

基于条件高斯分布的未知输入与状态估计算法

丁 博^{1†}, 杨月全¹, 方华京²

(1. 扬州大学 信息工程学院 自动化专业部, 江苏 扬州 225127;

2. 华中科技大学 人工智能与自动化学院, 湖北 武汉 430074)

摘要: 针对未知输入同时存在于系统方程和测量方程的直接馈通线性随机系统, 提出了一种同时估计未知输入和状态的算法. 首先, 通过将未知输入模型描述为有限方差的高斯分布, 利用条件高斯分布的性质, 推导出新的滤波算法, 以同时得到未知输入估计和状态估计. 其次, 证明了当未知输入的方差趋于无穷大时, 本文提出的算法等价于已有的递归三步滤波算法. 最后, 分析了本文算法的渐进稳定性条件, 结果表明, 与已有算法相比, 本文的算法适用范围更广.

关键词: 未知输入估计; 状态估计; 随机系统; 矩阵极限; 条件高斯分布

引用格式: 丁博, 杨月全, 方华京. 基于条件高斯分布的未知输入和状态估计算法. 控制理论与应用, 2022, 39(7): 1308 – 1314

DOI: 10.7641/CTA.2021.10617

Unknown input and state estimation based on conditional Gaussian distribution

DING Bo^{1†}, YANG Yue-quan¹, FANG Hua-jing²

(1. Department of Automation, College of Information Engineering, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu 225127, China;

2. School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: A simultaneous input and state estimation algorithm is proposed for linear stochastic direct feed-through systems, where the unknown input affects both state and measurement equations. First, by using a specific input model where the input is described as a Gaussian distribution with finite covariance, a new filtering formulation is derived to simultaneously obtain the input and state estimation based on the property of the conditional Gaussian distribution. Moreover, it is proved that the proposed algorithm is equivalent to the existing recursive three-step filtering algorithm when the variance of the unknown input tends to infinity. Finally, the asymptotic stability conditions of the proposed filter are discussed. It is shown that the application of this filter has a wider application range than the existing result.

Key words: unknown input estimation; state estimation; stochastic systems; matrix limit; conditional Gaussian distribution

Citation: DING Bo, YANG Yuequan, FANG Huajing. Unknown input and state estimation based on conditional Gaussian distribution. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(7): 1308 – 1314

1 引言

未知输入和状态估计算法在地球物理和环境应用^[1]、故障估计^[2]以及容错控制^[3]等领域有着广泛的应用, 受到了诸多研究者的关注.

对于未知输入仅出现在系统方程的线性随机系统, 最小方差无偏 (minimum-variance unbiased, MVU) 算法是估计未知输入和状态的一种通用算法^[1]. 随后, 研究者们利用参数化方法推广了MVU算法^[4–6]. 文献[7]和文献[8]分别给出了MVU算法的全局最优性和

稳定性. 文献[9]给出了一种基于多步信息的输入和状态同步估计方法, 减少了噪声的敏感性.

针对直接馈通系统, 即未知输入同时影响状态方程和测量方程的系统, 文献[10]提出了递归3步滤波算法(recursive three-step filter, RTSF)来估计系统的未知输入和状态. 对于直接馈通矩阵不满秩的情况, 文献[11–13]利用奇异值分解的方法来改进相应的算法. 但是, 这种方法仅能得到系统的状态估计而忽略了未知输入估计, 为此, 文献[14]和文献[15]分别提出了5步

收稿日期: 2021–07–13; 录用日期: 2021–10–27.

[†]通信作者. E-mail: dingbo@yzu.edu.cn; Tel.: +86 514-87978319.

本文责任编辑: 王大轶.

国家自然科学基金项目(61803330)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61803330).

递归滤波算法来得到未知输入估计. 值得注意的是, 上述文献中提到的算法都是在输入信息完全未知的情况下得到的. 最近, 文献[16]指出RTSF算法需要系统满足强可检测性(strong detectability)条件, 如果系统不满足强可检测性条件, 则RTSF算法将发散. 这在一定程度上限制了该算法的应用. 然而, 文献[16]只讨论了如何构造出满足强可检测性的模型, 但并没有给出相应的滤波算法. 文献[17]将有限方差的高斯分布做为未知输入的模型, 为未知输入估计算法的设计提出了一个新的思路.

受到文献[17]的启发, 本文针对直接馈通线性随机系统, 采用有限方差的高斯分布作为未知输入的模型^[17], 根据条件高斯分布的性质, 推导出一个新的算法来得到未知输入估计和状态估计. 本算法的贡献主要由以下两点: 1) 利用矩阵极限的性质, 从理论上严格证明了当未知输入模型的方差趋于无穷大时, 本文给出的滤波公式等价于文献[10]提出的RTSF算法, 也即, RTSF算法相当于是本文算法中当未知输入模型的方差趋于无穷大时的特例; 2) 给出了本文提出的滤波公式的稳定性条件. 结果表明, 与RTSF算法相比, 本文给出的滤波算法不需要强可检测性条件, 因而适用性更广.

2 问题描述和RTSF算法

本节, 本文给出直接馈通随机系统的数学模型, 并简要介绍文献[10]提出的RTSF算法.

2.1 问题描述

考虑如下直接馈通线性随机系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Gd_k + w_k, \\ y_k = Cx_k + Hd_k + v_k, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_k \in \mathbb{R}^n$, $d_k \in \mathbb{R}^q$, $y_k \in \mathbb{R}^m$ 分别指系统的状态, 未知输入, 以及测量. 系统噪声 $w_k \in \mathbb{R}^n$ 和测量噪声 $v_k \in \mathbb{R}^m$ 是零均值、互不相关的高斯白噪声, 其方差矩阵分别为 $Q = E[w_k w_k^T]$ 和 $R = E[v_k v_k^T]$, 其中 Q 为半正定矩阵 R 为正定矩阵. A, G, C, H 分别为已知矩阵. 这里 $\text{rank } H = q$. 初始值 x_0 和 d_0 的均值分别为 $\hat{x}_0$ 和 $\hat{d}_0$, 其方差为

$$\begin{bmatrix} P_0^x & P_0^{xd} \\ P_0^{dx} & P_0^d \end{bmatrix},$$

初始值分别与系统噪声 w_k 和测量噪声 v_k 互不相关.

注 1 为表述简明起见, 本文只考虑时不变系统. 应当指出的是, 本文的算法对于时变系统仍然成立.

2.2 RTSF算法

在没有未知输入 d_k 的先验信息的条件下, 可以利用RTSF算法^[10]来得到未知输入的估计和状态估计. 接下来对该算法作一简要介绍, 更多细节请参考文献[10].

步骤 1 时间更新:

$$\hat{x}_{k|k-1}^* = A\hat{x}_{k-1}^* + G\hat{d}_{k-1}^*, \quad (2)$$

$$P_{k|k-1} = [A \ G] \begin{bmatrix} P_{k-1}^x & P_{k-1}^{xd} \\ P_{k-1}^{dx} & P_{k-1}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T \\ G^T \end{bmatrix} + Q. \quad (3)$$

步骤 2 未知输入估计:

$$\tilde{R}_k = CP_{k|k-1}C^T + R, \quad (4)$$

$$M_k = (H^T \tilde{R}_k^{-1} H)^{-1} H^T \tilde{R}_k^{-1}, \quad (5)$$

$$\hat{d}_k^* = M_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}^*), \quad (6)$$

$$P_k^d = (H^T \tilde{R}_k^{-1} H)^{-1}. \quad (7)$$

步骤 3 状态估计:

$$K_k = P_{k|k-1}C^T \tilde{R}_k^{-1}, \quad (8)$$

$$L_k = K_k(I_m - HM_k), \quad (9)$$

$$\hat{x}_k^* = \hat{x}_{k|k-1}^* + L_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}^*), \quad (10)$$

$$P_k^x = P_{k|k-1} - P_{k|k-1}C^T \tilde{R}_k^{-1}(\tilde{R}_k - H(H^T \tilde{R}_k^{-1} H)^{-1} H^T) \tilde{R}_k^{-1} CP_{k|k-1}, \quad (11)$$

$$P_k^{dx} = (P_k^{xd})^T = - (H^T \tilde{R}_k^{-1} H)^{-1} H^T \tilde{R}_k^{-1} CP_{k|k-1}, \quad (12)$$

其中: $\hat{x}_k^*$ 是状态估计, $\hat{d}_k^*$ 是未知输入估计, $\hat{x}_{k|k-1}^*$ 是中间变量, M_k 和 L_k 是滤波增益矩阵, I_m 为 m 阶单位矩阵. 容易验证, M_k 和 L_k 分别满足如下性质:

$$M_k H = I_q, \quad (13)$$

$$L_k H = 0. \quad (14)$$

3 滤波推导

本节, 本文采用有限方差的高斯分布来描述输入信号 d_k , 以此作为辅助信息, 利用条件高斯分布的性质, 推导出模型(1)的滤波公式, 进而得到系统的未知输入估计和状态估计.

假设 1^[17] 令 $d_k \sim \mathcal{N}(\sigma, Q^d)$, ($k > 0$), 并且与初始值 x_0, d_0 以及噪声 w_k, v_k 互不相关.

根据上述假设, 结合系统(1)的模型, 利用高斯分布的条件概率密度, 得到下述算法.

定理 1 在假设1的条件下, 若系统(1)在 $(k-1)$ 时刻的状态估计为 $\hat{x}_{k-1}$, 未知输入估计为 $\hat{d}_{k-1}$, 协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k-1}^x & \mathcal{P}_{k-1}^{xd} \\ \mathcal{P}_{k-1}^{dx} & \mathcal{P}_{k-1}^d \end{bmatrix}, \quad (15)$$

则 k 时刻的估计及协方差矩阵可由下列表达式得到

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1} + G\hat{d}_{k-1}, \quad (16)$$

$$\mathcal{P}_{k|k-1} = [A \ G] \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k-1}^x & \mathcal{P}_{k-1}^{xd} \\ \mathcal{P}_{k-1}^{dx} & \mathcal{P}_{k-1}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T \\ G^T \end{bmatrix} + Q, \quad (17)$$

$$\Gamma_k = C\mathcal{P}_{k|k-1}C^T + HQ^dH^T + R, \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_k = \mathcal{P}_{k|k-1} C^T \Gamma_k^{-1}, \quad (19)$$

$$\mathcal{M}_k = Q^d H^T \Gamma_k^{-1}, \quad (20)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{L}_k (y_k - C \hat{x}_{k|k-1} - H\sigma), \quad (21)$$

$$\hat{d}_k = \sigma + \mathcal{M}_k (y_k - C \hat{x}_{k|k-1} - H\sigma), \quad (22)$$

$$\mathcal{P}_k^x = \mathcal{P}_{k|k-1} - \mathcal{P}_{k|k-1} C^T \Gamma_k^{-1} C \mathcal{P}_{k|k-1}, \quad (23)$$

$$\mathcal{P}_k^d = Q^d - Q^d H^T \Gamma_k^{-1} H Q^d, \quad (24)$$

$$\mathcal{P}_k^{xd} = -\mathcal{P}_{k|k-1} C^T \Gamma_k^{-1} H Q^d, \quad (25)$$

$$\mathcal{P}_k^{dx} = -Q^d H^T \Gamma_k^{-1} C \mathcal{P}_{k|k-1}. \quad (26)$$

证 根据系统(1)和假设1, 以及估计值 $\hat{x}_{k-1}$, $\hat{d}_{k-1}$ 和协方差矩阵(15), 可以得到 $\hat{x}_{k-1}$, $\hat{d}_{k-1}$, $\hat{x}_k$, $\hat{d}_k$ 在前 $(k-1)$ 个测量条件下的联合分布如下:

$$\text{pdf}\left(\begin{bmatrix} x_{k-1} \\ d_{k-1} \\ x_k \\ d_k \end{bmatrix} \middle| y_{1:k-1}\right) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \hat{d}_{k-1} \\ \hat{x}_{k|k-1} \\ \sigma \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k-1}^x & \mathcal{P}_{k-1}^{xd} & \mathcal{A}_{1,k-1}^T & 0 \\ \mathcal{P}_{k-1}^{dx} & \mathcal{P}_{k-1}^d & \mathcal{A}_{2,k-1}^T & 0 \\ \mathcal{A}_{1,k-1} & \mathcal{A}_{2,k-1} & \mathcal{P}_{k|k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q^d \end{bmatrix}\right),$$

其中: $\mathcal{A}_{1,k-1} = A\mathcal{P}_{k-1}^x + G\mathcal{P}_{k-1}^{dx}$, $\mathcal{A}_{2,k-1} = A\mathcal{P}_{k-1}^{xd} + G\mathcal{P}_{k-1}^d$, $\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1} + G\hat{d}_{k-1}$. 同理, 可以得到 $\hat{x}_k$, $\hat{d}_k$ 和 y_k 在前 $(k-1)$ 个测量条件下的联合条件分布为

$$\text{pdf}\left(\begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \middle| y_{1:k-1}\right) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ \sigma \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1} & 0 & \mathcal{P}_{k|k-1} C^T \\ 0 & Q^d & Q^d H^T \\ C\mathcal{P}_{k|k-1} & H Q^d & \Gamma_k \end{bmatrix}\right), \quad (27)$$

其中 $\mathcal{P}_{k|k-1}$ 和 Γ_k 分别由式(17)–(18)给定. 再根据高斯分布的条件概率密度公式, 可以得到条件期望为

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= E(x_k | y_{1:k}) = \\ &= \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{P}_{k|k-1} C^T \Gamma_k^{-1} (y_k - C \hat{x}_{k|k-1} - H\sigma), \\ \hat{d}_k &= E(d_k | y_{1:k}) = \\ &= \sigma + Q^d H^T \Gamma_k^{-1} (y_k - C \hat{x}_{k|k-1} - H\sigma), \end{aligned}$$

整理即得式(19)–(22). 同时由式(27)可知 x_k 和 d_k 的协方差为

$$\text{cov}\left(\begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \middle| y_{1:k}\right) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1} & 0 \\ 0 & Q^d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1} C^T \\ Q^d H^T \end{bmatrix} \Gamma_k^{-1} [C \mathcal{P}_{k|k-1} \quad H Q^d],$$

显然, 上述矩阵的(1, 1)元素即为 $\mathcal{P}_k^x$, (2, 2)元素即为 $\mathcal{P}_k^d$, (1, 2)元素即为 $\mathcal{P}_k^{xd}$, (2, 1)元素即为 $\mathcal{P}_k^{dx}$, 由此可得

式(23)–(26). 证毕.

注2 RTSF算法(2)–(12)是在输入 d_k 的信息完全未知的情况下直接由系统(1)推导得到的, 其推导过程并没有用到任何未知输入的信息. 而本节的算法(16)–(26)的推导则借助了 d_k 的信息. 应当指出的是, 假设1中 d_k 的信息蕴含在其方差 Q^d 之中. 而当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 也就意味着 d_k 的信息趋于未知. 此时, 算法(16)–(26)的结果应当趋近于RTSF算法. 接下来, 本文将利用矩阵极限的工具, 严格证明上述结论, 即, 当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 算法(16)–(26)等价于RTSF算法(2)–(12).

4 等价性证明

本节, 本文将证明本文给出的滤波式(16)–(26)在极限情况下, 即当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 等价于RTSF算法(2)–(12). 在给出主要结论之前, 首先给出了如下引理.

引理1 (矩阵逆引理^[18]) 设 A, B, C, D 是具有适当维数的矩阵, 其中 A 和 D 都是可逆的. 如果 $(A + BD^{-1}C)$ 和 $(D + CA^{-1}B)$ 也可逆, 那么以下式子成立:

$$(A + BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}, \quad (28)$$

$$D^{-1}C(A + BD^{-1}C)^{-1} = (D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}. \quad (29)$$

引理2 设矩阵 $Q^d \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $H \in \mathbb{R}^{m \times q}$, 其中 Q^d 和 R 是正定的, $\text{rank } H = q$, $m \geq q$. 当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 则以下式子成立:

$$(R + HQ^d H^T)^{-1} \rightarrow R^{-1} - R^{-1}H(H^T R^{-1}H)^{-1}H^T R^{-1}, \quad (30)$$

$$Q^d H^T (R + HQ^d H^T)^{-1} \rightarrow (H^T R^{-1}H)^{-1}H^T R^{-1}, \quad (31)$$

$$Q^d - Q^d H^T (R + HQ^d H^T)^{-1} H Q^d \rightarrow (H^T R^{-1}H)^{-1}. \quad (32)$$

证 由于 $\text{rank } H = q$, 且 R 是正定的, 显然可知 $((Q^d)^{-1} + H^T R^{-1}H)^{-1}$ 存在. 利用式(28)可得

$$\begin{aligned} Q^d - Q^d H^T (R + HQ^d H^T)^{-1} H Q^d &= \\ ((Q^d)^{-1} + H^T R^{-1}H)^{-1} &\rightarrow \\ (H^T R^{-1}H)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R + HQ^d H^T)^{-1} &= \\ R^{-1} - R^{-1}H((Q^d)^{-1} + H^T R^{-1}H)^{-1}H^T R^{-1} &\rightarrow \\ R^{-1} - R^{-1}H(H^T R^{-1}H)^{-1}H^T R^{-1}, \end{aligned}$$

由此可知式(32)与式(30)成立. 根据式(29), 可得

$$\begin{aligned} Q^d H^T (R + HQ^d H^T)^{-1} &= \\ ((Q^d)^{-1} + H^T R^{-1}H)^{-1}H^T R^{-1} &\rightarrow \\ (H^T R^{-1}H)^{-1}H^T R^{-1}, \end{aligned}$$

于是式(31)成立. 证毕.

定理2 如果定理1中的滤波式(16)–(26)与RTSF算法(2)–(12)在第 $(k-1)$ 步时的协方差矩阵相等, 也即

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k-1}^x & \mathcal{P}_{k-1}^{xd} \\ \mathcal{P}_{k-1}^{dx} & \mathcal{P}_{k-1}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k-1}^x & P_{k-1}^{xd} \\ P_{k-1}^{dx} & P_{k-1}^d \end{bmatrix}, \quad (33)$$

则当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 有 $\mathcal{M}_k = M_k$, $\mathcal{L}_k = L_k$, 且两种滤波在第 k 步时的协方差矩阵也相等, 即

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^x & \mathcal{P}_k^{xd} \\ \mathcal{P}_k^{dx} & \mathcal{P}_k^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_k^x & P_k^{xd} \\ P_k^{dx} & P_k^d \end{bmatrix}. \quad (34)$$

证明过程 参见附录.

注意到式(21)–(22)可以重新表示为

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{L}_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}) - \mathcal{L}_k H \sigma, \quad (35)$$

$$\hat{d}_k = \mathcal{M}_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}) + (I_q - \mathcal{M}_k H) \sigma, \quad (36)$$

由式(13)–(14)和定理2可得, 当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 下面式子成立:

$$\mathcal{M}_k H \rightarrow I_q, \quad (37)$$

$$\mathcal{L}_k H \rightarrow 0, \quad (38)$$

于是式(35)–(36)分别退化为式(10)和式(6). 根据以上的讨论, 可以马上得到下述定理.

定理3 对于直接馈通线性随机系统(1), 如果初始协方差满足

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_0^x & \mathcal{P}_0^{xd} \\ \mathcal{P}_0^{dx} & \mathcal{P}_0^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0^x & P_0^{xd} \\ P_0^{dx} & P_0^d \end{bmatrix},$$

则当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 滤波式(16)–(26)与RTSF算法(2)–(12)等价.

注3 本节严格证明了, 当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 算法(16)–(26)等价于RTSF算法(2)–(12). 从这个意义上说, RTSF算法相当于本文给出的算法在 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时一个极限. 同时由定理3可知, 即使未知输入的信息完全未知, 也可以通过选取一个适当的 Q^d , 利用滤波公式(16)–(26)来近似代替RTSF算法.

5 渐近稳定性

本节, 本文将讨论滤波式(16)–(26)的渐近稳定特性. 考虑线性时不变随机系统(1), 令

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \begin{bmatrix} A & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} := \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q^d \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &:= [C \ H], \quad \mathbf{X}_k := \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1} & 0 \\ 0 & Q^d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

则(18)式中的 Γ_k 可以改写为

$$\Gamma_k = [C \ H] \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1} & 0 \\ 0 & Q^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ H^T \end{bmatrix} + R =$$

$$C \mathbf{X}_k C^T + R,$$

再由式(23)–(26), 可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^x & \mathcal{P}_k^{xd} \\ \mathcal{P}_k^{dx} & \mathcal{P}_k^d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1} & 0 \\ 0 & Q^d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1} & 0 \\ 0 & Q^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ H^T \end{bmatrix} \\ &\quad \Gamma_k^{-1} \begin{bmatrix} C & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1} & 0 \\ 0 & Q^d \end{bmatrix} = \\ &\quad \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k C^T (C \mathbf{X}_k C^T + R)^{-1} C \mathbf{X}_k, \end{aligned} \quad (39)$$

根据式(17)及式(39)可得到矩阵黎卡提方程如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{X}_k \mathbf{A}^T - \\ &\quad \mathbf{A} \mathbf{X}_k C^T (C \mathbf{X}_k C^T + R)^{-1} C \mathbf{X}_k \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (40)$$

下面将讨论式(40)的矩阵序列的收敛条件, 首先给出两个预备引理.

引理3 $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 是可检测的(detectable), 当且仅当 $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 可检测.

证明过程 参见附录.

同理可以得到下述引理.

引理4 如果 $(\mathbf{A}, Q^{\frac{1}{2}})$ 是可稳的(stabilizable), 则 $(\mathbf{A}, Q^{\frac{1}{2}})$ 也是可稳的.

由文献[18]中的定理14.3可知, 如果 $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 是可检测的, $(\mathbf{A}, Q^{\frac{1}{2}})$ 是可稳的, 则式(40)中的矩阵序列 $\mathbf{X}_k$ 收敛于一个唯一的正定矩阵 $\mathbf{X}^*$. 结合引理3及引理4, 可以得到以下定理.

定理4 如果 $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 是可检测的, $(\mathbf{A}, Q^{\frac{1}{2}})$ 是可稳的, 则对任意初始矩阵 $\mathbf{X}_0$, 式(40)中矩阵序列 $\mathbf{X}_k$ 收敛于一个唯一的正定矩阵 $\mathbf{X}^*$.

注4 根据上述定理, 滤波(16)–(26)的稳定性条件等价于标准Kalman滤波的稳定性条件, 即 $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 可检测且 $(\mathbf{A}, Q^{\frac{1}{2}})$ 可稳. 但是只有这两个条件却不能保证RTSF算法的渐进稳定. 要使RTSF算法稳定, 除了上述两个条件, 还需要满足强可检测性(strong detectability)条件^[16], 即, 对任意的 $z \in C$ 且 $|z| \geq 1$, 下式成立:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} (zI_n - A) & -G \\ C & H \end{bmatrix} = n + q, \quad (41)$$

因此, 与RTSF算法(2)–(12)相比, 滤波(16)–(26)的稳定性条件要弱一些, 其适用性也更广一些. 例如, 当系统(1)的矩阵分别如下所示时:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

由于强可检测性条件(41)不满足, RTSF算法将不能使用. 但是 $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 可检测, 则由定理4可知, 本文的算法依然适用, 因此可以选取一个适当的 Q^d , 利用本文提出的滤波算法来估计系统的状态.

注5 由定理2和定理3可知, 当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 滤波

式(16)–(26)等价于RTSF算法。但是,由定理4可知,两者的稳定性条件并不完全一致。由此可以间接地得知,当强可检测性条件不满足时,随着 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$,矩阵黎卡提方程(40)的解将不再收敛。

6 仿真结果

本节,本文将通过仿真,来说明滤波当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时,滤波式(16)–(26)与RTSF算法(2)–(12)的等价性,并讨论当强可检测性不满足时,两个算法的差别。

例1 考虑如下一维模型:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + d_k + w_k, \\ y_k = x_k + d_k + v_k, \end{cases}$$

其中系统噪声的方差为 $Q = 0.01$,测量噪声的方差为 $R = 0.1$ 。初始状态值为 $\hat{x}_0 = 0.1$,其初始方差为 $P_0^x = 1$ 。未知输入为周期30 s,幅值0.25的正弦波。利用RTSF算法,可以得到滤波的稳态值为 $M = 1, L = 0$ 。状态估计和未知输入估计误差的方差分别为 $P^x = 0.11, P^d = 0.21$,其协方差误差为 $P^{xd} = -0.11$ 。

下面考虑本文的算法(16)–(26),令 $\sigma = 0$,针对不同的 Q^d ,可以得到相应的滤波增益矩阵和滤波结果,如表1中所示。

表1 不同 Q^d 值下本文算法的结果

Table 1 The result of the proposed filter with different value of Q^d

Q_k^d	$\mathcal{L}$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{P}^x$	$\mathcal{P}^d$
1×10^{-1}	0.3657	0.2685	0.0537	0.0634
1	0.0846	0.8321	0.0931	0.1678
1×10^1	0.0106	0.9795	0.1078	0.2047
1×10^2	0.0011	0.9979	0.1097	0.2094
1×10^3	0.0001	0.9997	0.1099	0.2099

可以看出,当 Q^d 越来越大时,本文算法的结果趋近于RTSF算法,从而验证了定理2和定理3的正确性。这也说明了,在应用时可以根据系统的实际情况,选取合适的 Q^d ,利用本文提出的算法来近似替代RTSF算法。从理论上说, Q^d 越大,则本文算法结果越接近于RTSF算法,但 Q^d 的值特别大时可能会导致数值计算溢出的风险。因此,在确定 Q^d 的值时,还需考虑系统模型和硬件情况。

例2 考虑线性随机系统(1),其系统参数矩阵如式(42)所示,其中状态的初始值为 $\hat{x}_0 = [0.01 \ 0.01]^T$,其初始协方差为 $P_0^x = \text{diag}\{1, 1\}$;未知输入的初始值为 $\hat{d}_0 = 0.01$,初始方差为 $P_0^d = 0.01$;状态与未知输入的协方差为 $P_0^{dx^T} = P_0^{xd} = [0 \ 0]$ 。假设未知输入信号为周期为20 s,幅值为0.3的方波。

利用RTSF算法,可以得到系统的状态估计,其估计误差如图1所示,这里的估计误差为状态真实值与

估计值之差的绝对值,即 $e_k = |x_k - \hat{x}_k|$ 。可以发现,由于强可检测性条件(41)不满足,第1个状态的估计误差发散,此时RTSF算法失效。

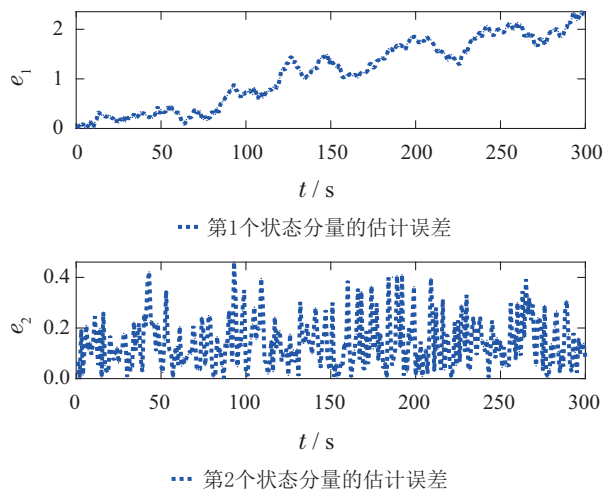


图1 RTSF算法的状态估计误差

Fig. 1 State estimation error by RTSF algorithm

令 $\sigma = 0, Q^d = 1$,根据本文提出的滤波式(16)–(26),可以得到系统的状态估计,估计误差如图2所示,可以看出此时系统的状态估计误差仍是有界的。

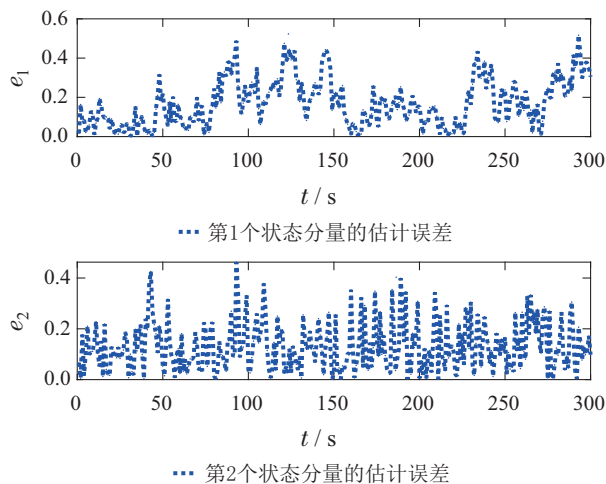


图2 本文算法的状态估计误差

Fig. 2 State estimation error by the proposed algorithm

显然,与RTSF算法相比,本文提出的算法的适用性更广。在强可检测性不满足时,RTSF算法失效,但仍然可以利用本文提出的算法来得到系统的状态估计,只需选择一个合适的 Q^d 即可。应当注意的是,此时状态估计误差会随着 Q^d 的增大而增大,在实际应用时,需要根据实际情况及滤波精度的要求予以选择。

7 结论

本文主要研究了直接馈通线性随机系统的未知输入估计和状态估计问题。通过采用方差有限的高斯分布作为未知输入信号的模型,以此推导出一个新的滤波算法。并利用矩阵极限的方法,从理论上证明了当输入信号的方差趋于无穷大时,本文给出的滤波算法

等价于文献[10]中的RTSF算法. 该结论说明了RTSF算法相当于是本文算法在输入信号的方差趋于无穷大时的极限. 进一步地, 本文详细研究了本文提出的滤波算法的渐进稳定性, 在理论上说明了该算法有更广的适用范围. 应当指出的是, 本文给出的矩阵极限的方法亦可以应用于一般的带有未知输入的线性随机系统, 如文献[17]的证明. 对于非线性滤波^[20]乃至更一般的贝叶斯滤波, 如何利用未知输入模型建立相应的融合滤波算法, 并探讨其极限性质, 有待进一步研究.

参考文献:

- [1] KITANIDIS P K. Unbiased minimum-variance linear state estimation. *Automatica*, 1987, 23(6): 775 – 778.
- [2] XIA Jingping, JIANG Bin, ZHANG Ke. Distributed fault estimation observer design for a class of interconnected nonlinear systems. *Control and Decision*, 2019, 34(4): 727 – 734.
(夏静萍, 姜斌, 张柯. 一类互联非线性系统的分布式故障估计观测器设计. 控制与决策, 2019, 34(4): 727 – 734.)
- [3] LI Bingqian, QIAN Kun, YAN Hao, et al. Robust fault detection and identification and command filtering fault-tolerant control system designed for thrust-vectoring aircraft. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(4): 529 – 539.
(李炳乾, 钱坤, 严浩, 等. 推力矢量飞机鲁棒故障检测与辨识和指令滤波容错控制系统设计. 控制理论与应用, 2021, 38(4): 529 – 539.)
- [4] MOHAMED D, MICHEL Z. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs. *Automatica*, 1997, 33(4): 717 – 719.
- [5] KELLER J Y, MOHAMED D, CARMELLE L. Kalman filter with unknown inputs and robust two-stage filter. *International Journal of Systems Science*, 1998, 29(1): 41 – 47.
- [6] HSIEH C S. Robust two-stage kalman filters for systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2374 – 2374.
- [7] GILLIJS S, MOOR B D. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*, 2007, 43(1): 111 – 116.
- [8] FANG H Z, CALLAFON R A. On the asymptotic stability of minimum-variance unbiased input and state estimation. *Automatica*, 2012, 48(12): 3183 – 3186.
- [9] JI Haori, XI Yugeng, LI Dewei, et al. A multi-step input and state estimation for the linear discrete-time stochastic system and its application to the anaerobic digestion process. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(1): 54 – 60.
(吉浩日, 席裕庚, 李德伟, 等. 线性离散随机系统输入和状态的多步估计方法及应用. 控制理论与应用, 2017, 34(1): 54 – 60.)
- [10] GILLIJS S, MOOR B D. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough. *Automatica*, 2007, 43(5): 934 – 937.
- [11] CHENG Y, YE H, WANG Y Q, et al. Unbiased minimum-variance state estimation for linear systems with unknown input. *Automatica*, 2009, 45(2): 485 – 491.
- [12] HSIEH C S. On the global optimality of unbiased minimum-variance state estimation for systems with unknown inputs. *Automatica*, 2010, 46(4): 708 – 715.
- [13] HSIEH C S. A framework for globally optimal state estimation for systems with unknown inputs (ii): Untrammelled approach. *Asian Journal of Control*, 2012, 14(4): 1002 – 1011.
- [14] WANG H K, ZHAO J, XU Z H, et al. Input and state estimation for linear systems with a rank-deficient direct feedthrough matrix. *ISA Transactions*, 2015, 57(7): 57 – 62.
- [15] YONG S Z, ZHU M H, FRAZZOLI E. A unified filter for simultaneous input and state estimation of linear discrete-time stochastic systems. *Automatica*, 2016, 63(1): 321 – 329.
- [16] KONG H, SUKKARIEH S. An internal model approach to estimation of systems with arbitrary unknown inputs. *Automatica*, 2019, 108: 108482.
- [17] ROBERT R B, MORTEN H, MOHAMMAD A. A Kalman-filtering derivation of simultaneous input and state estimation. *Automatica*, 2019, 108: 108478.
- [18] SIMON D. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Non-linear Approaches*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [19] KAILATH T, SAYED A H, HASSIBI B. *Linear Estimation*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 2000.
- [20] GUO Shenghui, ZHU Fanglai, ZHU Shuxian. State and unknown input estimations for discrete-time Lipschitz nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 375 – 381.
(郭胜辉, 朱芳来, 朱树先. 离散Lipschitz非线性系统状态和未知输入估计. 控制理论与应用, 2018, 35(3): 375 – 381.)

附录

定理2的证明 如果式(33)成立, 则由式(3)和式(17)得 $\mathcal{P}_{k|k-1} = P_{k|k-1}$, 于是 Γ_k 可以改写为

$$\begin{aligned}\Gamma_k &= C\mathcal{P}_{k|k-1}C^T + HQ^dH^T + R_k = \\ &= CP_{k|k-1}C^T + HQ^dH^T + R_k = \\ &= \tilde{R}_k + HQ^dH^T,\end{aligned}\quad (A1)$$

将式(A1)分别代入式(19)–(20), 由引理2可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k &= P_{k|k-1}C^T\Gamma_k^{-1} = \\ &= P_{k|k-1}C^T[\tilde{R}_k + HQ^dH^T]^{-1} \xrightarrow{(Q^d)^{-1} \rightarrow 0} \\ &= P_{k|k-1}C^T[\tilde{R}_k^{-1} - \tilde{R}_k^{-1}H(H^T\tilde{R}_k^{-1}H)^{-1}H^T\tilde{R}_k^{-1}] = \\ &= P_{k|k-1}C^T\tilde{R}_k^{-1} - \\ &= P_{k|k-1}C^T\tilde{R}_k^{-1}H(H^T\tilde{R}_k^{-1}H)^{-1}H^T\tilde{R}_k^{-1} = \\ &= K_k - K_kHM_k = \\ &= L_k, \\ \mathcal{M}_k &= Q^dH^T\Gamma_k^{-1} = \\ &= Q^dH^T[\tilde{R}_k + HQ^dH^T]^{-1} \xrightarrow{(Q^d)^{-1} \rightarrow 0} \\ &= (H^T\tilde{R}_k^{-1}H)^{-1}H^T\tilde{R}_k^{-1} = \\ &= M_k,\end{aligned}$$

由此可知当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 有 $\mathcal{M}_k = M_k$, $\mathcal{L}_k = L_k$.

同理, 当 $(Q^d)^{-1} \rightarrow 0$ 时, 下列等式成立:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_k^x &= \mathcal{P}_{k|k-1} - \mathcal{P}_{k|k-1}C^T\Gamma_k^{-1}C\mathcal{P}_{k|k-1} = \\ &= \mathcal{P}_{k|k-1} - \mathcal{P}_{k|k-1}C^T(\tilde{R}_k + HQ^dH^T)^{-1}C\mathcal{P}_{k|k-1} \rightarrow \\ &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1}C^T[\tilde{R}_k^{-1} - \\ &= \tilde{R}_k^{-1}H(H^T\tilde{R}_k^{-1}H)^{-1}H^T\tilde{R}_k^{-1}]CP_{k|k-1} = \\ &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1}C^T\tilde{R}_k^{-1}CP_{k|k-1} - \\ &= P_{k|k-1}C^T\tilde{R}_k^{-1}H(H^T\tilde{R}_k^{-1}H)^{-1}H^T\tilde{R}_k^{-1}CP_{k|k-1} = \\ &= P_k^x, \\ \mathcal{P}_k^{dx} &= -Q^dH^T\Gamma_k^{-1}C\mathcal{P}_{k|k-1} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -Q^d H^T (\tilde{R}_k + H Q^d H^T)^{-1} C P_{k|k-1} \rightarrow \\
& - (H^T \tilde{R}_k^{-1} H)^{-1} H^T \tilde{R}_k^{-1} C P_{k|k-1} = \\
& P_k^{dx}, \\
& P_k^{xd} = P_k^{dxT} = P_k^{dxT} = P_k^{xd}, \\
& P_k^d = Q^d - Q^d H^T \Gamma_k^{-1} H Q^d = \\
& Q^d - Q^d H^T (\tilde{R}_k + H Q^d H^T)^{-1} H Q^d \rightarrow \\
& (H^T \tilde{R}_k^{-1} H)^{-1} = \\
& P_k^d,
\end{aligned}$$

这就证明了式(34)成立. 证毕.

引理3的证明 假设 (A, C) 不可检测, 则存在 $z_1 \in C$ 且 $|z_1| \geq 1$, 使得

$$\text{rank} \begin{bmatrix} z_1 I_{n+q} - A & -G \\ C & H \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} z_1 I_n - A & -G \\ 0 & z_1 I_q \\ C & H \end{bmatrix} < n + q,$$

这意味着存在向量 $\beta = [\beta_1^T \beta_2^T]^T \in C^{n+q}$, 使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} z_1 I_n - A & -G \\ 0 & z_1 I_q \\ C & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = 0,$$

于是有 $(z_1 I_n - A)\beta_1 - G\beta_2 = 0, C\beta_1 + H\beta_2 = 0, z_1 I_q \beta_2 = 0$. 又因为 $|z_1| \geq 1$, 因此必有 $\beta_2 = 0$. 这样就得到 $(z_1 I_n - A)\beta_1 = 0, C\beta_1 = 0$, 也即

$$\begin{bmatrix} z_1 I_n - A \\ C \end{bmatrix} \beta_1 = 0,$$

所以

$$\text{rank} \begin{bmatrix} z_1 I_n - A \\ C \end{bmatrix} < n.$$

这表明 (A, C) 也不可检测. 同理可得, 如果 (A, C) 不可检测, 则 (A, C) 也不可检测. 证毕.

作者简介:

丁博 博士, 副教授, 目前研究方向为随机系统状态估计、动态系统故障检测与容错控制、智能控制, E-mail: dingbo@yzu.edu.cn;

杨月全 教授, 目前研究方向为机器学习、复杂系统的建模与控制、机器人系统, E-mail: yangyq@yzu.edu.cn;

方华京 教授, 目前研究方向为复杂系统故障诊断、鲁棒及容错控制, E-mail: hjfang@mai.hust.edu.cn.