

两能级量子系统的固定时间控制及鲁棒性

柳 松, 匡 森[†]

(中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 本文考虑刘维尔方程描述的两能级量子系统对于目标平衡态的固定时间控制问题. 首先通过相干矢量和复数的指数形式对系统模型及控制目标进行等价变换, 并借助合适的Lyapunov函数设计一个含分数幂的连续非光滑控制律, 然后利用固定时间稳定性定理给出了系统实现固定时间收敛的条件. 针对某些分数幂取值导致控制性能较差的情况, 提出了两种非光滑切换策略. 此外, 论文也分析了实际量子系统中可能存在的多种不确定性对固定时间控制的影响. 最后, 通过数值仿真实验验证了本文方案的有效性, 同时展示了非光滑控制比标准Lyapunov控制具有更强的鲁棒性.

关键词: 两能级量子系统; 固定时间控制; 非光滑切换策略; 鲁棒性

引用格式: 柳松, 匡森. 两能级量子系统的固定时间控制及鲁棒性. 控制理论与应用, 2022, 39(2): 393 – 400

DOI: 10.7641/CTA.2021.10235

Fixed-time control and robustness of two-level quantum systems

LIU Song, KUANG Sen[†]

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

Abstract: The problem of fixed-time control is considered for a target equilibrium state of two-level quantum systems described by the Liouville equation. Equivalent transformations are performed on the system model and the control goal by the coherence vector representation and the exponential forms of complex numbers. A continuous non-smooth control law with a fractional power is designed by a candidate Lyapunov function and the fixed-time stability theorem is used to obtain the conditions for the fixed-time convergence of quantum systems. For the case of bad control performance caused by some values of the fractional power, two non-smooth switching control strategies are proposed. Besides, the effect of various uncertainties that may exist in actual quantum systems on fixed-time control is also analyzed. Finally, the effectiveness of the control scheme in this paper is verified by numerical simulation experiments. At the same time, it is demonstrated that the fixed-time control has better robustness than the standard Lyapunov control.

Key words: two-level quantum systems; fixed-time control; non-smooth switching strategy; robustness

Citation: LIU Song, KUANG Sen. Fixed-time control and robustness of two-level quantum systems. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(2): 393 – 400

1 引言

量子控制作为多学科交叉研究领域, 对量子科学与技术的发展有极大的推动作用^[1–2]. 目前, 最优控制^[3]、Lyapunov控制^[4–5]、神经网络控制^[6]、容错控制^[7]、学习控制^[8]等方法已被广泛用于量子系统的控制中. 实现量子系统的固定时间控制(即在外部控制场的作用下, 在某个与初始态无关的固定时间内实现量子系统状态的准确控制)对实用化量子信息技术具有重要意义. 例如, 在核磁共振(nuclear magnetic resonance, NMR)量子计算机中, 人们有必要在独立于量子态的固定时间内实现系统的完全收敛, 以更高效地

通过一系列射频脉冲来生成表征量子逻辑门的期望么正变换, 减小对邻近量子位的影响^[3].

量子系统的有限时间控制问题, 是指在外部控制场作用下系统可以在有限时间内稳定到期望的目标态, 但其收敛时间函数依赖于初始态. 而固定时间控制总能在一个与初始态无关的常数时间内使系统稳定收敛. 例如, 连续非光滑控制^[9–10]被用来实现系统关于目标本征态的有限时间稳定; 滑模控制^[11]、 π 脉冲法^[12]、几何控制原理^[13]、最优控制技术^[14]都可以通过在一个预先给定的时间内设计合适的控制律来实现系统在固定时间内的完全布居数转移, 但都要求

收稿日期: 2021–03–21; 录用日期: 2021–05–21.

[†]通信作者. E-mail: skuang@ustc.edu.cn.

本文责任编辑: 席在荣.

国家自然科学基金项目(61873251, 61773370)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61873251, 61773370).

满足一定的约束条件.

在量子系统的实际应用中,不可避免地存在噪声和不确定性.例如,对于固体核磁共振自旋系统,外部噪声磁场以及与其他自旋间的耦合有可能导致系统哈密顿量上的不确定性. Dong等人^[11]结合Lyapunov控制和周期投影测量提出了一种滑模控制方法,以实现系统哈密顿量上不确定性的鲁棒控制,该方法需要精确设计投影测量的周期.文献[15]提出了一种基于采样学习的数值方法,用于哈密顿量中包含不确定性的量子系统的鲁棒最优控制设计.文献[10]研究了控制哈密顿量上的不确定性对量子系统有限时间稳定性的影响.然而,实际量子系统的初始态有时并不容易精确获得,在实验操作中也可能出现控制场的波动^[16],这些因素都会导致状态转移的偏差.

本文基于固定时间稳定性理论针对两能级量子系统设计含分数幂的连续非光滑控制律,以便实现系统对于目标平衡态(纯态和混合态)的固定时间收敛性;提出了两种非光滑切换控制方法以解决某些分数幂取值引起控制性能差的问题;论文也分析了实际应用中可能存在于系统哈密顿量、初始态和控制场上的不确定性对系统固定时间控制的影响.

2 问题描述

2.1 系统模型和控制目标

本节考虑在一个控制场作用下的两能级封闭量子系统,其状态演化过程可用刘维尔方程表示:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_0 + H_1 u_1, \rho], \quad (1)$$

其中:密度算符 ρ 是描述量子态的半正定厄米算符, u_1 为标量实值外部控制场, H_0 和 H_1 为系统的内部和控制哈密顿量,且

$$H_0 = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0 & h_1 \\ h_1^* & 0 \end{bmatrix}.$$

为简化分析,本文中将近约化普朗克常数 $\hbar$ 设置为1.此外,将满足 $[H_0, \rho] = 0$ 的状态称为系统(1)的平衡态.

在相干矢量^[17]表示下,任何定义在希尔伯特空间的两能级量子系统的状态 ρ 均对应欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中唯一的一个实矢量,即

$$\rho = \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 x_k \lambda_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & 1-x_3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中:

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

为泡利矩阵, $x_k = \text{tr}(\rho \lambda_k)$ 表示系统在 λ_k 上投影的期望值, $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ 称为 ρ 的相干矢量或Bloch矢量.所有Bloch矢量的集合构成了两能级系统(1)的

Bloch空间.定义矢量模长 $a \triangleq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 1$.当 $a = 1$ 时,系统状态为纯态,对应三维欧氏空间单位球面上的点;当 $a < 1$ 时,量子态为混合态,对应 $\mathbb{R}^3$ 单位球内的点;当 $a = 0$ 时,量子态位于 $\mathbb{R}^3$ 单位球的球心,此时系统(1)处于完全混合状态.

为了便于分析系统对于目标平衡态的固定时间收敛性,本文基于式(2)的形式和复数的指数表示进一步将系统的密度矩阵写为

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + r_1 e^{i\phi_1} & r_2 e^{-i\phi_2} \\ r_2 e^{i\phi_2} & 1 - r_1 e^{i\phi_1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中: r_1 和 r_2 是两个非负实参数, $\phi_1, \phi_2 \in (0, 2\pi]$.根据式(2)–(3)中各个矩阵元素的对应关系可知 $r_2^2 = x_1^2 + x_2^2$,因此 $r_1^2 + r_2^2 = a^2$.此外,密度矩阵的厄米性保证了 $\sin \phi_1 = 0$.

将式(3)代入系统方程(1)可得

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = 2u_1 r_2 \cos \phi_1 (h_R \sin \phi_2 + h_I \cos \phi_2), \\ \dot{r}_2 = 2u_1 r_1 (h_R \sin(\phi_1 - \phi_2) - h_I \cos(\phi_1 - \phi_2)), \\ r_1 \dot{\phi}_1 = -2u_1 r_2 \sin \phi_1 (h_R \sin \phi_2 + h_I \cos \phi_2), \\ r_2 \dot{\phi}_2 = (\omega_1 - \omega_2) r_2 - 2u_1 r_1 \Lambda, \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$\Lambda = h_I \sin(\phi_1 - \phi_2) + h_R \cos(\phi_1 - \phi_2), \\ h_R = \Re(h_1), \quad h_I = \Im(h_1).$$

假定目标态为两能级量子系统(1)自由演化的平衡

态,即 $\rho_f = \begin{bmatrix} \rho_{f1} & 0 \\ 0 & \rho_{f2} \end{bmatrix}$, $\rho_{f1} \neq \rho_{f2}$.在方程(4)下,该目标态对应 $r_1 = a, r_2 = 0$.本文的控制目标是通过构造合适的Lyapunov函数设计一个连续非光滑控制律,以实现系统(1)对于目标平衡态 ρ_f 的固定时间收敛性.这里,对于目标平衡态的固定时间收敛性等价于系统(4)在 $\mathbb{R}_+^2$ 空间上的变量 $[r_1 \ r_2]^T$ 对于系统平衡点 $[a \ 0]^T$ 的固定时间收敛性.其中 $\mathbb{R}_+$ 表示集合 $[0, +\infty)$.

注1 通过对系统状态采用式(3)的指数表示形式,可以采用类似于文献[9]的方法将系统方程(4)最终写为一个单变量微分方程的形式,从而便于讨论系统的固定时间收敛性.

2.2 相关定义和引理

对于仿射非线性动态系统:

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

引理1^[18] 考虑非线性系统(5),假设存在一个连续径向无界的函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足下列条件:

- 1) $V(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- 2) $V(x) > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- 3) 存在正实数 $\alpha > 0$ 和 $0 < p < 1$,使函数 V 满足下列不等式:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha V^p(x(t)), \quad (6)$$

那么, 系统(5)的原点是有限时间稳定的, 且有限收敛时间函数满足

$$T(x(0)) \leq \frac{1}{\alpha(1-p)} V^{1-p}(x(0)). \quad (7)$$

定义 1^[19] 如果非线性系统(5)的原点是全局有限时间稳定的, 且有限收敛时间函数是全局有界的, 那么称系统(5)的原点是全局固定时间稳定的, 即存在 $T_{\max} \in \mathbb{R}_+$ 使得 $T(x(0)) \leq T_{\max}, \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$.

引理 2^[18] 假定原点是非线性系统(5)的一个有限时间稳定平衡点, 且存在一个包含原点的开邻域 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 使得对于任意 $x(0) \in U$ 收敛时间函数都是连续的, 那么存在正实数 $p \in (0, 1)$ 和连续正定函数 $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ 使得对于任意 $x(0) \in U$, $\dot{V}$ 在 U 上都是实值连续的, 且存在正实数 $\alpha > 0$ 使下列不等式成立:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha V^p(x(t)). \quad (8)$$

引理 3^[18] 考虑非线性系统(5), 假定存在一个包含原点的开邻域 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 和一个连续函数 $V: U \rightarrow \mathbb{R}$. 令 $\Omega_\kappa = \{x \in U: V(x) < \kappa, \kappa > 0\}$, 且存在一个连续函数 $\mathcal{P}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\mathcal{P}(\kappa) > 0$. 如果 $x: [t_1, t_2] \rightarrow U$ 是一个满足 $x \in \bar{\Omega}_\kappa$ 的连续函数, 且对于任意 $x(t) \in U$ 有下列不等式成立:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\mathcal{P}(V(x(t))), \quad t \in [t_1, t_2], \quad (9)$$

那么对于所有的 $t \in (t_1, t_2)$, 都有 $x(t) \in \Omega_\kappa$.

3 固定时间控制和稳定性

3.1 固定时间控制器设计

为使系统在控制作用下稳定收敛到目标态 ρ_f , 选取如下的Lyapunov函数^[5]:

$$V(\rho) = \text{tr}(\rho_f^2) - \text{tr}(\rho\rho_f) = \frac{1}{2}(1 + a^2) - \text{tr}(\rho\rho_f). \quad (10)$$

计算Lyapunov函数 $V(\rho)$ 沿着系统(1)的轨迹的时间导数有

$$\begin{aligned} \dot{V}(\rho) &= -\text{tr}(\dot{\rho}\rho_f) = \text{tr}(i[H_0 + H_1 u_1, \rho]\rho_f) = \\ &u_1 \text{tr}(i[H_1, \rho]\rho_f). \end{aligned} \quad (11)$$

为保证 $\dot{V}(\rho) \leq 0$, 本文可以设计含两个分数幂因子的如下控制律:

$$u_1 = -K_1 \text{sgn } \Phi |\Phi|^{\gamma_1} - K_2 \text{sgn } \Phi |\Phi|^{\gamma_2}, \quad (12)$$

其中: $K_1, K_2 > 0, \Phi = \text{tr}(i[H_1, \rho]\rho_f), 0 < \gamma_1 < 1, \gamma_2 > 1$.

经典非线性系统固定时间控制的研究表明^[20], 类似于式(12)的控制律可以用来实现被控系统的固定时间收敛性. 然而, 由于式(12)含有两个分数幂, 分析和论证相对复杂. 为了简化分析, 本文中仅考虑一个

分数幂的特殊情况, 即分析两能级量子系统(1)在如下控制律作用下的固定时间稳定性:

$$u_1 = -K \text{sgn } \Phi |\Phi|^\gamma, \quad (13)$$

其中: $K > 0, 0 < \gamma < 1$.

由式(3)可得

$$\dot{\Phi} = -r_2(h_R \sin \phi_2 + h_I \cos \phi_2)(\rho_{f1} - \rho_{f2}). \quad (14)$$

根据式(11)-(14)可知, 量子系统在向目标态 ρ_f 转移的过程中, $\dot{V}(\rho) = 0$ 出现的条件和控制哈密顿量的选取有关. 考虑以下情况:

1) $r_2 = 0$;

$$2) \begin{cases} \sin \phi_2 = 0, h_I = 0, \\ \cos \phi_2 = 0, h_R = 0, \\ \tan \phi_2 = -\frac{h_I}{h_R}, h_R \neq 0, h_I \neq 0. \end{cases}$$

当 $r_2 = 0$ 时, 由于 r_1 和 r_2 满足 $r_1^2 + r_2^2 = a^2$, 此时系统处于给定的目标平衡态 ρ_f . 由式(10)-(11)(13)可得 $\dot{V} = 0, \dot{V} = 0, u_1 = 0$, 这说明系统状态不再发生变化.

假定系统的控制哈密顿量满足 $h_I = 0$, 那么当系统(4)的状态在集合 $\mathcal{M} = \{\rho: r_2 \neq 0, \sin \phi_2 = 0\}$ 中时, 满足 $\sin \phi_2 = 0$ 的量子态构成了单位球面(纯态)或球内(混合态)上 ϕ_2 为 π 或 2π 的一个圆.

将系统(4)演化过程中满足 $r_2 \neq 0, \sin \phi_2 = 0$ 的非目标态记为 ρ_τ , 相应的时刻记为 t_τ . 根据系统(4)的第4个方程可得

$$\dot{\phi}_2 = \omega_1 - \omega_2 \neq 0. \quad (15)$$

式(15)说明存在时刻 $t_1 > t_\tau$, 使得量子态的相位角 ϕ_2 在非光滑控制律(13)的作用下从 $\phi_2(t_\tau) = \mu\pi, \mu = 1, 2$, 演化到 $\phi_2(t) \neq \mu\pi$. 由式(13)-(14)可知 $u_1(t) \neq 0, t \in (t_\tau, t_1]$, 这意味着集合 $\mathcal{M}$ 中的量子态一定会在区间 $(t_\tau, t_1]$ 内的某个时刻离开集合 $\mathcal{M}$, 继续向目标态 ρ_f 演化.

同理, 可分析出当 $h_R = 0$ 或当 $h_R \neq 0, h_I \neq 0$ 时系统(4)在非光滑控制律 u_1 作用下的演化情况.

3.2 固定时间稳定性

由于控制律 u_1 作用下的系统(4)是非Lipschitz连续的, 因此无法直接利用Lipschitz连续性条件来判断系统解的存在唯一性. 由式(15)可知, 对于给定的目标态, 满足 $\dot{V} = 0$ 的、非目标态的所有量子态构成了一个过渡态集合. 根据文献[9]的定理5易知: 对于任意初始态, 两能级量子系统(4)在控制律 u_1 作用下存在唯一的连续可微解.

考虑到式(3)表示的量子态始终满足 $\sin \phi_1 = 0$, 且当目标态满足 $\rho_{f1} > \rho_{f2}$ 时, 有 $\cos \phi_1 = 1$; 当目标态满足 $\rho_{f1} < \rho_{f2}$ 时, 有 $\cos \phi_1 = -1$. 因此, 在控制律(13)

作用下的系统(4)可写为

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = 2Km_0|r_2(h_R \sin \phi_2 + h_I \cos \phi_2)|^{\gamma+1}, \\ \dot{r}_2 = -2Km_0r_1r_2^\gamma|h_R \sin \phi_2 + h_I \cos \phi_2|^{\gamma+1}, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $m_0 = |\rho_{f1} - \rho_{f2}|^\gamma$.

上式中的 $h_R \sin \phi_2 + h_I \cos \phi_2$ 是一个仅依赖于时间 t 的函数. 令 $m_1(t) = |h_R \sin \phi_2 + h_I \cos \phi_2|^{\gamma+1}$, 则方程(16)可写为

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = 2Km_0r_2^{\gamma+1}m_1(t), \\ \dot{r}_2 = -2Km_0r_1r_2^\gamma m_1(t). \end{cases} \quad (17)$$

由于系统(17)的被控变量 $[r_1 \ r_2]^T$ 始终满足关系 $r_1^2 + r_2^2 = a^2$, 因此可用一个仅依赖 r_2 变化的函数来表示 r_1 , 即

$$r_1 = (a^2 - r_2^2)^{\frac{1}{2}} = a^2(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_{2j}^j}{2^{2j}(2j-1)} r_2^{2j}). \quad (18)$$

令 $f_0(r_2) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_{2j}^j}{2^{2j}(2j-1)} r_2^{2j}$, 则系统(17)可表示为一个关于变量 r_2 的一维微分方程

$$\dot{r}_2 = -2Ka^2m_0m_1(t)r_2^\gamma f_0(r_2). \quad (19)$$

这样, 分析系统(17)从初始状态 $[r_1(0) \ r_2(0)]^T$ 到平衡点 $[a \ 0]^T$ 的固定时间控制问题就相当于分析系统(19)的变量 r_2 在固定时间内从初始状态 $r_2(0)$ 收敛到原点所满足的条件.

对于系统(19), 可给出如下固定时间稳定性定理:

定理 1 考虑非光滑控制律(13)作用下的两能级量子系统(19), 那么必定存在一个实数 $\delta \in (1, +\infty)$ 使得满足 $0 \leq r_2 < \frac{\sqrt{2\delta-1}}{\delta}$ 且与 ρ_f 同谱的量子态, 都能在固定时间内收敛到目标平衡态 ρ_f , 且固定收敛时间为 $T_{\max} = \frac{\delta}{2Ka^2(\delta-1)(1-\gamma)}$.

证 考虑Lyapunov函数 $V_0(r_2) = r_2^2$, 则根据文献[9]可知, 存在实数 $\delta \in (1, +\infty)$ 使得 $V_0(r_2)$ 沿着系统(19)的轨迹的李导数满足

$$\langle \nabla V_0(r_2), f(r_2) \rangle \leq -\frac{\delta-1}{\delta} \alpha_1 V_0^{\frac{\gamma+1}{2}}(r_2), \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned} f(r_2) &= -2Ka^2m_0m_1(t)r_2^\gamma f_0(r_2), \\ \alpha_1 &= 4Ka^2, \frac{\gamma+1}{2} \in (0, 1). \end{aligned}$$

对于集合 $\mathcal{D} = \{\rho : 0 \leq r_2 < \frac{\sqrt{2\delta-1}}{\delta}\}$ 中的量子态, 引理1保证了系统(19)的原点是有限时间稳定的,

且有限收敛时间函数满足

$$T(r_2(0)) \leq \frac{1}{\frac{\delta-1}{\delta} \alpha_1 (1 - \frac{\gamma+1}{2})} V_0^{(1-\frac{\gamma+1}{2})}(r_2(0)) \leq \frac{\delta}{2Ka^2(\delta-1)(1-\gamma)}. \quad (21)$$

根据定义1可知, 对于集合 $\mathcal{D}$ 中的任意量子态, 控制律(13)作用下的两能级量子系统总能在固定时间

$$T_{\max} = \frac{\delta}{2Ka^2(\delta-1)(1-\gamma)}$$

内收敛到目标平衡态.

注 2 式(21)说明固定收敛时间 $T_{\max}$ 只与相干矢量的长度 a 、比例系数 K 、分数幂 γ 和参数 δ 有关, 与初始态无关. 对于满足 $\frac{\sqrt{2\delta-1}}{\delta} \leq r_2 \leq 1$ 的初始态, 在控制律(13)的作用下, 系统状态总能在有限时间内演化到集合 $\mathcal{D}$ 中, 并最终收敛到目标态, 但无法保证此时的收敛时间满足式(21).

3.3 性能改进

观察控制律(13)可知: 当分数幂因子 $\gamma \rightarrow 0$ 时, 控制律(13)将逼近棒棒Lyapunov控制, 因此控制后期的状态转移性能将变差^[5]; 当 $\gamma \rightarrow 1$ 时, 控制律(13)具有明显的标准Lyapunov控制特性, 导致量子系统的完全收敛时间较长. 对此, 可以提出两种非光滑切换控制策略, 即基于不同分数幂和不同比例系数的切换控制策略, 以保证两能级量子系统(19)具有更好的固定时间控制性能.

当分数幂 γ 较小时, 大量的仿真实验表明: 对于集合 $\mathcal{D}$ 中的任意量子态, 若控制律(13)的比例系数 K 保持不变, 则选择较大的分数幂可以使得系统在新的控制律作用下具有更好的控制性能; 而若分数幂 γ 保持不变, 则适当减小控制律的比例系数 K , 仍可使得系统更好地向目标态演化. 其中, 第 j 个控制律的固定时间 $T_{\max}^{(j)} = \frac{\delta}{2a^2K^{(j)}(\delta-1)(1-\gamma^{(j)})}$ 作为分数幂为 $\gamma^{(j)}$ (或比例系数为 $K^{(j)}$) 和分数幂为 $\gamma^{(j+1)}$ (或比例系数为 $K^{(j+1)}$) 的控制律之间的切换条件, 系统的总固定收敛时间为 $T_{\max}^{\text{total}} = \sum_{j=1}^{\infty} T_{\max}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots$. 需要注意, $\gamma^{(j)}$ 和 $K^{(j)}$ 的个数及其具体值的选取不是唯一的.

注 3 本文设计的控制律(13)和这里提及的切换控制律都是解析形式的非光滑控制律, 主要用来实现固定时间内系统对于目标态的准确收敛性. 而传统的光滑控制则很难完成这样的控制任务. 事实上, 相对于光滑控制而言, 非光滑控制通常能够完成更复杂的控制任务, 目前已在量子系统控制中得到了广泛研究和应用^[5, 21-25].

4 鲁棒性分析

量子系统的不确定性可近似描述为系统哈密顿量的扰动 ΔH_0 、初始态的偏差 $\Delta \rho_0$ 和控制场的波动

Δu_1 . 本文中, 将系统哈密顿量的不确定性记为

$$\Delta H_0 = \varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_3 \lambda_3, \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2} \leq \varepsilon, \varepsilon > 0,$$

将控制场的波动记为 $|\Delta u_1| \leq \sigma, \sigma > 0$. 此时的量子系统模型可表示成

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_0 + \Delta H_0 + H_1 u_1(1 + \Delta u_1), \rho]. \quad (22)$$

基于式(2)–(3), 上式可等价于

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = 2r_2 \cos \phi_1 A_1, \\ \dot{r}_2 = 2r_1 A_2, \\ \dot{r}_1 \dot{\phi}_1 = -2r_2 \sin \phi_1 A_1, \\ \dot{r}_2 \dot{\phi}_2 = (\omega_1 - \omega_2 + 2\varepsilon_3)r_2 - 2r_1 A_3, \end{cases} \quad (23)$$

其中:

$$A_1 = u_1(1 + \Delta u_1)(h_R \sin \phi_2 + h_I \cos \phi_2) + \varepsilon_1 \sin \phi_2,$$

$$A_2 = (h_R \sin(\phi_1 - \phi_2) - h_I \cos(\phi_1 - \phi_2)) \times u_1(1 + \Delta u_1) + \varepsilon_1 \sin(\phi_1 - \phi_2),$$

$$A_3 = u_1(1 + \Delta u_1)(h_I \sin(\phi_1 - \phi_2) + h_R \cos(\phi_1 - \phi_2)) + \varepsilon_1 \cos(\phi_1 - \phi_2).$$

令

$$m_2(t) = \cos \phi_1 \sin \phi_2, \mu_1(r_2) = \Delta u_1 f(r_2),$$

$$\mu_2(r_2) = -2a^2 \varepsilon_1 m_2(t) \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_{2j}^j}{2^{2j}(2j-1)} r_2^{2j}\right),$$

那么控制律(13)作用下的受扰动量子系统(23)可表示为

$$\dot{r}_2 = f(r_2) + \mu_1(r_2) + \mu_2(r_2). \quad (24)$$

根据定理1, 对于集合 $\mathcal{D}$ 中的初始态, 原点是控制律(13)作用下未受扰动系统 $\dot{r}_2 = f(r_2)$ 的一个有限时间稳定平衡点, 且其收敛时间函数连续有界. 因此, 对于 Lyapunov 函数 $V_0(r_2) = r_2^2$, 根据引理2可得

$$\langle \nabla V_0(r_2), f(r_2) \rangle \leq -\alpha V_0^p(r_2), r_2 \in \mathcal{D}, \quad (25)$$

其中: α, p 为正实数, 且 $p \in (0, 1)$.

鉴于 $\|\mu_2(r_2)\| \leq 2a^2 \varepsilon$, 计算 $V_0(r_2)$ 沿着系统(24)轨迹的李导数有

$$\langle \nabla V_0(r_2), f(r_2) + \mu_1(r_2) + \mu_2(r_2) \rangle \leq -\alpha(1 - \sigma)V_0^p(r_2) + 2a^2 \varepsilon. \quad (26)$$

令

$$\alpha = \frac{\delta - 1}{\delta} \alpha_1, p = \frac{\gamma + 1}{2}, \kappa = \left(\frac{4a^2 \delta \varepsilon}{(\delta - 1)(1 - \sigma)\alpha_1}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}},$$

集合 $\Omega_\kappa = \{r_2 \in \mathcal{D} : V_0(r_2) < \kappa\}$. 记 Ω_κ 的闭区域为 $\bar{\Omega}_\kappa$. 那么, 根据引理3可知, 必存在一个关于 κ 的连续函数 $\mathcal{P}(\kappa) = \alpha(1 - \sigma)\kappa^p - 2a^2 \varepsilon = 2a^2 \varepsilon > 0$, 使得对于任意初始状态 $r_2(0) \in \bar{\Omega}_\kappa$, 系统的解都满足 $r_2(t) \in \Omega_\kappa, t \in (0, +\infty)$.

当初始态 $r_2(0) \notin \bar{\Omega}_\kappa$ 时, 由于系统(24)的解 $r_2(t)$ 是连续的, 因此存在某个时刻 $t_\Gamma > 0$ 使得 $r_2(t) \in \Omega_\kappa, t > t_\Gamma$ 成立.

这样, 对于 $0 \leq t < t_\Gamma$ 有 $V_0(r_2) \geq \left(\frac{4a^2 \varepsilon}{\alpha(1 - \sigma)}\right)^{\frac{1}{p}}$, 即

$$\varepsilon \leq \frac{\alpha}{4a^2}(1 - \sigma)V_0^p(r_2), \text{ 将其代入式(26)可得}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla V_0(r_2), f(r_2) + \mu_1(r_2) + \mu_2(r_2) \rangle &\leq \\ -\alpha(1 - \sigma)V_0^p(r_2) + 2a^2 \frac{\alpha}{4a^2}(1 - \sigma)V_0^p(r_2) &\leq \\ -\frac{\alpha}{2}(1 - \sigma)V_0^p(r_2). \end{aligned} \quad (27)$$

进一步, 根据引理1和定义1, 对于受扰量子系统(24), 集合 $\mathcal{D}$ 中的任意状态都可在固定时间内收敛到 Ω_κ 内, 且收敛时间为 $T_\Gamma = \frac{\delta}{K a^2 (\delta - 1)(1 - \sigma)(1 - \gamma)}$.

由于密度矩阵本身满足约束条件 $\rho_0 + \Delta \rho_0 \geq 0$ 和 $\text{tr}(\rho_0 + \Delta \rho_0) = 1$, 因此受扰初始态可能存在 $\rho_0 + \Delta \rho_0 \notin \mathcal{D}$ 的情况. 尽管在非光滑控制律(13)的作用下, 系统必定能在有限时间内收敛到期望目标态, 但其收敛时间不一定满足 $T(\rho_0 + \Delta \rho_0) \leq T_\Gamma$.

5 数值仿真

假定两级量子系统的内部和控制哈密顿量分别为

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 参数 } \delta \text{ 被设置为 } \delta = \frac{3}{2}.$$

5.1 固定时间控制验证

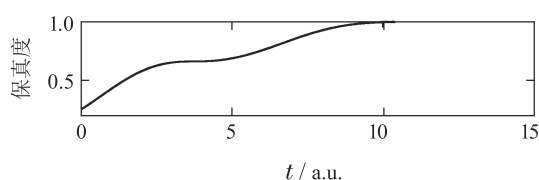
本文首先验证固定时间控制律(13)的有效性. 仿真中, 设定比例系数为 $K = 0.2$, 分数幂因子为 $\gamma = \frac{1}{2}$. 假定初始态被给定为

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}i}{4} \\ \frac{\sqrt{3}i}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \in \mathcal{D},$$

目标态是 $\rho_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 那么, 量子态的保真度和控制律变化曲线如图1所示. 根据仿真结果和式(21)可知,

系统的收敛时间为 $T(\rho_0) < T_{\max} = \frac{3}{2 \times 0.2(1 - \frac{1}{2})}$

$= 15 \text{ a.u.}$, 这与定理1给出的结论一致.



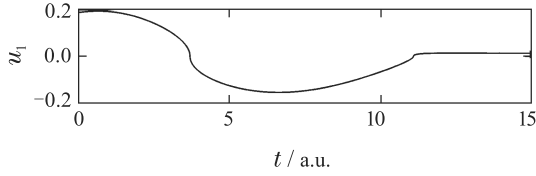


图1 当初始态为 ρ_0 时,量子态保真度和非光滑控制律的变化曲线

Fig. 1 The evolution curves of fidelity and the non-smooth control law for the initial state ρ_0

5.2 性能改进验证

首先采用不同比例系数的非光滑切换控制策略对

目标本征态 $\rho_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 进行仿真. 假定初始态为

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{7i}{8} \\ -\frac{7i}{8} & 1 + \frac{\sqrt{15}}{8} \end{bmatrix},$$

选取控制律(13)中的分数幂为 $\gamma = \frac{1}{8}$, 两次非光滑切换控制律的比例系数分别为 $K^{(1)} = 0.3$ 和 $K^{(2)} = 0.12$, 以控制时间

$$T_{\max}^{(1)} = \frac{\delta}{2a^2 K^{(1)} (\delta - 1) (1 - \gamma)} = 5.71 \text{ a.u.}$$

作为切换条件, 仿真结果如图2所示. 根据图2和仿真数据可知, 系统完全收敛到目标态的时间满足

$$T(\rho_0) < T_{\max}^{\text{total}} = \sum_{i=1}^2 \frac{\delta}{2a^2 K^{(i)} (\delta - 1) (1 - \gamma)} = 19.99 \text{ a.u.},$$

这与理论分析一致.

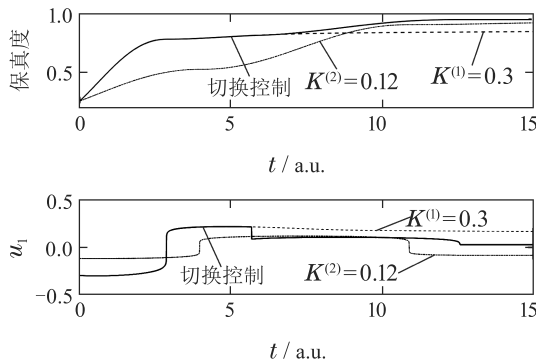


图2 当初始态为 ρ_0 时,量子态保真度和不同比例系数的切换控制律变化曲线

Fig. 2 The evolution curves of fidelity and the non-smooth switching control laws with different values of K for the initial state ρ_0

接下来, 采用不同分数幂的非光滑切换控制方法对目标混合态进行仿真. 假定系统初始以0.95的概率处在本征态 $|1\rangle$, 同时又以0.05的概率处在叠加态

$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$, 即初始态为

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} 0.025 & -0.025i \\ 0.025i & 0.975 \end{bmatrix},$$

则其纯度为 $\text{tr}(\rho_0^2) = 0.9525$. 通过数值计算可知 ρ_0 的两个本征值可近似为0.0243和0.9757. 进一步, 假定系统的目标态为

$$\rho_f = \begin{bmatrix} 0.9757 & 0 \\ 0 & 0.0243 \end{bmatrix}.$$

设置控制律(13)中的比例系数为 $K = 0.3$, 两次非光滑切换控制的分数幂分别为 $\gamma^{(1)} = \frac{1}{8}$ 和 $\gamma^{(2)} = \frac{2}{3}$, 以

$$T_{\max}^{(1)} = \frac{\delta}{2a^2 K (\delta - 1) (1 - \gamma^{(1)})} = 6.31 \text{ a.u.}$$

为切换条件. 仿真结果如图3所示. 根据图3和仿真数据, 系统收敛于目标态的总时间满足

$$T(\rho_0) < T_{\max}^{\text{total}} = \sum_{i=1}^2 \frac{\delta}{2a^2 K (\delta - 1) (1 - \gamma^{(i)})} = 22.88 \text{ a.u.},$$

这同样与理论结果一致.

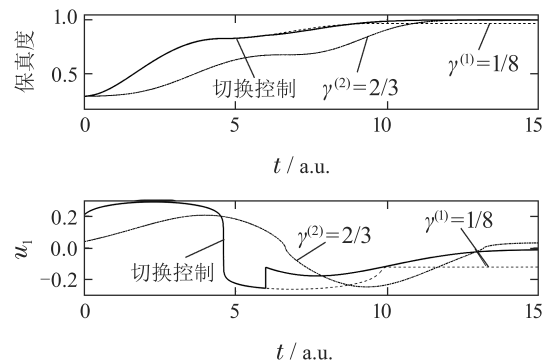


图3 当初始态为 ρ_0 时,量子态保真度和不同分数幂的切换控制律变化曲线

Fig. 3 The evolution curves of fidelity and the non-smooth switching control laws with different values of γ for the initial state ρ_0

5.3 鲁棒性验证

假定目标态为 $\rho_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 给定被控系统的初始

态为

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} e^{-i \frac{3\pi}{2}} \\ \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} e^{i \frac{3\pi}{2}} & \sin^2 \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}i}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}i}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

设置控制律(13)的比例系数和分数幂因子分别为 $K = 0.2$ 和 $\gamma = \frac{2}{3}$, 初始态 ρ_0 上的不确定性 $\Delta\rho_0$ 可以通过相位因子的变化来描述, 即用 $\frac{\pi}{3} + \Delta\theta$ 代替初始态 ρ_0 中的 $\frac{\pi}{3}$, 用 $\frac{3\pi}{2} + \Delta\phi$ 代替初始态 ρ_0 中的 $\frac{3\pi}{2}$.

在连续非光滑控制律 u_1 和标准Lyapunov控制律 $u'_1 = -K\text{tr}(i[H_1, \rho]\rho_f)$ 的作用下, 系统哈密顿量和初始态上的不确定性对量子态保真度的影响分别如图4~5所示. 显然, 对于这两类不确定性, 非光滑控制比标准Lyapunov控制具有更强的鲁棒性. 此外, 根据理论分析和图4可知, 自由哈密顿量的不确定性不影响系统状态的保真度.

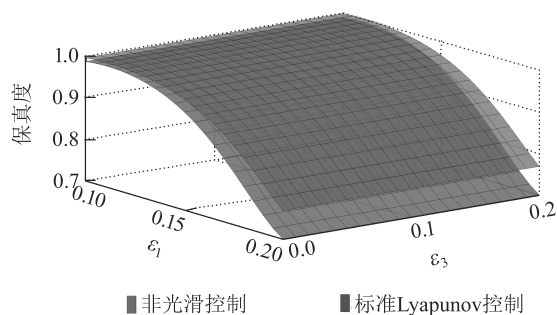


图4 在非光滑控制和标准Lyapunov控制作用下, 系统哈密顿量的不确定性对量子态保真度的影响

Fig. 4 Under non-smooth control and standard Lyapunov control, the influence of the uncertainty in the system Hamiltonian on the fidelity of quantum state

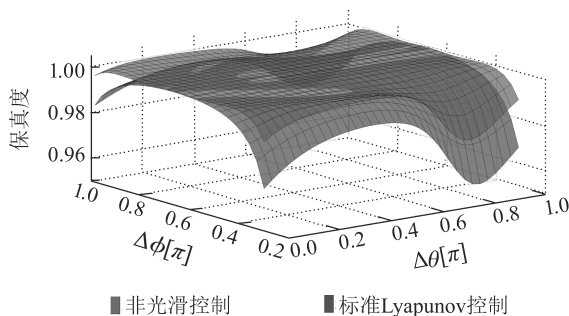


图5 在非光滑控制和标准Lyapunov控制作用下, 初始态上的不确定性对量子态保真度的影响

Fig. 5 Under non-smooth control and standard Lyapunov control, the influence of the uncertainty in the initial state on the fidelity of quantum state

假定控制场的不确定性 Δu_1 在区间 $[-0.5, 0.5]$ 上服从均匀分布, 则图6显示了非光滑控制场(13)的波动 Δu_1 对量子态保真度的影响(60次仿真). 从图6可看出, 受扰动量子系统最终进入了包含目标态的一个邻域内, 这说明非光滑控制对控制场上的有界不确定性有较好的鲁棒性.

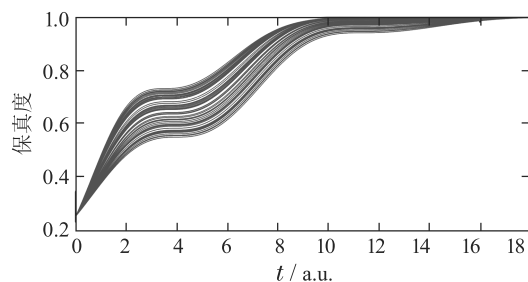


图6 当非光滑控制场 u_1 的不确定性 Δu_1 为区间 $[-0.5, 0.5]$ 上均匀分布的扰动时, 量子态保真度的变化曲线

Fig. 6 The evolution curves of the fidelity of quantum state when the uncertainty Δu_1 in the non-smooth control law u_1 obeys a uniform distribution on the interval $[-0.5, 0.5]$

6 结论

针对两能级量子系统, 本文借助Lyapunov方法设计了一个包含分数幂因子的连续非光滑控制律, 基于固定时间稳定性定理给出了系统在一个与初始态无关的固定时间内关于目标平衡态(纯态和混合态)收敛的条件. 针对分数幂的某些取值可能导致收敛性能差的问题, 本文提出了两种非光滑切换控制策略, 并通过仿真实验验证了该方法的确能够有效改善系统的控制性能. 对于实际量子系统中可能存在的不确定性, 本文也通过将其近似描述为系统自由哈密顿量、控制哈密顿量、初始态和控制场上的有界扰动分析了它们对系统固定时间稳定性的影响. 应该说明, 尽管本文仅考虑了一个控制场的情况, 但相应的控制律设计方法和稳定性分析方法完全适用于多个控制场的情况. 然而, 对于多能级量子系统, 由于很难将系统方程变换为单变量微分方程的形式, 因此在固定时间稳定性的论证上需要引入更多的理论工具. 此外, 测量反馈影响下随机开放量子系统的固定时间控制以及自适应鲁棒固定时间控制问题也是值得研究的问题.

参考文献:

- [1] DONG D, PETERSEN I R. Quantum control theory and applications: A survey. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(12): 2651 – 2671.
- [2] ALTAFINI C, TICOZZI F. Modeling and control of quantum systems: An introduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 1898 – 1917.
- [3] D'ALESSANDRO D, DAHLEH M. Optimal control of two-level quantum systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(6): 866 – 876.
- [4] KUANG S, CONG S. Lyapunov control methods of closed quantum systems. *Automatica*, 2008, 44(1): 98 – 108.
- [5] KUANG S, DONG D, PETERSEN I R. Rapid Lyapunov control of finite-dimensional quantum systems. *Automatica*, 2017, 81: 164 – 175.
- [6] HOU S C, YI X X. Quantum Lyapunov control with machine learning. *Quantum Information Processing*, 2020, 19(1): 1 – 20.

- [7] GAO Q, DONG D, PETERSEN I R. Fault tolerant quantum filtering and fault detection for quantum systems. *Automatica*, 2016, 71: 125 – 134.
- [8] DONG D, SHU C C, CHEN J, et al. Learning control of quantum systems using frequency-domain optimization algorithms. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2021, 29(4): 1791 – 1798.
- [9] KUANG S, GUAN X, DONG D. Finite-time stabilization control of quantum systems. *Automatica*, 2021, 123: 109327.
- [10] KUANG S, GUAN X. Robustness of continuous non-smooth finite-time Lyapunov control for two-level quantum systems. *IET Control Theory & Applications*, 2020, 14(16): 2449 – 2454.
- [11] DONG D, PETERSEN I R. Sliding mode control of two-level quantum systems. *Automatica*, 2012, 48(5): 725 – 735.
- [12] RUSCHHAUPT A, CHEN X, ALONSO D, et al. Optimally robust shortcuts to population inversion in two-level quantum systems. *New Journal of Physics*, 2012, 14(9): 093040.
- [13] BOSCAIN U, CHARLOT G, GAUTHIER J P, et al. Optimal control in laser-induced population transfer for two-and three-level quantum systems. *Journal of Mathematical Physics*, 2002, 43(5): 2107 – 2132.
- [14] MORZHIN O V, PECHEN A N. Minimal time generation of density matrices for a two-level quantum system driven by coherent and incoherent controls. *International Journal of Theoretical Physics*, 2021, 60(8): 576 – 584.
- [15] DONG D, MABROK M A, PETERSEN I R, et al. Sampling-based learning control for quantum systems with uncertainties. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, 23(6): 2155 – 2166.
- [16] YI X X, CUI B, WU C, et al. Effects of uncertainties and errors on a Lyapunov control. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2011, 44(16): 165503.
- [17] KIMURA G, KOSSAKOWSKI A. The bloch-vector space for N-level systems: The spherical-coordinate point of view. *Open Systems & Information Dynamics*, 2005, 12(3): 207 – 229.
- [18] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [19] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 57(8): 2106 – 2110.
- [20] YANG Feng, WEI Changzhu, WU Rong, et al. Fixed-time convergent disturbance observer for first-order uncertain system. *Control and Decision*, 2019, 34(5): 917 – 926.
(杨峰, 韦常柱, 吴荣, 等. 一阶不确定系统的固定时间收敛扰动观测器. 控制与决策, 2019, 34(5): 917 – 926.)
- [21] MIRRAHIMI M, VAN HANDEL R. Stabilizing feedback controls for quantum systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, 46(2): 445 – 467.
- [22] GE S S, VU T L, HANG C C. Non-smooth Lyapunov function-based global stabilization for quantum filters. *Automatica*, 2012, 48: 1031 – 1044.
- [23] GE S S, VU T L, LEE T H. Quantum measurement-based feedback control: A nonsmooth time delay control approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2012, 50(2): 845 – 863.
- [24] DONG D, PETERSEN I R. Sliding mode control of two-level quantum systems. *Automatica*, 2012, 48: 725 – 735.
- [25] LIU Y, KUANG S, CONG S. Lyapunov-based feedback preparation of GHZ entanglement of N -qubit systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(11): 3827 – 3839.

作者简介:

柳 松 硕士研究生, 主要研究方向为量子系统控制, E-mail: sophia12@mail.ustc.edu.cn;

匡 森 副教授, 主要研究方向为量子信息与控制、机器学习与智能控制, E-mail: skuang@ustc.edu.cn.