

具有时滞脉冲的线性随机时滞系统的均方指数稳定

崔 瑶, 程 培[†], 蔡 婷

(安徽大学 数学科学学院, 安徽 合肥 230601)

摘要: 本文研究了具有时滞脉冲的线性随机时滞系统的稳定性问题, 基于Lyapunov函数和Razumikhin技巧, 针对具有镇定型脉冲和反镇定型脉冲的线性随机时滞系统分别建立了系统均方指数稳定的充分条件, 最后给出两个数值例子论证结果的有效性.

关键词: 随机时滞系统; 滞后脉冲; Lyapunov函数; Razumikhin技巧; 均方指数稳定

引用格式: 崔瑶, 程培, 蔡婷. 具有时滞脉冲的线性随机时滞系统的均方指数稳定. 控制理论与应用, 2022, 39(1): 83–90

DOI: 10.7641/CTA.2021.10031

Mean square exponential stability of linear stochastic delay systems with delayed impulses

CUI Yao, CHENG Pei[†], CAI Ting

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei Anhui 230601, China)

Abstract: This paper investigates the stability of linear stochastic systems with delayed impulses. Based on the Lyapunov function and Razumikhin technique, some sufficient conditions for the mean square exponential stability of linear stochastic delay systems with stabilizing impulses or destabilizing impulses are established respectively. Finally, two numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the results.

Key words: stochastic delay systems; delayed impulses; Lyapunov function; Razumikhin technique; mean square exponential stability

Citation: CUI Yao, CHENG Pei, CAI Ting. Mean square exponential stability of linear stochastic delay systems with delayed impulses. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(1): 83–90

1 引言

在现实世界的不同领域, 如力学、电子、电信、金融市场等都存在脉冲现象^[1–3]. 作为一类特殊的混杂系统, 脉冲系统在理论研究和实际应用中的重要性得到了越来越多的关注, 尤其是时滞脉冲系统. 近年来, 对于时滞脉冲系统稳定性的研究有了很大的进展, 用于研究时滞系统稳定性的Razumikhin技巧也被推广到脉冲时滞系统中^[4–8]. 众所周知, 随机噪声广泛存在于实际系统中, 如电力系统、经济决策、生物医药等诸多领域^[9]. 因此, 对于同时带有随机噪声和脉冲作用的脉冲随机系统的研究具有重要的理论和现实意义, 其中, 关于脉冲随机系统稳定性的研究成果可参考文献[10–17].

在以上文献中, 都假设系统脉冲时刻的状态与时

滞无关. 然而, 实际系统中脉冲时刻的状态往往依赖于时滞, 例如, 在自动控制装置中, 从输入信号到反馈信号必定相隔一段时间. 事实上, 有些学者已经开始这方面的研究了, 如Khadral等研究了线性时滞脉冲系统的时滞脉冲一致性问题^[18]; Chen和Zheng研究了带有时滞脉冲的非线性时滞脉冲系统的指数稳定性^[19]; 利用Lyapunov函数法和Razumikhin技巧, Chen等人研究了带有时滞脉冲的非线性时滞系统的 L_p 稳定^[20]; 文献[21–23]则研究了带有时滞脉冲的随机泛函微分系统的指数稳定, 其中, 系统脉冲部分的方程设定为

$$x(t_k) = g_k(x(t_k^-), x(t_k - \tau_k)^-), \quad k = 1, 2, \dots$$

若是将它们的系统退化到线性系统, 此时脉冲部分的方程可设定成

$$x(t_k) = C_k x(t_k^-) + D_k x((t_k - \tau_k)^-), \quad k = 1, 2, \dots$$

收稿日期: 2021–01–09; 录用日期: 2021–05–31.

[†]通信作者. E-mail: chengpei_pi@163.com; Tel.: +86 18297999819.

本文责任编辑: 刘淑君.

国家自然科学基金项目(11771001), 安徽省高校自然科学研究重点项目(KJ2020A0121)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11771001) and the Key Natural Science Research Project of Universities in Anhui Province (KJ2020A0121).

但在考虑脉冲镇定问题时,文献[20–22]都要求脉冲部分满足 $\sup_k(|C_k| + |D_k|) < 1$.实际上,当 $\sup_k(|C_k| + |D_k|) > 1$ 时,脉冲也可以起镇定作用,见文献[16–18]中关于不带随机噪声的脉冲系统的研究.

受文献[18–20]的启发,本文研究带有时滞脉冲的线性随机时滞系统的均方指数稳定,分别考虑了镇定型脉冲和反镇定型脉冲对系统均方指数稳定的影响,利用Lyapunov函数法和Razumikhin技巧建立了系统均方指数稳定的充分条件.本文的研究结果表明,满足 $\sup_k(|C_k| + |D_k|) > 1$ 的脉冲也可以镇定随机时滞系统.

2 准备知识

在本文中令 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 表示完备概率空间, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 为一满足通常条件的 σ 代数流, $\omega(t)$ 表示定义在概率空间上的一维布朗运动. $\mathbb{N}$ 表示正整数集, 即 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{R}_+$ 为非负实数全体, $\mathbb{R}^n$ 为 n 维实向量空间, $\mathbb{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 维的实矩阵全体. 若 A 是一个矩阵, 令 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示其最大和最小特征值, A^T 表示它的转置, $*$ 表示矩阵中由对称性得到的元素, $A > 0$ 表示 A 为正定矩阵, $A < 0$ (≤ 0)表示 A 是负定(半负定)矩阵, $\|\cdot\|$ 表示向量的欧氏范数, $\|\cdot\|$ 为矩阵的谱范数, $E\{\cdot\}$ 是期望算子, I 为适当维数的单位矩阵.

对于 $\tau > 0$, $PC([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) = \{\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \varphi(s) \text{ 在 } [-\tau, 0] \text{ 上除至多有限个点 } s \text{ 以外连续, 在 } s \text{ 处右连续且左极限存在}\}$, 其范数定义为

$$\|\varphi\|_\tau = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi(s)|,$$

$PC_{\mathcal{F}_{t_0}}^b([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ 表示所有有界 $\mathcal{F}_{t_0}$ 可测 $PC([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ 值的随机变量构成的空间.

考虑下述线性脉冲随机时滞系统:

$$\begin{cases} dx(t) = [A_1 x(t) + A_2 x(t - \tau)]dt + \\ \quad [B_1 x(t) + B_2 x(t - \tau)]d\omega(t), \\ \quad t \neq t_k, t \geq 0, \\ x(t_k) = C_k x(t_k^-) + D_k x((t_k - \tau)^-), k \in \mathbb{N}, \\ x(s) = \xi(s), s \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $A_1, A_2, B_1, B_2, C_k, D_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是满足 $t_k < t_{k+1}$ 及 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ 的脉冲时间序列, τ 是常数时滞. 系统在 t_k 处的解 $x(t_k)$ 存在且右连续左极限存在^[3]. 初始值 $\xi(s) \in PC_{\mathcal{F}_0}^b([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$.

记 $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上所有非负函数 $V(x)$ 的全体, 其中 $V(x)$ 关于 x 二次连续可微.

对于任意 $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$, 定义算子 $\mathcal{L}V : \mathbb{R}^n \times$

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}V(x, y) = V_x(x)f(x, y) + \frac{1}{2} \text{trace}[g^T(x, y)V_{xx}(x)g(x, y)],$$

其中: $f(x, y) = A_1 x + A_2 y$, $g(x, y) = B_1 x + B_2 y$.

定义 1^[9] 对于系统(1), 若存在常数 $\lambda > 0$ 和 $M > 1$ 使得对于任意初始值 $\xi \in PC_{\mathcal{F}_0}^b([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, 有

$$E|x(t)|^2 \leq M e^{-\lambda(t-t_0)} E\|\xi\|_\tau^2, t \geq 0,$$

则称系统(1)均方指数稳定.

对于给定的 $\beta > 0$, 记 $\varrho_{\min}(\beta)$ 和 $\varrho_{\max}(\beta)$ 分别表示满足 $\inf_{k \in \mathbb{N}}\{t_k - t_{k-1}\} \geq \beta$ 和 $\sup_{k \in \mathbb{N}}\{t_k - t_{k-1}\} \leq \beta$ 的脉冲时间序列.

3 主要结果

定理 1 对于系统(1), 若脉冲时间序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \varrho_{\min}(\beta_0)$, 且存在常数 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 \geq 1$, $q > 1$, 以及对称正定矩阵 P , 使得下列不等式成立:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ * & \varphi_{22} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (2)$$

$$H = \begin{bmatrix} C_k^T P C_k - \mu_1 P & C_k^T P D_k \\ * & D_k^T P D_k - \mu_2 P \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 q < 0, \quad (4)$$

$$\mu_1 + \mu_2 e^{-\alpha \tau} < q < e^{-\alpha \beta_0}, \quad (5)$$

其中:

$$\varphi_{11} = P A_1 + A_1^T P + B_1^T P B_1 - \alpha_1 P,$$

$$\varphi_{12} = P A_2 + B_1^T P B_2,$$

$$\varphi_{22} = B_2^T P B_2 - \alpha_2 P,$$

则系统(1)均方指数稳定.

证 记 $\zeta(t) = (x(t), x(t - \tau))^T$, 定义Lyapunov函数 $V(x) = x^T P x$, $x \in \mathbb{R}^n$. 对任意 $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k \in \mathbb{N}$. 由系统(1)的第1个方程及式(2)可知

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x(t), x(t - \tau)) &= \\ 2x^T(t)P[A_1 x(t) + A_2 x(t - \tau)] &+ \\ [B_1 x(t) + B_2 x(t - \tau)]^T P[B_1 x(t) + B_2 x(t - \tau)] &= \\ \zeta^T \Phi \zeta + \alpha_1 x^T(t)P x(t) + \alpha_2 x^T(t - \tau)P x(t - \tau) &\leq \\ \alpha_1 V(x(t)) + \alpha_2 V(x(t - \tau)). \end{aligned} \quad (6)$$

从而当 $EV(x(t + \theta)) \leq q EV(x(t))$, $\theta \in [-\tau, 0]$ 时,

$$E\mathcal{L}V(x(t), x(t - \tau)) \leq \alpha EV(x(t)). \quad (7)$$

由式(5)知, 存在足够小的 $\lambda \in (0, \min\{-\alpha, \frac{\ln q}{\tau}\})$, 使

得

$$e^{\lambda\tau}(\mu_1 + \mu_2 e^{-\alpha\tau}) < q < e^{-(\alpha+\lambda)\beta_0}. \quad (8)$$

定义函数

$$W(t) = e^{\lambda t} V(x(t)), \quad t \geq -\tau.$$

对 $t \in [t_{k-1}, t_k)$, 可以取 $\Delta t > 0$ 足够小使得 $t + \Delta t \in (t_{k-1}, t_k)$, 由 Dynkin's 公式^[9]可得

$$\begin{aligned} EW(t + \Delta t) - EW(t) &= \\ \int_t^{t+\Delta t} E\mathcal{L}W(s, x(s), x(s-\tau))ds, \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W(s, x(s), x(s-\tau)) &= \\ e^{\lambda s}[\lambda V(x(s)) + \mathcal{L}V(x(s), x(s-\tau))], \end{aligned}$$

进而可得

$$D^+EW(t) = E\mathcal{L}W(t, x(t), x(t-\tau)), \quad (9)$$

其中

$$D^+EW(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{EW(t+h) - EW(t)}{h}.$$

给定初始值 $\xi \in PC_{\mathcal{F}_0}^b([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, 显然有

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \in [-\tau, 0], \quad (10)$$

其中 $c_2 = \lambda_{\max}(P)$.

接下来, 本文证明

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

首先证明

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \in [0, t_1]. \quad (12)$$

若式(12)不成立, 那么一定存在 $t^* \in (0, t_1)$ 使得

$$EW(t^*) > c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad D^+EW(t^*) \geq 0,$$

且对于任意 $s \in [-\tau, t^*)$, 有 $EW(s) < EW(t^*)$. 从而对 $\forall \theta \in [-\tau, 0]$, 有

$$\begin{aligned} EV(x(t^* + \theta)) &= e^{-\lambda(t^* + \theta)} EW(t^* + \theta) \leq \\ e^{-\lambda(t^* + \theta)} EW(t^*) &\leq \\ qEV(t^*), \end{aligned} \quad (13)$$

进而由式(7)(9)以及 Dynkin's 公式可得

$$\begin{aligned} D^+EW(t^*) &= E\mathcal{L}W(t^*, x(t^*), x(t^* - \tau)) \leq \\ (\lambda + \alpha)e^{\lambda t^*} EV(x(t^*)) &< 0, \end{aligned} \quad (14)$$

这与 $D^+EW(t^*) \geq 0$ 矛盾, 因此式(12)成立.

假设对于 $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$, 有下式成立

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \in [-\tau, t_m]. \quad (15)$$

本文将证明

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \in [t_m, t_{m+1}). \quad (16)$$

首先证明, 对 $\forall \theta \in [-\tau, 0)$, 有

$$EW(t_m^- + \theta) \leq \frac{e^{-(\alpha+\lambda)\tau}}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad (17)$$

其中 $\sigma = qe^{-\lambda\tau} > 1$.

反证法, 假设式(17)不成立, 则存在 $\theta_0 \in [-\tau, 0)$, 使得

$$EW(t_m^- + \theta_0) > \frac{e^{-(\alpha+\lambda)\tau}}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \quad (18)$$

不失一般性, 设 $t_m + \theta_0 \in (t_{l-1}, t_l]$, $l \in \mathbb{N}, l \leq m$. 下面本文将分两种情形考虑.

情形 1 对 $\forall t \in [t_{l-1}, t_m + \theta_0)$,

$$EW(t) > \frac{e^{-(\alpha+\lambda)\tau}}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \quad (19)$$

由式(15)可得, 对于 $t \in [t_{l-1}, t_m + \theta_0)$ 及 $\theta \in [-\tau, 0]$, 有

$$\begin{aligned} EW(t + \theta) &\leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2 < e^{-(\lambda+\alpha)\tau} c_2 E\|\xi\|_\tau^2 < \\ \sigma EW(t). \end{aligned} \quad (20)$$

这隐含

$$EV(t + \theta) \leq \sigma e^{\lambda\tau} EV(x(t)) = qEV(x(t)). \quad (21)$$

因此由式(7)及 Dynkin's 公式可得

$$\begin{aligned} EW(t_m^- + \theta_0) &= \\ EW(t_{l-1}) + \int_{t_{l-1}}^{t_m + \theta_0} E\mathcal{L}W(s, x(s), x(s-\tau))ds &\leq \\ EW(t_{l-1}) + \int_{t_{l-1}}^{t_m + \theta_0} (\lambda + \alpha)EW(s)ds, \end{aligned} \quad (22)$$

进而由 Gronwall 不等式、式(8)以及式(15)有

$$\begin{aligned} EW(t_m^- + \theta_0) &\leq \\ EW(t_{l-1})e^{(\lambda+\alpha)(t_m + \theta_0 - t_{l-1})} &\leq \\ \frac{e^{-(\lambda+\alpha)\tau}}{q^{m-l+1}} c_2 E\|\xi\|_\tau^2 &< \frac{e^{-(\lambda+\alpha)\tau}}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \end{aligned} \quad (23)$$

这与假设式(18)矛盾.

情形 2 存在 $t \in [t_{l-1}, t_m + \theta_0)$, 使得

$$EW(t) \leq \frac{e^{-(\alpha+\lambda)\tau}}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \quad (24)$$

令

$$\bar{t} = \sup\{t \in [t_{l-1}, t_m + \theta_0] : EW(t) \leq \frac{e^{-(\alpha+\lambda)\tau}}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2\},$$

由 $EW(t)$ 在 $[t_{l-1}, t_m + \theta_0)$ 内的连续性有

$$EW(\bar{t}) = \frac{e^{-(\alpha+\lambda)\tau}}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad (25)$$

且对于 $\forall t \in (\bar{t}, t_m + \theta_0)$,

$$EW(t) > \frac{e^{-(\alpha+\lambda)\tau}}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \quad (26)$$

因此对于 $t \in [\bar{t}, t_m + \theta_0)$, 由式(15)(24)知

$$EW(t + \theta) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2 < e^{-(\lambda+\alpha)\tau} c_2 E\|\xi\|_\tau^2 <$$

$$\sigma EW(t), \theta \in [-\tau, 0]. \quad (27)$$

从而类似于式(21)的证明有

$$EW(t_m^- + \theta_0) \leq EW(\bar{t})e^{(\lambda+\alpha)(t_m+\theta_0-\bar{t})} < \frac{e^{-(\lambda+\alpha)\tau}}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \quad (28)$$

这与假设式(18)矛盾.

综上所述可知式(17)成立. 同理可证

$$EW(t_m^-) \leq \frac{1}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \quad (29)$$

由式(3)(8)(17)以及式(29)可得

$$\begin{aligned} EW(t_m) &= e^{\lambda t_m} EV(x(t_m)) = \\ &e^{\lambda \tau} \zeta(t_m^-)^T H \zeta(t_m^-) + \mu_1 W(t_m^-) + \\ &\mu_2 e^{\lambda \tau} W((t_m - \tau)^-) \leq \\ &\frac{\mu_1 + \mu_2 e^{-\alpha \tau}}{\sigma} c_2 E\|\xi\|_\tau^2 \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \end{aligned} \quad (30)$$

因此利用式(15)(29), 类似于式(12)的证明可证式(16)成立, 从而由数学归纳法可知式(11)成立, 进而可得

$$E|x(t)|^2 \leq \frac{c_2}{c_1} E\|\xi\|_\tau^2 e^{-\lambda t}, t \geq 0,$$

其中 $c_1 = \lambda_{\min}(P)$. 所以系统(1)均方指数稳定.

证毕.

注1 类似文献[19]的条件(H_2), 本文定理1的证明中式(7)为Razumikhin型条件, 其中 $\alpha < 0$ 说明系统中的连续动态稳定, 而 $\mu_1 + \mu_2 \geq 1$ 表示脉冲可能破坏系统的稳定性. 所以不稳定脉冲发生次数不能太频繁, 因此设定 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \varrho_{\min}(\beta_0)$. 下面的定理2将考虑系统中连续动态可能不稳定, 而脉冲起镇定作用的情形.

定理2 对于系统(1), 若脉冲时间序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \varrho_{\min}(\beta_0) \cap \varrho_{\max}(\beta_1)$, 且存在常数 $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_1 + \mu_2 < 1, q > 1$, 以及对称正定矩阵 P 使得定理1中的不等式(2)–(3)以及下列不等式成立:

$$e^{\alpha \beta_1} < \min\{q, (\mu_1 + \mu_2)^{-1}\}, \quad (31)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 q > 0, \quad (32)$$

则系统(1)均方指数稳定.

证 记 $\zeta(t) = (x(t), x(t - \tau))^T$, 定义Lyapunov函数 $V(x) = x^T P x, x \in \mathbb{R}^n$. 由不等式(2)以及定理1中式(7)证明知, 对 $\forall t \in [t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{N}$, 当

$$EV(x(t + \theta)) \leq qEV(x(t)), \theta \in [-\tau, 0],$$

时, 有

$$E\mathcal{L}V(x(t), x(t - \tau)) \leq \alpha EV(x(t), x(t - \tau)).$$

由式(31)知, 存在 $\lambda, \sigma > 0$ 使得

$$e^{(\lambda+\alpha)\beta_1} < \sigma < \min\{qe^{-\lambda\tau}, (\mu_1 + \mu_2 e^{\lambda\tau})^{-1}\}. \quad (33)$$

定义函数 $W(t) = e^{\lambda t} V(x(t)), t \geq -\tau$. 类似定理1证明中的式(9), 有

$$D^+EW(t) = E\mathcal{L}W(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W(t, x(t), x(t - \tau)) &= \\ e^{\lambda t} [\lambda V(x(t)) + \mathcal{L}V(x(t), x(t - \tau))]. \end{aligned}$$

给定初始值 $\xi \in PC_{\mathcal{F}_0}^b([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, 显然有

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2 < \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2, t \in [-\tau, 0], \quad (35)$$

其中 $c_2 = \lambda_{\max}(P)$.

接下来, 本文证明

$$EW(t) \leq \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2, t \geq 0. \quad (36)$$

首先证明

$$EW(t) \leq \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2, t \in [0, t_1]. \quad (37)$$

若式(37)不成立, 则存在 $t \in (0, t_1)$ 使得

$$EW(t) \geq \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2.$$

令 $t^* = \inf\{t \in [0, t_1] : EW(t) \geq \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2\}$, 由 $EW(t)$ 在 $[0, t_1]$ 上的连续性可知存在 $t^* \in (0, t_1)$, 满足

$$EW(t^*) = \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad (38)$$

且

$$EW(t) < \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2, t \in [-\tau, t^*). \quad (39)$$

令 $t^{**} = \sup\{t \in [0, t^*) : EW(t) \geq c_2 E\|\xi\|_\tau^2\}$, 则

$$EW(t^{**}) = c_2 E\|\xi\|_\tau^2, t^{**} \in (0, t^*), \quad (40)$$

且

$$EW(t) > c_2 E\|\xi\|_\tau^2, t \in (t^{**}, t^*). \quad (41)$$

由式(38)–(41)可知对于 $t \in [t^{**}, t^*], \theta \in [-\tau, 0]$ 有

$$EW(t + \theta) \leq \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2 \leq \sigma EW(t). \quad (42)$$

这隐含

$$EV(x(t + \theta)) \leq \sigma e^{\lambda \tau} EV(x(t)) \leq qEV(x(t)). \quad (43)$$

从而由式(34), 类似于式(14)证明可得, 对于 $t \in [t^{**}, t^*]$, 有

$$D^+EW(t) = E\mathcal{L}W(t) \leq (\lambda + \alpha)EW(x(t)). \quad (44)$$

从而类似于式(21)证明有

$$\begin{aligned} EW(t^*) &\leq EW(t^{**})e^{(\lambda+\alpha)(t^*-t^{**})} \leq \\ &e^{(\lambda+\alpha)\beta_1} c_2 E\|\xi\|_\tau^2 < \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \end{aligned} \quad (45)$$

这与式(38)矛盾, 因此式(37)成立.

假设对于 $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$, 有下式成立

$$EW(t) \leq \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2, t \in [-\tau, t_m]. \quad (46)$$

本文将证明

$$EW(t) < \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \in [t_m, t_{m+1}). \quad (47)$$

由式(3)(32), 有

$$\begin{aligned} EW(t_m) &= e^{\lambda\tau} \zeta(t)^T H \zeta(t) + \mu_1 W(t_m^-) + \\ &\quad \mu_2 e^{\lambda\tau} W((t_m - \tau)^-) \leq \\ &\quad (\mu_1 + \mu_2 e^{\lambda\tau}) \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2 \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2 < \\ &\quad \sigma c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \end{aligned} \quad (48)$$

因此利用式(46)(48), 类似于式(37)证明方法可得式(47)成立, 从而由数学归纳法得式(36)成立, 进而有

$$E|x(t)|^2 \leq \frac{\sigma c_2}{c_1} E\|\xi\|_\tau^2 e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (49)$$

其中 $c_1 = \lambda_{\min}(P)$. 所以系统(1)均方指数稳定.

证毕.

针对系统(1)脉冲部分, 下面给出不同于定理1和定理2的脉冲估计方式.

定理3 对于系统(1), 若脉冲时间序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Q}_{\min}(\beta_0)$, 且存在常数 $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \geq 0, q > 1, \nu \geq 1, \varepsilon_1 > 0, c_1 = \lambda_{\min}(P), c_2 = \lambda_{\max}(P)$, 以及对称正定矩阵 P , 使得定理1中的式(2)成立且满足下列条件:

i)

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 q < 0, \quad (50)$$

$$(C_k + D_k)^T P (C_k + D_k) - \nu P \leq 0; \quad (51)$$

ii)

$$(1 + \varepsilon_1) \nu \max\{e^{\alpha\beta_0}, \frac{1}{q}\} + 6(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}) (\frac{c_2}{c_1}) \|D_k\|^2 \times (K_1\tau + K_2 + l^2\bar{h}) < 1,$$

其中:

$$K_1 = \|A_1\|^2 + \|A_2\|^2,$$

$$K_2 = \|B_1\|^2 + \|B_2\|^2,$$

$$\bar{h} = \max\{\|C_k - I\|^2, \|D_k\|^2\},$$

l 是满足 $l\beta_0 \leq \tau < (l+1)\beta_0$ 的非负整数; 则系统(1)均方指数稳定.

证 记 $\zeta(t) = (x(t), x(t-\tau))^T$, 定义Lyapunov函数 $V(x) = x^T P x, x \in \mathbb{R}^n$. 由不等式(2)以及定理1中式(7)的证明知, 对 $\forall t \in [t_{k-1}, t_k), k \in \mathbb{N}$, 当

$$EV(x(t+\theta)) \leq qEV(x(t)), \quad \theta \in [-\tau, 0]$$

时, 有

$$E\mathcal{L}V(x(t), x(t-\tau)) \leq \alpha EV(x(t), x(t-\tau)).$$

若条件ii)成立, 则可选择 $\lambda \in (0, \min\{-\alpha, \frac{\ln q}{\tau}\})$, 以及 $\sigma > 0$, 使得

$$\max\{e^{-(\alpha+\lambda)\beta_0}, \frac{e^{\lambda\tau}}{q}\} < \sigma < \eta, \quad (52)$$

其中

$$\eta = \frac{1 - 6(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}) \|D_k\|^2 e^{2\lambda\tau} (\frac{c_2}{c_1})(K_1\tau + K_2\tau + l^2\bar{h})}{\nu + \varepsilon_1\nu}.$$

定义函数 $W(t) = e^{\lambda t} V(x(t)), t \geq -\tau$. 类似定理1证明中的式(9), 有

$$D^+EW(t) = E\mathcal{L}W(t, x(t), x(t-\tau)), \quad (53)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W(t, x(t), x(t-\tau)) &= \\ e^{\lambda t} [\lambda V(x(t)) + \mathcal{L}V(x(t), x(t-\tau))]. \end{aligned}$$

给定初始值 $\xi \in PC_{\mathcal{F}_0}^b([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, 显然有

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \in [-\tau, 0], \quad (54)$$

其中 $c_2 = \lambda_{\max}(P)$.

接下来, 作者将证明

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \geq 0. \quad (55)$$

首先, 类似定理1中式(12)的证明方法有

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \in [0, t_1]. \quad (56)$$

假设对于 $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$, 有下式成立

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \in [-\tau, t_m]. \quad (57)$$

接下来, 作者将证明

$$EW(t_m) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \quad (58)$$

由 $\{t_k\} \in \mathcal{Q}_{\min}(\beta_0)$ 可知, $\exists l \in \mathbb{N}$, 使得 $\tau \in [l\beta_0, (l+1)\beta_0)$. 假设在 $[t_m - \tau, t_m]$ 上存在脉冲时刻 $t_{m_i}, i = 1, 2, \dots, i_0, i_0 \leq l$.

记 $\Delta x(t_{m_i}) = x(t_{m_i}) - x(t_{m_i}^-)$, 由式(57)可得

$$\begin{aligned} E|x(t_m^-) - x((t_m - \tau)^-)|^2 &= \\ E|\int_{t_m - \tau}^{t_m} [A_1 x(s) + A_2 x(s - \tau)] ds + \\ \int_{t_m - \tau}^{t_m} [B_1 x(s) + B_2 x(s - \tau)] dw(s) - \\ \sum_{i=1}^{i_0} \Delta x(t_{m_i})|^2 &\leq \\ 3E(\int_{t_m - \tau}^{t_m} |A_1 x(s) + A_2 x(s - \tau)| ds)^2 &+ \\ 3E(\int_{t_m - \tau}^{t_m} [B_1 x(s) + B_2 x(s - \tau)] dw(s))^2 &+ \\ 3l \sum_{i=1}^{i_0} E|(C_{m_i} - I)x(t_{m_i}) + D_{m_i}x((t_{m_i} - \tau)^-)|^2 &\leq \\ 6\tau K_1 \int_{t_m - \tau}^{t_m} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|x(s + \theta)|^2 ds &+ \\ 6K_2 \int_{t_m - \tau}^{t_m} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|x(s + \theta)|^2 ds &+ \\ 6l \sum_{i=1}^{i_0} [\|C_{m_i} - I\|^2 E|x(t_{m_i})|^2 + \end{aligned}$$

$$\|D_{m_i}\|^2 E|x(t_{m_i} - \tau)|^2 \leq 6e^{2\lambda\tau} (K_1\tau + K_2 + l^2\bar{h}) \left(\frac{c_2}{c_1}\right) E\|\xi\|_\tau^2 e^{-\lambda t_m}. \quad (59)$$

记

$$\begin{aligned} G_m(x, y) &= C_m x + D_m y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \\ \Delta G_m &= G_m(x(t_m^-), x((t_m - \tau)^-)) - \\ &\quad G_m(x(t_m^-), x(t_m^-)), \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} E|\Delta G_m|^2 &= E|G_m(x(t_m^-), x((t_m - \tau)^-)) - \\ &\quad G_m(x(t_m^-), x(t_m^-))|^2 = \\ &\quad E|D_m x((t_m - \tau)^-) - D_m x(t_m^-)|^2 \leq \\ &\quad \|D_m\|^2 E|x(t_m^-) - x((t_m - \tau)^-)|^2 \leq \\ &\quad 6\|D_m\|^2 e^{2\lambda\tau} (K_1\tau + K_2 + l^2\bar{h}) \times \\ &\quad \left(\frac{c_2}{c_1}\right) E\|\xi\|_\tau^2 e^{-\lambda t_m}. \quad (60) \end{aligned}$$

又由式(51)可得

$$\begin{aligned} EV(G_m(x(t_m^-), x(t_m^-))) &= \\ Ex^T(t_m^-)(C_m + D_m)^T P(C_m + D_m)x(t_m^-) &< \\ \nu Ex^T(t_m^-) P x(t_m^-) &= \\ \nu EV(x(t_m^-)). \quad (61) \end{aligned}$$

因此由式(52)以及式(58)–(60)可得

$$\begin{aligned} EW(t_m) &= e^{\lambda t_m} EV(G_m(x(t_m^-), x((t_m - \tau)^-))) = \\ e^{\lambda t_m} EV(G_m(x(t_m^-), x(t_m^-)) + \Delta G_m) &= \\ e^{\lambda t_m} E[G_m(x(t_m^-), x(t_m^-)) + \Delta G_m]^T P \times \\ [G_m(x(t_m^-), x(t_m^-)) + \Delta G_m] &\leq \\ e^{\lambda t_m} (1 + \varepsilon_1) EV(G_m(x(t_m^-), x(t_m^-))) &+ \\ e^{\lambda t_m} (1 + \frac{1}{\varepsilon_1}) EV(\Delta G_m) &\leq \\ e^{\lambda t_m} (1 + \varepsilon_1) \nu EV(x(t_m^-)) &+ \\ e^{\lambda t_m} (1 + \frac{1}{\varepsilon_1}) c_2 E|\Delta G_m|^2 &\leq \\ [(1 + \varepsilon_1) \nu \sigma + 6e^{2\lambda\tau} (1 + \frac{1}{\varepsilon_1}) (\frac{c_2}{c_1}) \|D_m\|^2 \times \\ (\tau K_1 + K_2 + l^2\bar{h})] c_2 E\|\xi\|_\tau^2 &\leq \\ c_2 E\|\xi\|_\tau^2. \quad (62) \end{aligned}$$

利用定理1中式(16)的证明方法同理可得

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \in [t_m, t_{m+1}). \quad (63)$$

从而由数学归纳法可得

$$EW(t) \leq c_2 E\|\xi\|_\tau^2, \quad t \geq 0. \quad (64)$$

这隐含

$$E|x(t)|^2 \leq \frac{c_2}{c_1} E\|\xi\|_\tau^2 e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (65)$$

故系统(1)均方指数稳定. 证毕.

定理4 对于系统(1), 若脉冲时间序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \varrho_{\min}(\beta_0) \cap \varrho_{\max}(\beta_1)$, 且存在常数 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \geq 0$, $q > 1$, $\varepsilon_2 > 0$, $0 < \nu < 1$, $c_1 = \lambda_{\min}(P)$, $c_2 = \lambda_{\max}(P)$ 以及对称正定矩阵 P , 使得式(2)(51)成立且满足下列条件:

i)

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 q > 0; \quad (66)$$

ii)

$$e^{\alpha\beta_1} < \min\{q, [(1 + \varepsilon_2)\nu + 6(1 + \frac{1}{\varepsilon_2})(\frac{c_2}{c_1}) \times \|D_k\|^2 (K_1\tau + K_2 + l^2\bar{h})]^{-1}\},$$

其中:

$$\begin{aligned} K_1 &= \|A_1\|^2 + \|A_2\|^2, \\ K_2 &= \|B_1\|^2 + \|B_2\|^2, \\ \bar{h} &= \max\{\|C_k - I\|^2, \|D_k\|^2\}, \end{aligned}$$

l 是满足 $l\beta_0 \leq \tau < (l+1)\beta_0$ 的非负整数; 则系统(1)均方指数稳定.

证 记 $\zeta(t) = (x(t), x(t-\tau))^T$, 定义Lyapunov函数 $V(x) = x^T P x$, $x \in \mathbb{R}^n$. 由不等式(2)以及定理1中式(7)的证明知, 对 $\forall t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k \in \mathbb{N}$, 当

$$EV(x(t+\theta)) \leq qEV(x(t)), \quad \theta \in [-\tau, 0]$$

时, 有

$$E\mathcal{L}V(x(t), x(t-\tau)) \leq \alpha EV(x(t), x(t-\tau)).$$

若条件(ii)成立, 则存在 $\lambda, \sigma > 0$ 使得

$$e^{(\lambda+\alpha)\beta_1} < \sigma < \min\{qe^{-\lambda\tau}, \eta\}, \quad (67)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta &= [(1 + \varepsilon_2)\nu + 6\|D_k\|^2 e^{2\lambda\tau} (1 + \frac{1}{\varepsilon_2})(\frac{c_2}{c_1}) \times \\ &\quad (K_1\tau + K_2 + l^2\bar{h})]^{-1}. \end{aligned}$$

定义函数 $W(t) = e^{\lambda t} V(x(t))$, $t \geq -\tau$. 类似于定理2–3中的证明方法可得

$$E|x(t)|^2 \leq \frac{\sigma c_2}{c_1} E\|\xi\|_\tau^2 e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (68)$$

故系统(1)均方指数稳定. 证毕.

注2 与文献[13]相比, 本文不仅考虑了反镇定型脉冲在随机时滞微分系统中的作用, 还针对镇定型的脉冲进行了估计, 并且在系统的脉冲部分还考虑了时滞给系统的稳定性带来的影响.

4 数值例子

在本节中将讨论两个数值例子.

例1 对于系统(1), 考虑 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}_+} \in \varrho_{\min}(\beta_0)$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1.3 & -0.2 \\ -0.5 & -0.3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, D_k = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

选择 $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0.2$ 和 $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.75$, 利用MATLAB求解LMI(2)–(3)可得

$$P = \begin{bmatrix} 0.6848 & 0.2931 \\ 0.2931 & 0.3813 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

取 $q = 2, \beta_0 = 1.2$ 易得 $\alpha = -0.6$, 结合条件(5), 可得对任意 $0 < \tau < 1.1552$ 时, 定理1中式(5)都满足, 因此系统(1)均方指数稳定. 此例中 $\alpha < 0$, 这代表系统中的连续动态稳定, 而脉冲在系统稳定性中起破坏作用.

为了将定理1的结果与定理3的结果进行比较, 选取 $\nu = 0.5, \varepsilon_1 = 0.1$, 利用定理3的条件ii)结合MATLAB编程解得当 $\tau < 0.5431$ 时, 系统才能均方指数稳定, 而定理1中要求 $0 < \tau < 1.1552$ 即可, 显然从这个角度看, 定理1的结果优于定理3. 选取初始值 $\xi = [0.6 \ -0.2]^T$, 时滞 $\tau = 0.01$ 以及脉冲时间间隔 $t_{k+1} - t_k = 0.02$, 系统的均方轨迹见图1.

例2 在系统(1)中, 考虑 $0 < \tau \leq 0.004, \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}_+} \in \mathcal{Q}_{\min}(\beta_0) \cap \mathcal{Q}_{\max}(\beta_1)$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 \\ 0.1 & -0.7 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ -0.3 & -0.2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ 0.7 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, D_k = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

选择 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ 和 $\nu = 0.5$, 利用MATLAB求解LMI(2)(49)可得

$$P = \begin{bmatrix} 0.7918 & -0.1061 \\ -0.1061 & 0.8908 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

取 $q = 2$, 易得 $\alpha = 5, K_1 = 0.6202, K_2 = 1.0461, c_1 = 0.7242$ 和 $c_2 = 0.9584$.

设 $\varepsilon_2 = 0.1, \beta_0 = 0.004$, 则当 $\beta_1 < 0.0791$, 定理4中条件ii)满足, 所以系统均方指数稳定. 例中 $\alpha > 0$, 这说明系统连续部分可能是不稳定的, 而脉冲起镇定系统的作用. 选取初始值 $\xi = [0.6 \ -0.2]^T$, 时滞 $\tau = 0.004$ 以及脉冲时间间隔 $t_{k+1} - t_k = 0.02$, 系统的均方轨迹见图2–3. 与图2相比, 从图3中可以看出脉冲时滞对线性脉冲随机时滞系统起到了很好的镇定作用.

接下来比较定理2与定理4的结果. 首先可以证明在脉冲镇定系统的前提下, 当 $\|C_k\| + \|D_k\| = 1.7 > 1$ 时, 定理4条件满足, 而此时定理2条件不适用. 相反

当 $\|C_k\| + \|D_k\| < 1$ 时, 定理2和定理4的条件都能适用. 因此在脉冲估计方式上, 定理4的限制性较小.

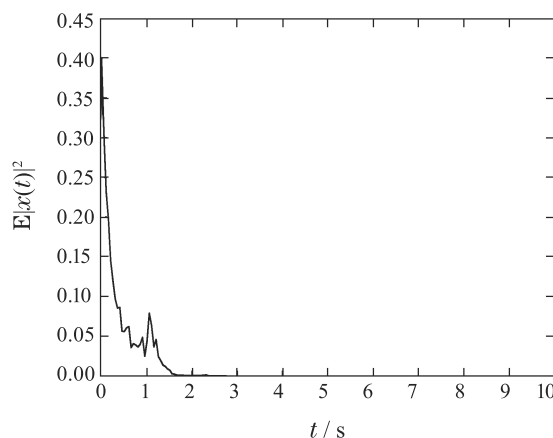


图1 例1系统状态均方轨迹图

Fig. 1 The mean square trajectory of the state $x(t)$ in Example 1

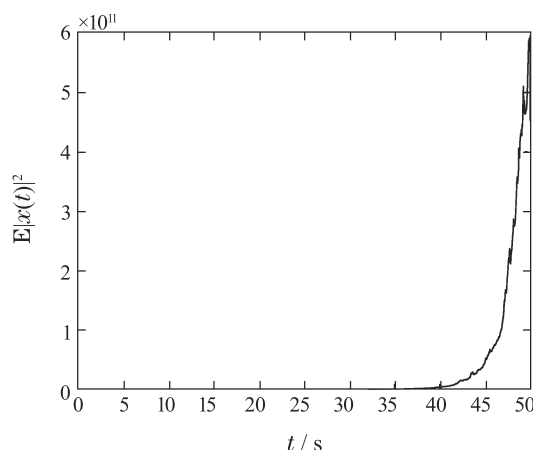


图2 系统不带脉冲序列的状态均方轨迹图

Fig. 2 The mean square trajectory of the state $x(t)$ without impulses sequence

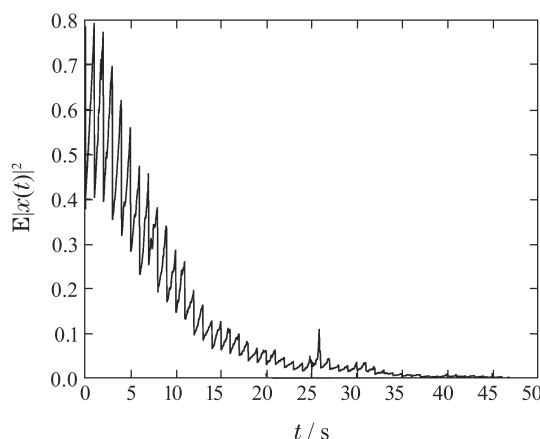


图3 系统带有脉冲序列的状态均方轨迹图

Fig. 3 The mean square trajectory of the state $x(t)$ with impulse sequence

5 结论

本文研究了具有时滞脉冲的线性随机时滞系统的指数稳定性问题, 利用Lyapunov函数和Razumikhin技巧, 得到了针对该系统均方指数稳定的充分条件. 最后的例子也论证了结果的积极性.

参考文献:

- [1] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMEONOV P S. Theory of impulsive differential equations. *Singapore: World Scientific*, 1989: 1 – 283.
- [2] LIU X, BALLINGER G. Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2002, 51(4): 633 – 647.
- [3] ALWAN M, LIU X, XIE W. Existence, continuation, and uniqueness problems of stochastic impulsive systems with time delay. *Journal of the Franklin Institute*, 2010, 347(7): 1317 – 1333.
- [4] WU X, TANG Y, ZHANG W. Input-to-state stability of impulsive stochastic delayed systems under linear assumptions. *Automatica*, 2016, 66: 195 – 204.
- [5] SHEN J. Razumikhin techniques in impulsive functional differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1999, 36: 119 – 130.
- [6] LIU X, BALLINGER G. Uniform asymptotic stability of impulsive delay differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 2001, 41(7/8): 903 – 915.
- [7] WANG Q, LIU X. Impulsive stabilization of delay differential systems via the Lyapunov-Razumikhin method. *Applied Mathematics Letters*, 2007, 20(8): 839 – 845.
- [8] FU X, LI D. Razumikhin-type theorems on exponential stability of impulsive infinite delay differential systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 224(1): 1 – 10.
- [9] MAO X. *Stochastic Differential Equations and Applications*. England: Horwood Publishing Limited, 2007.
- [10] LIU B. Stability of solutions for stochastic impulsive systems via a comparison approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2128 – 2133.
- [11] LI C, SUN J, SUN R. Stability analysis of a class of stochastic differential delay equations with nonlinear impulsive effects. *Journal of the Franklin Institute*, 2010, 347(7): 1186 – 1198.
- [12] CHENG P, DENG F. Global exponential stability of impulsive stochastic functional differential systems. *Statistics Probability Letters*, 2010, 80(23/24): 1854 – 1862.
- [13] PENG S, ZHANG Y. Razumikhin-type theorems on pth moment exponential stability of impulsive stochastic delay differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 50(8): 1917 – 1922.
- [14] PAN L, CAO J. Exponential stability of impulsive stochastic functional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 382(2): 672 – 685.
- [15] LI B. Stability of stochastic functional differential equations with impulses by an average approach. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2018, 29(2): 221 – 233.
- [16] YAO Fenglin, ZHU Xingxing. Finite-time boundedness analysis and H_∞ control for a class of impulsive stochastic systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 291 – 298.
(姚凤麟, 朱行行. 一类脉冲随机系统的有限时间有界性分析与 H_∞ 控制. 控制理论与应用, 2018, 35(3): 291 – 298.)
- [17] LU Chengtian, YU Sen, CHENG Pei. Finite-time stability of the impulsive stochastic neural networks with delay. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(1): 190 – 195.
(鲁成甜, 喻圣, 程培. 具有时滞的脉冲随机神经网络的有限时间稳定性. 控制理论与应用, 2020, 37(1): 190 – 195.)
- [18] KHADRAL A, LIU X, SHEN X. Analyzing the robustness of impulsive synchronization coupled by linear delayed impulses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(4): 923 – 928.
- [19] CHEN W, ZHENG W. Exponential stability of nonlinear time-delay systems with delayed impulse effects. *Automatica*, 2011, 47(5): 1075 – 1083.
- [20] CHEN W, CHEN J, LU X. Effects of impulse delays on L_p -stability of a class of nonlinear time-delay systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(12): 7983 – 8007.
- [21] CHENG P, DENG F, YAO F. Exponential stability analysis of impulsive stochastic functional differential systems with delayed impulses. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2014, 19(6): 2104 – 2114.
- [22] FU X, ZHU Q, GUO Y. Stabilization of stochastic functional differential systems with delayed impulses. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 346(10): 776 – 789.
- [23] GAO L, WANG D, ZONG G. Exponential stability for generalized stochastic impulsive functional differential equations with delayed impulses and Markovian switching. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2018, 30(5): 199 – 212.
- [24] ARNOLD L. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. Hoboken: Wiley, 1974.

作者简介:

崔 瑶 硕士研究生, 研究方向为脉冲随机系统的稳定性, E-mail: cy18201014@163.com;

程 培 教授, 博士, 研究方向为随机系统控制理论与应用, E-mail: chengpei_pi@163.com;

蔡 婷 博士研究生, 研究方向为离散时间脉冲随机系统控制理论与应用, E-mail: caitng_math@163.com.