrm{e}^{-t} + \sin t]^{\mathrm{T}}$, 与　假

设1相一致. 此时控制器参数为$k_{\rm q}=1$, $k_{\rm v}=3$. 干扰观测器参数为$k_{\rm s}=999$.

通过图10和图11的响应曲线可以看出, 当系统中引入非线性干扰观测器后, 系统的输出受干扰的影响进一步减小, 不仅使得机械臂关节角位置跟踪性能有所改善, 而且证明了干扰观测器能很好的观测到未知干扰, 以便于减小干扰对系统的影响.

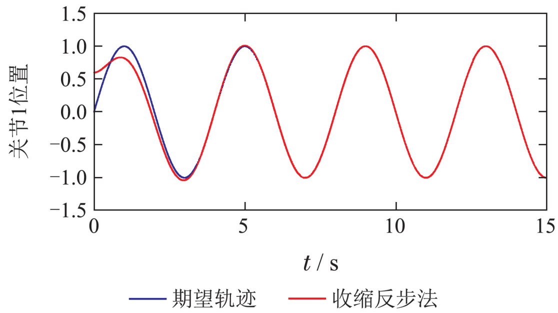

图 10 关节1位置跟踪曲线(含干扰观测器)

Fig. 10 Position tracking curves of joints 1 (disturbance observer)

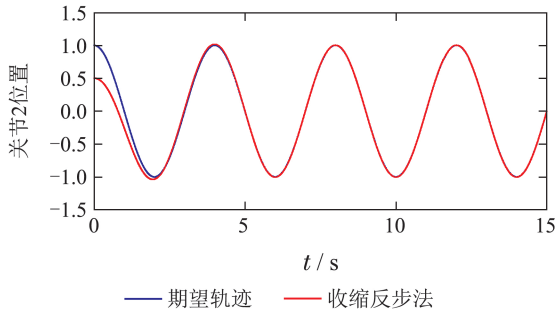

图 11 关节2位置跟踪曲线(含干扰观测器)

Fig. 11 Position tracking curves of joints 2 (disturbance observer)

图12是引入非线性观测器后, 实现对未知有界干扰有效观测后的关节位置跟踪误差曲线. 与图10和图11相对应, 可以看出通过选取足够大的收缩率, 其跟踪误差曲线能收敛到稳定状态.

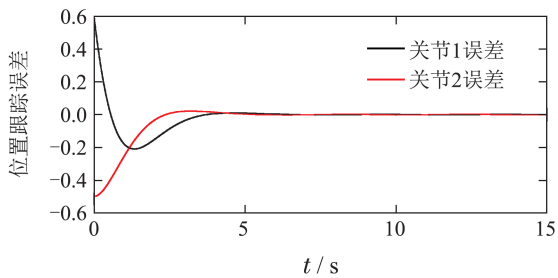

图 12 关节位置跟踪误差曲线

Fig. 12 Position tracking error curves of joints

通过图13的实验结果可以看出, 通过选取足够大的收缩率(如$k_{\rm s}=999$), 干扰观测误差能够收敛到原点附近的小邻域内. 干扰估计误差$\boldsymbol{e}_{\rm d}(t)$的近似值使其误差不超过$10^{-3}$. 因此, 本项实验证明了此非线性观测器能实现对未知干扰的有效观测.

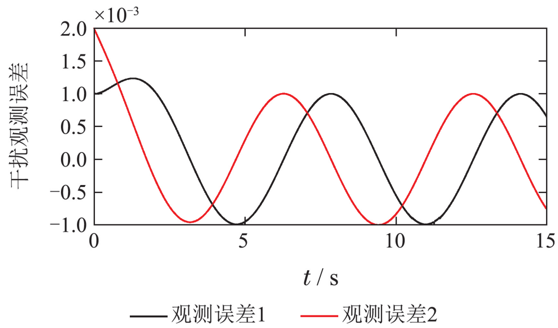

图 13 干扰观测误差曲线

Fig. 13 Disturbance observation error curve

在选取足够大的收缩率(如$k_{\rm s}=999$)情况下, 控制力矩的动态响应如图14所示. 关节1的输入力矩在10单位左右, 关节2的输入力矩在2单位左右. 可以看出, 控制力矩的输入仍然是符合工程实践需求的, 不会引起过负荷现象.

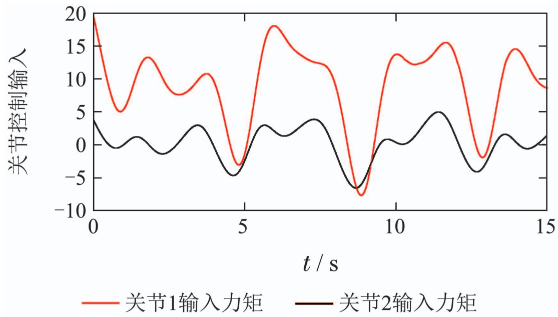

图 14 关节控制输入

Fig. 14 Control input for joint

图15和图16是外界干扰向量$\boldsymbol{d}_{\rm s}$在收缩率参数逐渐增大过程中所对应的干扰观测误差变化曲线. 其中, 观测误差$e_i(i=1,2,3,4)$是依次对应的收缩率参数值分别为$k_{\rm s1}=9$, $k_{\rm s2}=99$, $k_{\rm s3}=599$, $k_{\rm s4}=999$的响应曲线. 且观测误差e_4变化曲线与图13的曲线相对应. 因此, 从上图的实验结果可以看出, 通过选择足够大收缩率$k_{\rm s}$, 系统的稳态估计误差能收敛到原点附近.

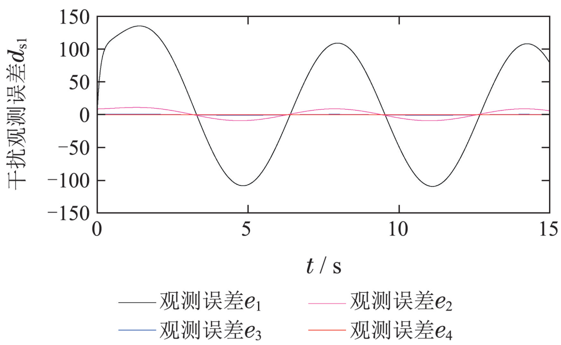

图 15 干扰观测误差$d_{\rm s1}$变化曲线

Fig. 15 Disturbance $d_{\rm s1}$ observation error curve

图17呈现了二轴连杆机械臂在三维空间坐标系下$(t, \boldsymbol{q}_{s1}, \boldsymbol{q}_{s2})$的运动跟踪轨迹. 可以看出, 通过收缩反步控制原理, 二轴连杆机械臂可以在三维空间坐标系下完美的跟踪期望轨迹.

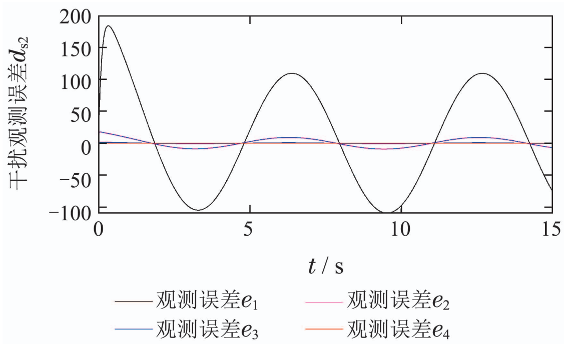

图 16 干扰观测误差d_{s2}变化曲线

Fig. 16 Disturbance d_{s2} observation error curve

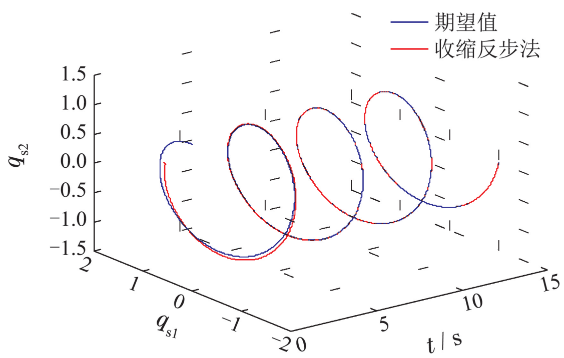

图 17 三维形式轨迹图

Fig. 17 Three-dimensional form of trajectory figure

本文以不确定二连杆机械臂系统为被控制对象, 以收缩理论为核心设计收缩反步控制器, 将有界外部干扰的实际值与估计值误差限定在特性收缩区域内, 验证了在干扰外界干扰的情况下的鲁棒性, 证明了本算法设计结构简单、高效的特性.

7 总结

本文针对一类存在模型不确定、未知外部干扰的机械臂设计了收缩反步跟踪控制器, 该控制器包括收缩理论、反步法和干扰观测器三部分. 通过控制机械臂的关节角度使其跟踪到期望轨迹. 对于二阶反馈联接闭环系统, 以给定轨迹为中心的恒定半径球开始并始终包含在收缩区域中的任何轨迹保持在该球中, 并指数收敛到给定的轨迹. 但由于采用的是反步控制技术, 因此系统受到了严格的反馈形式约束. 后续将继续对增量稳定性进行研究, 扩展其应用范围. 例如, 将相关控制算法与七自由度冗余手术型机器人相结合, 实现远程手术的人机协同控制[32]. 亦或是将相关理论推广到机器人编队[33]和多智能体一致性[34].

参考文献:

[1] XU Zhihao. *Some reserches on trajectory tracking problems of robot manipulators*. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2016.
(徐智浩. 机械臂轨迹跟踪控制若干问题的研究. 南京: 南京理工大学, 2016.)

[2] SU H, YANG C G, FERRIGNO G, et al. Improved human-robot collaborative control of redundant robot for teleoperated minimally invasive surgery. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2019, 4(2): 1447 – 1453.

[3] LIU R J, LI S H. Optimal integral sliding mode control scheme based on pseudospectral method for robotic manipulators. *International Journal of Control*, 2014, 87(6): 1131 – 1140.

[4] ROGELIO L, BROGLIATO B. Adaptive control of robot manipulators with flexible joints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(2): 174 – 181.

[5] KHORASHARDIZADEH S, SADEGHIJALEH M. Adaptive fuzzy tracking control of robot manipulator actuated by permanent magnet synchronous motors. *Computers & Electrical Engineering*, 2018, 72: 100 – 111.

[6] CUONG P V, NAN W Y. Adaptive trajectory tracking neural network control with robust compensator for robot manipulators. *Neural Computing and Applications*, 2016, 27(2): 525 – 536.

[7] VAN M, MAVROVOUNIOTIS M, GE S S. An adaptive backstepping nonsingular fast terminal sliding mode control for robust fault tolerant control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 49(7): 1448 – 1458.

[8] CHOI J, BAEK J, LEE W, et al. Adaptive model-free control with nonsingular terminal sliding-mode for application to robot manipulators. *IEEE Access*, 2020, 8: 169897 – 169907.

[9] HAN Junqing, WU Aiguo, DONG Na. Terminal sliding mode control for robotic manipulator based on sliding mode disturbance observer. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2020, 51(10): 2749 – 2757.
(韩俊庆, 吴爱国, 董娜. 基于滑模干扰观测器的机械臂终端滑模控制. 中南大学学报(自然科学版), 2020, 51(10): 2749 – 2757.)

[10] HU Q L, XU L, ZHANG A. Adaptive backstepping trajectory tracking control of robot manipulator. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(3): 1087 – 1105.

[11] YANG Liang, CHEN Yong, LIU Zhi. Adaptive trajectory tracking control for manipulator with uncertain dynamics and kinematics. *Control and Decision*, 2019, 34(11): 2485 – 2490.
(杨亮, 陈勇, 刘治. 基于参数不确定机械臂系统的自适应轨迹跟踪控制. 控制与决策, 2019, 34(11): 2485 – 2490.)

[12] SU H, QI W, HU Y B, et al. An incremental learning framework for human-like redundancy optimization of anthropomorphic manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2020, DOI: 10.1109/TII.2020.3036693.

[13] SUN F C, SUN Z Q, FENG G. An adaptive fuzzy controller based on sliding mode for robot manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 1999, 29(5): 661 – 667.

[14] SUN T R, PEI H L, PAN Y P, et al. Neural network-based sliding mode adaptive control for robot manipulators. *Neurocomputing*, 2011, 74(14/15): 2377 – 2384.

[15] TRAN M D, KANG H J. Adaptive terminal sliding mode control of uncertain robotic manipulators based on local approximation of a dynamic system. *Neurocomputing*, 2017, 228: 231 – 240.

[16] LOHMILLER W, SLOTINE J J E. On contraction analysis for nonlinear systems. *Automatica*, 1998, 34(6): 683 – 696.

[17] PHAM Q C, TABAREAU N, SLOTINE J J. A contraction theory approach to stochastic incremental stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(4): 816 – 820.

[18] JOUFFROY J, LOTTIN J. Integrator backstepping using contraction theory: A brief methodological note. *IFAC Proceeding Volumes*, 2002, 35(1): 471 – 475.

[19] ZHANG G, HE P, LI H, et al. An incremental feedback control for uncertain mechanical system. *IEEE Access*, 2020, 8(1): 20725 – 20734.

[20] ZHANG G, HE P, LI H, et al. Sliding mode control: An incremental perspective. *IEEE Access*, 2020, 8(1): 20108 – 20117.

[21] MOHAMED M, SU R. Contraction based tracking control of autonomous underwater vehicle. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, 50(1): 2665 – 2670.

[22] ZHANG Guo, LU Tianxiu, CAO Lijia, et al. Adaptive contraction backstepping control applied to quad-rotor aircraft. *Electronics Optics & Control*, 2020, 27(1): 26 – 31, 41.
(张果, 卢天秀, 曹立佳, 等. 四旋翼飞行器自适应收缩反步控制. 电光与控制, 2020, 27(1): 26 – 31, 41.)

[23] JOUFFROY J, FOSSEN T I. A tutorial on incremental stability analysis using contraction theory. *Modeling, Identification and Control*, 2010, 31(3): 93 – 106.

[24] RAYGUAU M M, KAR I N. Contraction theory approach to disturbance observer based filtered backstepping design. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 2019, 141(8): 084501.

[25] VECCHIO D D, SLOTINE J J E. A contraction theory approach to singularly perturbed systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(3): 752 – 757.

[26] FULVIO F, SEPULCHRE R. A differential Lyapunov framework for contraction analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 59(3): 614 – 628.

[27] SLOTINE J E, LOHMILLER W. Control system design for mechanical systems using contraction theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(5): 984 – 989.

[28] MANCHESTER I R, SLOTINE J E. Output-feedback control of nonlinear systems using control contraction metrics and convex optimization, *The 4th Australian Control Conference*, 2014, DOI: 10.1109/AUCC.2014.7358692.

[29] CHEN Liangliang, LI Chuanjiang, SUN Yanchao. Distributed chattering reduction finite-time containment control for multiple euler-lagrange systems. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2018, 50(10): 49 – 56.
(陈亮亮, 李传江, 孙延超. 多Euler-Lagrange系统抑制抖振分布式有限时间包含控制. 哈尔滨工业大学学报, 2018, 50(10): 49 – 56.)

[30] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. Third Edition. New York, USA: Prenice Hall, 2002.

[31] XI Leiping, HE Hui, DONG Hairui. Method of chattering elimination in sliding mode tracking control of robotic manipulators. *Computer Simulation*, 2012, 29(5): 188 – 191.
(席雷平, 何辉, 董海瑞. 机械臂轨迹跟踪滑模控制中的抖振抑制法研究. 计算机仿真, 2012, 29(5): 188 – 191.)

[32] SU H, MARIANI A, OVUR S E, et al. Toward teaching by demonstration for robot-assisted minimally invasive surgery. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2021, DOI: 10.1109/TASE.2020.3045655.

[33] MENG X, HE P, XIONG X, et al. Distributed consensus algorithm for nonholonomic wheeled mobile robot. *Security and Communication Networks*, 2021, 2021: 7617819.

[34] LI C, LIU G, HE P, et al. Dynamic consensus of second-order networked multi-agent systems with switching topology and time-varying delays. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, DOI: 10.1109/TCYB.2021.3079717.

作者简介:

孟宪洋 硕士研究生, 主要研究领域为机器人、非线性系统控制, E-mail: 1536572533@qq.com;

尤海荣 硕士研究生, 主要研究领域为模式识别及图像处理, E-mail: 1576446905@qq.com;

何　平 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为机器人及自动化, E-mail: pinghecn@qq.com;

张　果 博士, 主要研究领域为控制理论、机器人控制, E-mail: guozhang@polyu.edu.hk;

李　恒 博士, 讲席教授, 主要研究领域为机器人控制、结构工程, E-mail: heng.li@polyu.edu.hk.