第 39 卷第 9 期
2022 年 9 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 39 No. 9
Sep. 2022

一类含不匹配干扰的非线性系统非递归鲁棒/自适应一体化控制律设计

董　鑫, 张传林†

(上海电力大学 自动化工程学院, 上海 200090)

摘要: 针对一类含不匹配干扰的非线性系统的控制问题, 基于递归化方案得到鲁棒或自适应控制律是常见的设计思路, 如反步法及其衍生控制策略等. 然而, 递归设计的控制律通常由含多偏微分项的多个虚拟控制器组成, 形式复杂的同时, 控制参数选取也较为困难, 易出现"复杂性爆炸"的问题, 因此较难得到广泛的工程应用. 同时, 因递归设计处理系统的非线性与不确定性的差异较大, 难以实现鲁棒/自适应控制的本质性融合. 本文从一个新颖的非递归控制角度出发, 提出了一个能够融合鲁棒/自适应控制策略的设计框架, 实现系统在不匹配受扰情形下的无静差跟踪. 仅通过一步坐标变换, 在等价的可镇定系统框架下, 根据实际工况来灵活切换合适的控制增益, 为工程师同时提供了两个可供选择的控制方案. 相较于已有算法, 本文所提控制器形式简洁易实现, 参数易调节, 适用范围广. 案例分析与实例仿真验证阐明了所提方法的简洁性及有效性, 并给出了一体化控制器工作模式的选取原则.

关键词: 非线性系统; 不匹配干扰; 鲁棒/自适应控制; 非递归控制; 半全局稳定

引用格式: 董鑫, 张传林. 一类含不匹配干扰的非线性系统非递归鲁棒/自适应一体化控制律设计. 控制理论与应用, 2022, 39(9): 1641 – 1650

DOI: 10.7641/CTA.2022.10858

Non-recursive robust/adaptive integrated control design framework for nonlinear systems with mismatched disturbances

DONG Xin, ZHANG Chuan-lin†

(Department of Automation Engineering, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China)

Abstract: For a class of nonlinear systems with mismatched disturbances, it is a common design approach to develop robust/adaptive control laws based on recursive schemes, such as backstepping method and its derivatives. However, recursive control laws are usually composed of multiple virtual controllers with multiple partial differential terms, which are complex in form and difficult to select control parameters, they are prone to "complexity explosion". Therefore, it is hard to be applied to practical engineering. Additionally, due to the handling variations between nonlinear terms with uncertainties via recursive designs, it is in trouble to achieve an intrinsic blend of robust/adaptive control. In this paper, a novel non-recursive control manner is proposed to integrate robust/adaptive control design framework to achieve an offset-free tracking result for the systems with mismatched disturbances. With a one-step coordinate transformation, the system can flexibly switch to the appropriate bandwidth property according to the practical operating conditions in the framework of an equivalent stabilizable system, providing engineers with two alternative control laws at the same time. Compared with existing algorithms, the proposed control strategy has the following features: the controller form is simple to be implemented, easy to adjust parameters, and has a wide range of applications. Case studies and simulations illustrate the simplicity and effectiveness of the proposed approach. Meanwhile, the selection principles of the integrated controller operating modes are provided.

Key words: nonlinear system; mismatched disturbance; robust/adaptive control; non-recursive control; semi-global stability

Citation: DONG Xin, ZHANG Chuanlin. Non-recursive robust/adaptive integrated control design framework for nonlinear systems with mismatched disturbances. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(9): 1641 – 1650

收稿日期: 2021−09−10; 录用日期: 2022−01−25.

†通信作者: 张传林. E-mail: clzhang@shiep.edu.cn; Tel.: +86 21-35303284.

本文责任编委: 贾英民.

国家自然科学基金项目(62173221)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62173221).

1 引言

本文主要研究具有如下形式的一类含不匹配干扰的非线性系统的跟踪问题:

$$\begin{cases}\dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) + d_i,\ i \in \mathcal{N}_{1\to n-1}{}^{1},\\ \dot{x}_n = u + f_n(x) + d_n,\\ y = x_1,\end{cases} \tag{1}$$

其中: $\bar{x}_i = (x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_i)^{\mathrm{T}}$, $i \in \mathcal{N}_{1\to n}$, $x = \bar{x}_n$, u和y分别为系统的部分状态向量、全状态向量、控制输入和输出, $f_i(\cdot), i \in \mathcal{N}_{1\to n}$为已知的光滑非线性函数, $d_i, i \in \mathcal{N}_{1\to n-1}$表示系统的不匹配干扰, d_n为系统的匹配干扰. 假设初始时刻为零时刻, 初始状态值表述为$x(0) = x_0$, 参考输出跟踪轨迹用y_{r}表示.

针对不确定系统(1), 现有文献中已有诸多控制策略用来求解系统的干扰抑制与跟踪控制问题. 比较常见的方案是通过选取较大的控制增益来抑制干扰的不良影响, 如非线性H_∞控制[1]、齐次压制控制[2]、几乎干扰解耦方法(almost disturbance decoupling)[3]等. 但是这类方法在理论上无法实现系统输出的精确跟踪, 且需要消耗较大的控制能量.

当系统(1)中的干扰d_i存在于外源系统时, 非线性输出调节控制策略常用来解决此情况下系统的精确跟踪控制问题, 见文献[4–7]等. 而当干扰外源模型完全未知或误差较大时, 这类方法无法重构干扰模型以及获取干扰的不稳定信息结构, 因此难以设计出有效的输出调节律[8]. 另一方面, 在干扰满足一定的有界性假设条件时, 基于干扰观测技术的复合控制策略可以有效地补偿干扰对系统性能的影响, 从而提升控制精度. 这类方法已经得到了学术界的广泛关注, 例如, 文献[9]提出了一系列基于主动抗干扰技术的控制策略, 可用于解决系统(1)的精确跟踪问题. 针对一个具有稳定零动态、可反馈线性化的非线性系统, 文献[10]提出了一个扩张高增益观测器, 通过选取合适的观测器增益, 能够实现标称模型的性能恢复. 基于误差放大策略和双极限齐次估计理论, 文献[11]给出了一个固定时间收敛的干扰观测器. 上述仅举几例, 衍生出的理论及工程应用文章可见于文献[12–15]等.

从反馈控制设计的角度来说, 结合上述的干扰软测量及前馈补偿策略, 基于反步法(或扩展反步法等)的递归控制设计策略是解决系统(1)的跟踪控制问题较为常见的方法, 如文献[16–19]等. 但是以此类递归方法来解决受扰系统的控制问题有一些明显的弊端, 主要可归结于如下两点: 1) 递归控制过程中产生的虚拟控制器包含了数量庞大且复杂的偏导数项, 造成了所谓的"维数爆炸"问题, 在高阶系统的控制器设计过程中该现象尤为明显, 极大地增加了控制器的设计难度, 导致工程上难以实现. 2) 鉴于递归设计需要基于Lyapunov函数的递归分析, 因此无法实现稳定性分析与控制设计的本质性分离, 这就容易造成设计参数或自适应更新机制选取较为复杂等问题.

为避免递归控制带来的上述问题, 针对非线性系统如何能够提出一种简洁易用的非递归控制设计框架成为了近年来控制领域的热点. 然而, 现有文献中, 值得参考的相关工作还较少. 例如当系统(1)中$d_i = 0$, $i \in \mathcal{N}_{1\to n}$而存在模型参数不确定时, 文献[20]提出了一个自适应的输出反馈设计思路, 通过引入一个自适应调节的增益函数, 优化了动态性能的同时, 非递归的设计框架保证了设计过程的简洁性. 文献[21]提出了一个带有双层自适应参数更新机制的控制律, 结合自调节预测周期, 提升了控制系统的动态性能, 缓解了受控系统鲁棒性冗余的问题. 针对系统(1), 通过结合主动抗扰技术与齐次系统理论, 文献[22]提出了一个简洁有效的非递归有限时间精确跟踪控制器设计方案. 文献[23]结合了神经网络和高增益干扰观测技术, 实现了非递归自适应的输出反馈控制. 而值得注意的是, 上述文献主要是在鲁棒控制或自适应控制的单一视角下提出具体的控制设计方案, 其在具有一定优势的同时, 也存在一些难以解决的问题. 一般而言, 鲁棒控制设计步骤较为简单, 但鉴于其保守的设计特性, 通常在处理工况变换复杂的情况时, 系统的动态性能难以得到保障. 而相较于鲁棒控制, 自适应控制的设计过程稍显复杂, 同时响应受扰动的影响较大, 但其处理复杂工况时, 可以自适应调节控制带宽以优化控制系统的动态性能. 那么从面向工程实用的角度来说, 一个自然的猜想便是: 在非递归控制的设计框架下, 是否存在一种能够融合鲁棒控制与自适应控制的设计方案, 可以通过切换一体化控制器的工作模式以应对各类型复杂工况? 简而言之即是: 针对系统不同的复杂工况, 在控制律形式完全一致的情形下, 仅需要切换带宽因子的选取方式便能够得到其鲁棒或自适应控制律, 并实现系统输出轨迹的精确跟踪.

为初步给出上述猜想的解决方案, 本文针对系统(1), 在非递归框架下, 首次提出了鲁棒/自适应融合的无静差跟踪控制策略. 首先采用高阶滑模干扰观测器(higher order sliding mode disturbance observer, HOSMDO)对系统不匹配干扰项的各阶导数信息进行精确估计, 结合前馈补偿技术实现在有限时间内恢复不匹配受扰系统的性能; 其次, 通过求解一系列输出调节方程及巧妙设计状态变换函数, 给出系统化的非递归复合控制构建框架; 随后, 分别在不同类型的工况下给出带宽因子的配置方案, 即对应鲁棒/自适应控制律; 最后, 基于半全局稳定性目标, 本文分别给出了鲁棒情形及自适应情形下闭环系统严格的稳定性分析. 相较于现有的相关方案, 本文的主要贡献可以概括为:

1) 结合前馈补偿与反馈控制的设计思路, 通过仅

---

[1] $\mathcal{N}_{i\to j} = \{i, i+1, \cdots, j\}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $i \leqslant j$.

一步的坐标变换, 本质实现了同框架下鲁棒/自适应融合的一体化控制器构建.

2) 基于非递归控制设计框架, 使控制器设计过程与稳定性分析分离开来, 本质上避免了递归控制方法中常见的"维数爆炸"的问题. 同时, 控制参数选取有简洁明确的指导机制, 更易于工程实现.

2　问题描述

本文旨在提出1个鲁棒/自适应融合的非递归复合控制律, 实现系统(1)的无静差轨迹跟踪控制目标, 即 $\lim\limits_{t\to\infty} y = y_{\rm r}$. 首先, 针对系统(1)做如下假设.

假设 1　输出参考信号$y_{\rm r}$及其n阶导数都是分段连续, 完全已知且有界的.

假设 2　干扰$d_i(t)$满足$\max\{\sup\limits_{t\geqslant 0}|\dfrac{\partial d_i^j(t)}{\partial t^j}|\}\leqslant \mathcal{D}$, $i\in\mathcal{N}_{1\to n}$, $j\in\mathcal{N}_{0\to n-i+1}$, 且$\mathcal{D}$是一个正常数.

本文所提控制器是基于基准控制律$u=U(L,K,x,x^*)$, 切换带宽因子的选取法则, 具体表述为

$$\begin{cases}\text{鲁棒模式: } L\text{为一个充分大的正常数;}\\ \text{自适应模式: }\begin{cases}\dot L=\mathcal{L}(L,\hat\mu),\ L_0=1,\\ \dot{\hat\mu}=\psi(L,x,x^*),\end{cases}\end{cases}\tag{2}$$

其中: K为系统的控制参数, $x^*=(x_1^*\ \ x_2^*\ \ \cdots\ \ x_n^*)^{\rm T}$为系统的稳态参考信号, $\hat\mu$为与系统非线性项相关的中间估计量, $\mathcal{L}(\cdot)$, $\psi(\cdot)$为两个恒正的函数, 具体表达式将在文章后续给出. L_0表示带宽因子L的初始值.

3　非递归跟踪控制律设计

本节将逐步给出所提非递归融合控制器构建步骤.

3.1　预处理

假设系统(1)中的干扰项d_i完全已知且给定参考输出$y_{\rm r}$时, 定义辅助状态变量$\bar\varsigma_i=(\varsigma_1\ \ \varsigma_2\ \ \cdots\ \ \varsigma_i)^{\rm T}$, $i\in\mathcal{N}_{1\to n+1}$, ς_i满足以下等式:

$$\begin{cases}\varsigma_1(y_{\rm r})=y_{\rm r},\ \varsigma_2(d,\bar y_{\rm r})=\dot\varsigma_1-f_1(\varsigma_1)-d_1,\\ \quad\vdots\\ \varsigma_{i+1}(d,\bar y_{\rm r})=\dot\varsigma_i-f_i(\bar\varsigma_i)-d_i,\ i\in\mathcal{N}_{2\to n},\end{cases}\tag{3}$$

其中: $\bar y_{\rm r}=(y_{\rm r}\ \ y_{\rm r}^{(1)}\ \ \cdots\ \ y_{\rm r}^{(n)})^{\rm T}$, $d=(d_1\ \ d_1^{(1)}\ \ \cdots\ \ d_1^{(n-1)}\ \ \cdots\ \ d_2\ \ \cdots\ \ d_2^{(n-2)}\ \ \cdots\ \ d_n)^{\rm T}$.

鉴于系统(1)中的d_i是未知的, 首先需要引入干扰软测量对干扰及其导数项进行精确估计, 进而利用前馈补偿, 恢复系统的不确定性能. 为此定义: $l_{i,j}$, $\lambda_i\in\mathbb{R}_+$为设计参数, $\beta_{i,j}=\dfrac{1}{n+2-i-j}$, $\zeta_{i,j}=w_{i,j}-\hbar_{i,j}$, $i\in\mathcal{N}_{1\to n}$, $j\in\mathcal{N}_{0\to n-i+1}$, 则HOSMDO可表述为[24]

$$\begin{cases}\dot w_{i,0}=\hbar_{i,1}+x_{i+1}+f_i(\bar x_i),\ \ i\in\mathcal{N}_{1\to n},\\ \dot w_{i,1}=\hbar_{i,2}\cdots\dot w_{i,k}=\hbar_{i,k+1},\ k\in\mathcal{N}_{1\to n-i+1},\end{cases}\tag{4}$$

其中:

$$\begin{aligned}&\hbar_{i,0}=x_i,\\ &\hbar_{i,1}=-l_{i,0}\lambda_i^{\beta_{i,0}}|\zeta_{i,0}|^{1-\beta_{i,0}}\operatorname{sgn}(\zeta_{i,0})+w_{i,1},\\ &\hbar_{i,j+1}=-l_{i,j}\lambda_i^{\beta_{i,j}}|\zeta_{i,j}|^{1-\beta_{i,j}}\operatorname{sgn}(\zeta_{i,j})+w_{i,j+1},\\ &\hbar_{i,n-i+2}=-l_{i,n-i+1}\lambda_i^{\beta_{i,n-i+1}}|\zeta_{i,n-i+1}|^{1-\beta_{i,n-i+1}}\times\\ &\qquad\operatorname{sgn}(\zeta_{i,n-i+1}),\ i\in\mathcal{N}_{1\to n},\ j\in\mathcal{N}_{1\to n-i}\end{aligned}$$

为观测器系统的内部辅助状态. $x_{n+1}=u$. $w_{i,0}=\hat x_i$, $w_{i,1}=\hat d_i$, $w_{i,j}=\hat d_i^{(j-1)}$分别对应x_i, d_i和$d_i^{(j-1)}$的估计值, $w=(w_{1,0}\ \ w_{1,1}\ \ \cdots\ \ w_{1,n}\ \ \cdots\ \ w_{n,1})^{\rm T}$.

接下来, 在d_i及其对应各阶导数的信息得以精确估计的基础上, 借助干扰观测技术的各估计量, 以$w_{i,j+1}$代替$\dfrac{\partial d_i^j}{\partial t^j}$, 其中$i\in\mathcal{N}_{1\to n}$, $j\in\mathcal{N}_{0\to n-i+1}$. 那么根据式(3)可得到系统(1)状态的稳态参考信号

$$x_i^*=\varsigma_i(w,\bar y_{\rm r}),\ i\in\mathcal{N}_{1\to n+1},\tag{5}$$

其中$x_{n+1}^*=u^*$.

注 1　值得一提的是现有文献中有诸多干扰观测器用以实现干扰软测量, 如非线性干扰观测器(nonlinear disturbance observer, NDO), 扩张状态观测器(extended state observer, ESO), 广义比例积分观测器(generalized proportional integral observer, GPIO)等. 与这些观测器相比, 本文所采用的HOSMDO仅需满足假设2, 而无需对干扰外源模型进行辨识, 即可在有限时间内获取系统干扰及其高阶导数的精确估计信息, 便于后续设计的精确前馈解耦, 从而有效地提高了闭环系统的收敛速度及跟踪精度.

3.2　坐标变换

为了引入非递归控制框架, 结合高增益控制技术, 作如下形式的坐标变换:

$$\begin{cases}\eta_i=(x_i-x_i^*)/L^{\varrho+i-1},\ L\geqslant 1,\ i\in\mathcal{N}_{1\to n},\\ \upsilon=(u-u^*)/L^{\varrho+n},\end{cases}\tag{6}$$

其中: L可以是正常数, 也可以是一个满足$L_0=1$, $\dot L\geqslant 0$的函数, 其设计规则在后续控制设计过程中给出, $\varrho>0$为设计参数, υ为中间控制器.

考虑L为动态增益时, 定义矩阵$P=P^{\rm T}>0$, 且$(A-BK)^{\rm T}P+P(A-BK)\leqslant -I_n$, 其中$(A,B)$为可控标准型矩阵对, $K=(k_1,k_2\cdots k_n)$是Hurwitz多项式$H(s)=s^n+k_ns^{n-1}+\cdots+k_1$的对应系数, I_n为n阶单位阵, $\varTheta\triangleq{\rm diag}\{0,1,\cdots,n-1\}$. ϱ满足如下约束条件:

$$\varrho>\max\{0,-\frac{\lambda_{\min}(\varTheta P+P\varTheta)}{2\lambda_{\min}(P)}\}.$$

根据式(6), 可得如下与式(1)等价的系统形式:

$$\dot\eta=L(A\eta+B\upsilon)-(\varrho I_n+\varTheta)\frac{\dot L}{L}\eta+F(\cdot)+\varepsilon,\tag{7}$$

其中:

$\eta=(\eta_1\ \ \cdots\ \ \eta_n)^{\mathrm{T}},\ \varepsilon=(\varepsilon_1/L^{\varrho}\ \ \cdots\ \ \varepsilon_n/L^{\varrho+n-1})^{\mathrm{T}},$

$\varepsilon_i=f_i(x_1^*,x_2^*\cdots x_i^*)+x_{i+1}^*-\dot{x}_i^*-$
$\quad(f_i(\bar{\varsigma}_i)-\dot{\varsigma}_i+\varsigma_{i+1}),\ i\in\mathcal{N}_{1\to n},$

$\digamma(\cdot)=((f_1(x_1)-f_1(x_1^*))/L^{\varrho}\ \ \cdots$
$\quad(f_n(x)-f_n(x^*))/L^{\varrho+n-1})^{\mathrm{T}}.$

当L为静态增益时, 即式(7)中$\dot{L}=0$, L为一个充分大的定常带宽因子, 此时ϱ可以为任意正常数, 同样地, 可以得出下列与式(1)等价的系统形式:

$$\dot{\eta}=L(A\eta+B\upsilon)+\digamma(\cdot)+\varepsilon. \tag{8}$$

3.3 控制器形式

至此, 无需递归化Lyapunov函数设计, 本文已经能够给出系统(1)的非递归控制律. 具体地, 具有鲁棒/自适应一体化融合结构的非递归控制器可以表述为如下形式, 其设计流程可见于图1.

$$u=L^{\varrho+n}\upsilon+u^*,\ \upsilon=-K\eta;$$
$$\begin{cases}\text{鲁棒模式: } L\text{为一个充分大的正常数;}\\ \text{自适应模式: }\begin{cases}\dot{L}=\kappa_1L\max\{0,\hat{\mu}-\kappa_2L+\kappa_3\},\\ L_0=1,\ \dot{\hat{\mu}}=\kappa_4\|\eta\|^2,\end{cases}\end{cases} \tag{9}$$

其中:

$$\kappa_1\geqslant 2n\lambda_{\max}(P)/(2\varrho\lambda_{\min}(P)+\lambda_{\min}(\varTheta P+P\varTheta)),$$
$$\kappa_2\in(0,\frac{1}{2n\lambda_{\max}(P)}),\ \kappa_3=\frac{\lambda_{\max}(P)}{2},\ \kappa_4>0$$

为设计参数. 本文的主要结果归纳可得到如下定理.

定理 1 对于满足假设1–2的闭环系统(1)(4)(9), 在非递归鲁棒控制情形时任意初值满足$x(0)\in\mho_1\triangleq[-\rho,\rho]^n$; 在非递归自适应控制情形时任意初值满足$(x(0)^{\mathrm{T}}\ \ \hat{\mu}(0))^{\mathrm{T}}\in\mho_2\triangleq[-\rho,\rho]^{n+1},\ \rho\in\mathbb{R}_+$, 都有下列陈述成立: 1) 闭环系统(1)(4)(9) 中所有信号都是一致有界的; 2) $\lim\limits_{t\to\infty}y=y_{\mathrm{r}}$.

其详细证明可见于附录.

注 2 显而易见地, 所提非递归鲁棒/自适应融合控制是建立在同一个变换下, 根据一步法提出的前馈补偿加反馈控制结合的输出调节控制策略, 做到了控制器设计与稳定性分析的本质分离. 值得一提地, 非递归自适应控制通过采用具有自调节能力的带宽增益函数, 实现控制系统在不同工况下能够达到无静差跟踪控制目标, 进一步改进了控制器参数选取机制.

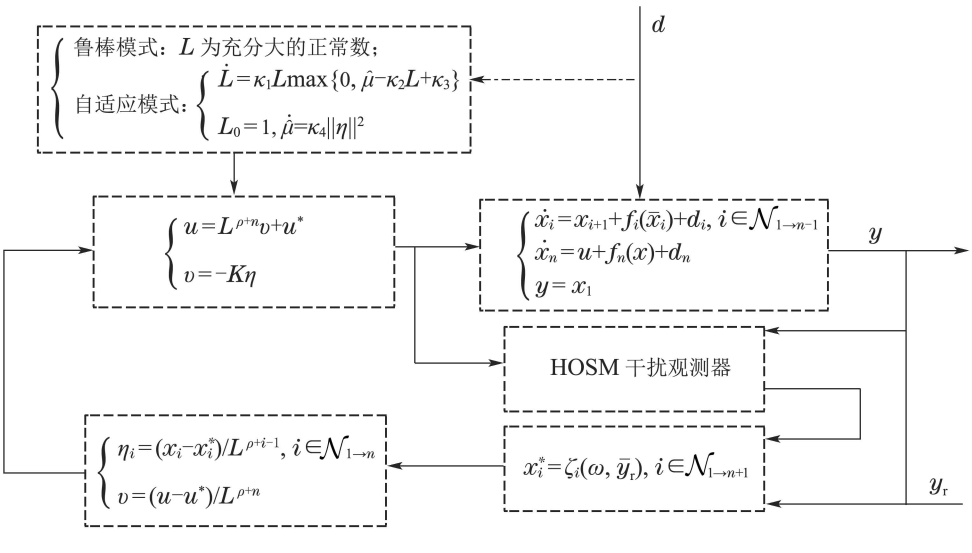


图 1 非递归控制器设计流程框图

Fig. 1 The block diagram of the proposed non-recursive controller design

4 数值与实例仿真对比分析

4.1 数值仿真

本文首先考虑一个简单的二阶系统, 其表达式如下所示:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+\sin x_1+d_1,\\ \dot{x}_2=u+x_1x_2+d_2,\\ y=x_1,\end{cases} \tag{10}$$

其中d_1,d_2分别为系统的不匹配干扰与匹配干扰. 为实现该系统的跟踪控制目标, 文献[19]通过将非线性干扰观测器与反步法相结合, 提出一个主动抗干扰控制策略, 其核心思想是将干扰估计值引入虚拟控制器的每一步设计过程中, 在递归地弥补受扰系统性能的同时, 实现高精度跟踪控制目标. 基于该文方法, 其复合控制器可被表述为以下形式:

$$\begin{cases} d_1: \hat{d}_1 = q_1(x_1 - p_1),\ \dot{p}_1 = x_2 + \sin x_1 + \hat{d}_1; \\ d_2: \hat{d}_2 = q_2(x_2 - p_2),\ \dot{p}_2 = u + x_1 x_2 + \hat{d}_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi_1 = y_{\rm r},\ z_i = x_i - \chi_i,\ i = 1, 2, \\ \chi_2 = -k_1 z_1 - \sin x_1 + \dot{\chi}_1 - \hat{d}_1, \\ u = -k_2 z_2 - x_1 x_2 + k_1 \dot{\chi}_1 + \ddot{\chi}_1 - \hat{d}_2 - \\ \qquad (k_1 + \cos x_1)(x_2 + \sin x_1 + \hat{d}_1), \end{cases} \tag{11}$$

其中: $q_i > 0, p_i, i = 1, 2$分别为设计参数及辅助状态, $\hat{d}_1, \hat{d}_2$为系统干扰的估计值. $k_1 > 0, k_2 > 0, \chi_1, \chi_2$分别为状态$x_1, x_2$对应的期望参考轨迹.

随后, 由所提的非递归一体化复合控制设计框架, 首先利用HOSMDO对干扰进行估计, 具体可描述为

$$d_1 \begin{cases} \dot{w}_{1,0} = x_2 + \sin x_1 + \hbar_{1,1},\ \dot{w}_{1,1} = \hbar_{1,2}, \\ \dot{w}_{1,2} = \hbar_{1,3},\ \zeta_{1,i} = w_{1,i} - \hbar_{1,i},\ i = 0, 1, 2, \\ \hbar_{1,1} = -l_{1,0}\lambda_1^{1/3}|\zeta_{1,0}|^{2/3}\operatorname{sgn}(\zeta_{1,0}) + w_{1,1}, \\ \hbar_{1,2} = -l_{1,1}\lambda_1^{1/2}|\zeta_{1,1}|^{1/2}\operatorname{sgn}(\zeta_{1,1}) + w_{1,2}, \\ \hbar_{1,3} = -l_{1,2}\lambda_1 \operatorname{sgn}(\zeta_{1,2}); \end{cases}$$

$$d_2 \begin{cases} \dot{w}_{2,0} = u + x_1 x_2 + \hbar_{2,1}, \\ \dot{w}_{2,1} = \hbar_{2,2},\ \zeta_{2,i} = w_{2,i} - \hbar_{2,i},\ i = 0, 1, \\ \hbar_{2,1} = -l_{2,0}\lambda_2^{1/2}|\zeta_{2,0}|^{1/2}\operatorname{sgn}(\zeta_{2,0}) + w_{2,1}, \\ \hbar_{2,2} = -l_{2,1}\lambda_2 \operatorname{sgn}(\zeta_{2,1}). \end{cases}$$

紧接着, 计算得到系统所有状态的稳态参考信号为: $x_1^* = y_{\rm r}$, $x_2^* = \dot{y}_{\rm r} - \sin y_{\rm r} - w_{1,1}$, $u^* = \ddot{y}_{\rm r} - \dot{y}_{\rm r}\cos y_{\rm r} - w_{1,2} - y_{\rm r} x_2^* - w_{2,1}$. 通过坐标变换可得$\eta_1 = (x_1 - x_1^*)/L^{\varrho}$, $\eta_2 = (x_2 - x_2^*)/L^{\varrho+1}$, $v = (u - u^*)/L^{\varrho+2}$, 那么非递归鲁棒控制器具体可设计为

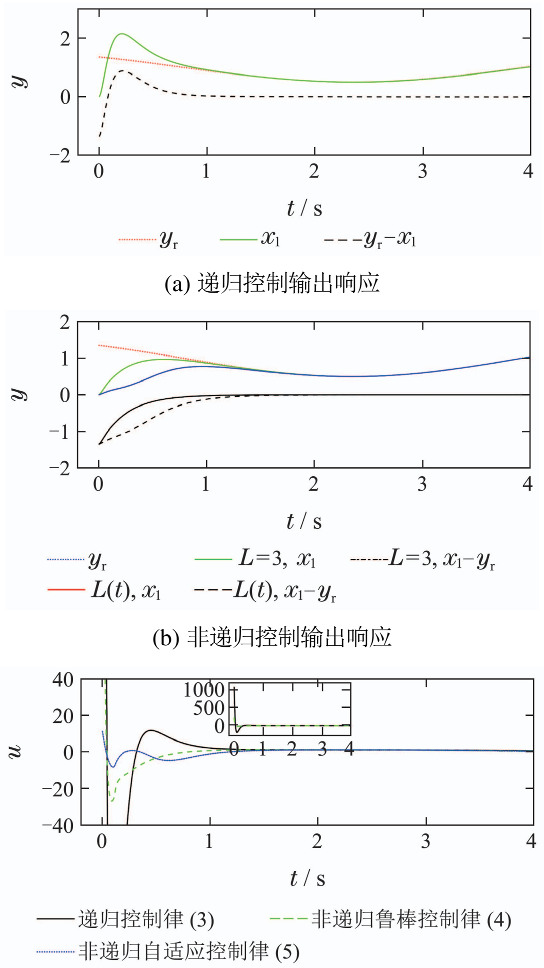
$$u = -L^{\varrho+2}(k_1\eta_1 + k_2\eta_2) + u^*,\ L \in \mathbb{R}_+. \tag{12}$$

随后在控制器(12)形式保持不变的情况下, 将L设计为动态模式, 可以得到非递归自适应控制的双层动态更新机制, 具体可以表述为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{L} = 5L\max\{0, \hat{\mu} - 0.5L + 0.15\}, \\ \dot{\hat{\mu}} = \eta_1^2 + \eta_2^2. \end{cases} \tag{13}$$

在后续仿真中, 通过设定$y_{\rm r} = 1 + 0.5\cos(t + \pi/4)$并选取干扰动态为$d_1 = \sin(0.5t + \pi/3)$, $d_2 = \cos t + \sin(0.5t)$, 分别使用两种不同的控制策略(递归与非递归算法), 可以得到如下的仿真结果, 如图2(a)(b)所示. 其中递归控制器参数为: $[k_1, k_2, q_1, q_2] = [6, 10, 28, 32]$. 非递归控制器参数为: 高阶滑模干扰观测器参数: $[l_{1,0}, l_{1,1}, l_{1,2}, \lambda_1] = [12,\ 13,\ 14,\ 1]$, $[l_{2,0},\ l_{2,1},\ \lambda_2] = [12, 13, 1]$. 鲁棒控制器参数: $[k_1, k_2, L, \varrho] = [25, 18, 3, 1]$. 自适应控制器参数: $[k_1, k_2, \varrho] = [25, 18, 1]$.

从图2(a)(b)可以看出, 两种控制策略都可以实现系统(10)的精确跟踪控制目标. 而值得关注的是: 通过比较式(11)与式(12)–(13), 可以清晰地看出控制律(12)–(13)具有更为简洁的形式, 且非递归控制器主要依赖与系统的标称模型, 而非线性项及其偏微分项等并不直接体现在控制律中, 这与反步法等递归控制算法具有本质的区别.



(a) 递归控制输出响应

(b) 非递归控制输出响应

(c) 输入曲线比较

图 2　递归控制与非递归控制的输出响应及控制输入曲线

Fig. 2　The output responses and control inputs of system controlled by recursive control law and non-recursive

4.2　实例仿真

本小节考虑一个单连杆机械手的无静差跟踪控制问题, 用以阐明所提控制器的有效性. 其具体包含了机电动态和干扰项, 动态方程可表述为[25]

$$\begin{cases} D\ddot{q} + B\dot{q} + N\sin q = \tau + \tau_{d_1}, \\ M\dot{\tau} + H_m\tau = u - K_m\dot{q} + \tau_{d_2}, \end{cases} \tag{14}$$

其中: $q, \dot{q}, \ddot{q}$分别代表连接位置, 速度及加速度. τ是由电气系统产生的扭矩, τ_{d_1}对应着扭矩干扰, τ_{d_2}为系统可测数据的测量误差, u是系统的控制输入, 通常是指机电扭矩. $D = 1\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ 是机械惯量. $B = 1\ \mathrm{N\cdot m\cdot s\cdot rad^{-1}}$为粘性摩擦系数. $N = 10$是一个正常数, 其值与载荷质量与重力系数相关. $M = 1$ H为电枢电抗.

$H_m = 1.0\,\Omega$是电枢电阻. $K_m = 0.2\,\mathrm{N\cdot m\cdot A^{-1}}$为反电动势系数.

接下来, 令$x_1 = q, x_2 = \dot{q}, x_3 = \tau$, 那么系统(14)可被改写成下面的形式:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 - 10\sin x_1 + \tau_{d_1},\\ \dot{x}_3 = u - 0.2x_2 - x_3 + \tau_{d_2}.\end{cases}$$

在后续仿真中, 设定$y_\mathrm{r} = \sin t + \cos(t + \pi/3)$, 干扰则分为3种情况: 1) 时变的小范围干扰$\tau_{d_1} = 2 + 0.5\cos(2t)$, $\tau_{d_2} = 0.5\mathrm{e}^{-t}$; 2) 小信号常值干扰, 形如$\tau_{d_1} = 1, \tau_{d_2} = 2$; 3) 大信号常值干扰, 形如$\tau_{d_1} = 10, \tau_{d_2} = 20$.

那么, 根据上述所提的控制器设计流程, 首先采用高阶滑模干扰观测器对干扰项τ_{d_1}, τ_{d_2}进行估计, 由式(4), 其具体可表述为

$$\tau_{d_1}\begin{cases}\dot{w}_{2,0} = x_3 - x_2 - 10\sin x_1 + \hbar_{2,1},\ \dot{w}_{2,1} = \hbar_{2,2},\\ \dot{w}_{2,2} = \hbar_{2,3},\ \zeta_{1,i} = w_{1,i} - \hbar_{1,i},\ i = 0,1,2,\\ \hbar_{2,1} = -l_{1,0}\lambda_1^{1/3}|\zeta_{2,0}|^{2/3}\,\mathrm{sgn}(\zeta_{2,0}) + w_{2,1},\\ \hbar_{2,2} = -l_{1,1}\lambda_1^{1/2}|\zeta_{2,1}|^{1/2}\,\mathrm{sgn}(\zeta_{2,1}) + w_{2,2},\\ \hbar_{2,3} = -l_{1,2}\lambda_1\,\mathrm{sgn}(\zeta_{2,2});\end{cases}$$

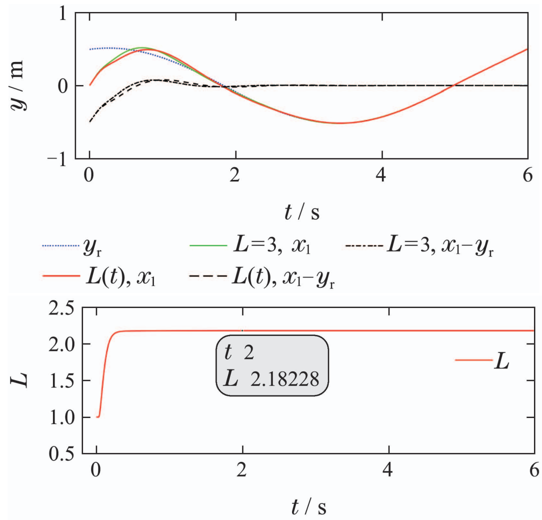
$$\tau_{d_2}\begin{cases}\dot{w}_{3,0} = u - 0.2x_2 - x_3 + \hbar_{3,1},\\ \dot{w}_{3,1} = \hbar_{3,2},\ \zeta_{3,i} = w_{3,i} - \hbar_{3,i},\ i = 0,1,\\ \hbar_{3,1} = -l_{2,0}\lambda_2^{1/2}|\zeta_{3,0}|^{1/2}\,\mathrm{sgn}(\zeta_{3,0}) + w_{3,1},\\ \hbar_{3,2} = -l_{2,1}\lambda_2\,\mathrm{sgn}(\zeta_{3,1}).\end{cases}$$

接下来, 非递归控制器具体可按如下步骤设计: $x_1^* = y_\mathrm{r}, x_2^* = \dot{y}_\mathrm{r}, x_3^* = \ddot{y}_\mathrm{r} + \dot{y}_\mathrm{r} + 10\sin y_\mathrm{r} - w_{2,1}, u^* = y_\mathrm{r}^{(3)} + \ddot{y}_\mathrm{r} + 10\cos y_\mathrm{r}\dot{y}_\mathrm{r} - w_{2,2} + 0.2x_2^* + x_3^* - w_{3,1}$. 通过坐标变换, 可得$\eta_1 = (x_1 - x_1^*)/L^\varrho, \eta_2 = (x_2 - x_2^*)/L^{\varrho+1}, \eta_3 = (x_3 - x_3^*)/L^{\varrho+2}, u = -L^{\varrho+3}(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3) + u^*$.

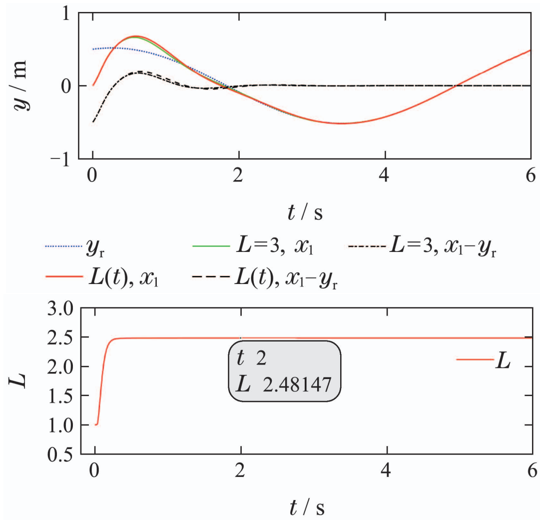
后续仿真主要是将L分为鲁棒模式和自适应模式两种情况进行. 当L动态变化时, 其满足$L_0 = 1, \dot{L} = \kappa_1 L\max\{0, \hat{\mu} - \kappa_2 L + \kappa_3\}, \dot{\hat{\mu}} = \kappa_4(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)$.

参数设置: 状态初值: $x(0)^\mathrm{T} = [0, 1.5, 2]$, HOSM: $[l_{1,0}, l_{1,1}, l_{1,2}, \lambda_1; l_{2,0}, l_{2,1}, \lambda_2] = [15, 23, 32, 1; 12, 18, 1]$, 鲁棒控制器: $[L, \varrho; K^\mathrm{T}] = [3, 3; 15, 18, 22]$. 自适应控制器: $[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \varrho; K^\mathrm{T}] = [10, 1, 0.02, 10, 3; 15, 18, 22]$.

根据图3和图5可以清晰地看出, 本文所提的控制器可以保证系统全状态对应地无静差跟踪至其预期参考信号x_1^*, x_2^*, x_3^*. 进一步地, 通过对不同幅值的干扰进行比较, 阐明了所提的非递归自适应控制器的增益更新机制, 对于系统所受的大小信号干扰, L收敛的上界也会发生变化, 这是由系统状态轨迹与参考轨迹的误差大小不同导致的, 小信号干扰使上述误差相对小, L的收敛值为2.18左右; 而随着干扰信号增大, L的收敛值又随之变为了2.48 左右; 而对于一个幅值在二者之间的时变干扰, 增益L又收敛至2.2左右. 图5(d)则表明相较于非递归鲁棒控制, 非递归自适应控制可以在消耗较低控制能量的情形下, 即实现系统的控制目标.



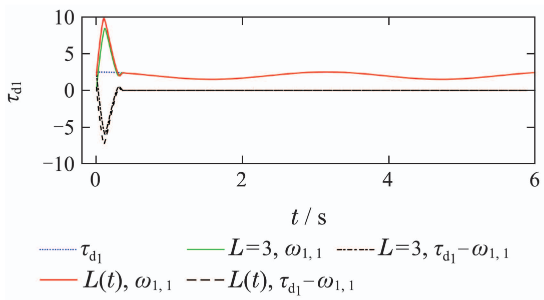
(a) 小信号干扰



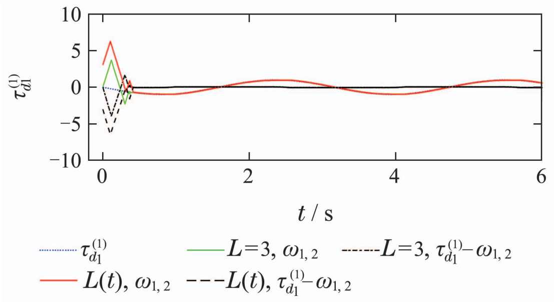
(b) 大信号干扰

图 3 常值干扰下单连杆机械手系统

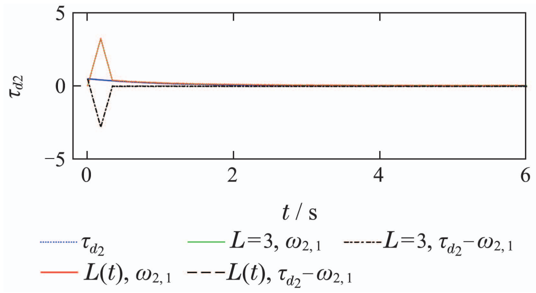
Fig. 3 The response curves of one-link manipulator with constant disturbance cases



(a) τ_{d_1}



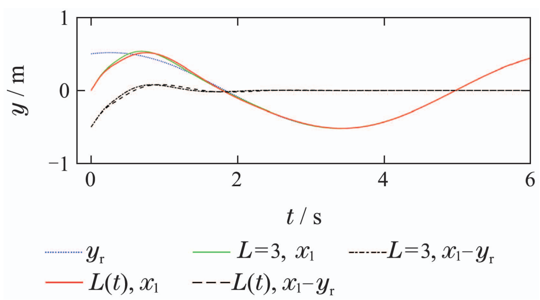
(b) $\tau_{d_1}^{(1)}$



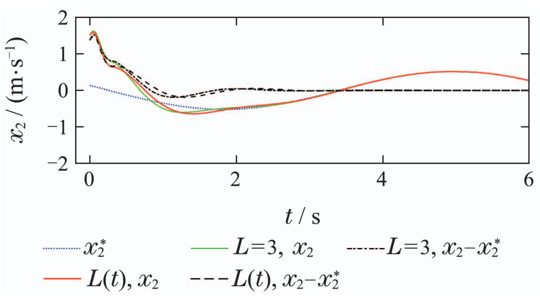
(c) τ_{d_2}

图 4　单连杆机械手系统时变干扰信号曲线

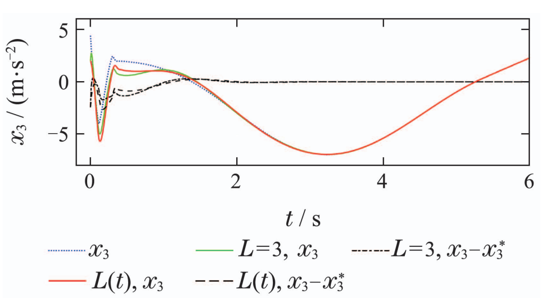
Fig. 4　The time-varying disturbance curves of one-link manipulator



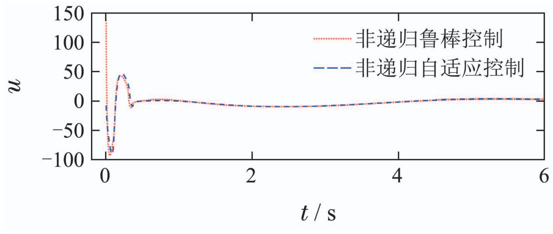
(a) x_1



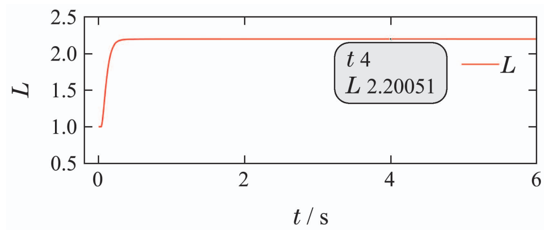
(b) x_2



(c) x_3



(d) u



(e) L

图 5　时变干扰情况下单连杆机械手系统

Fig. 5　The state curves of one-link manipulator with time-varying disturbance case

注 3　对于参数选取, 主要可遵循以下几个原则或步骤: 1) 通过极点配置得出控制增益K, 将闭环系统的极点配置至期望极点处. 2) 求线性矩阵不等式$(A-BK)^{\mathrm{T}}P+P(A-BK)\leqslant -I_n$, 从而获取正定对称阵$P$. 3) 根据参数$\varrho$的选取准则, 确定其范围. $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4$则根据其对应的选取准则求出范围, 并通过"试错法", 选取满足性能指标要求的值. 4) 鲁棒控制的增益L满足充分大的条件, 但是需要指出的是, 随着L的增大, 系统可能会出现鲁棒性冗余. 因此, 类似地使用"试错法", 选择满足性能要求的L值. 自适应控制情形下, L可在不同实际工况下自适应地收敛于不同的值, 以此来缓解控制增益选取过大带来的鲁棒性冗余, 并且提升控制系统的动态性能.

5　总结

本文主要提出了一种针对含不匹配干扰的非线性系统的鲁棒/自适应一体化非递归控制设计框架. 相较于以往的结果, 该非递归复合控制框架有以下的几点贡献: 首先, 所提复合控制律具有更为简洁的表达形式和一定的可移植性, 非线性项约束条件也更为宽松, 设计思路更加多元. 一步法的设计框架将控制器设计与稳定性分析本质性分离开, 极大地方便了工程实际应用. 未来旨在解决多类型的非线性系统的跟踪问题, 例如对于离散系统、状态受限的非线性系统等, 运用本文所提控制框架, 如何实现精确跟踪.

参考文献:

[1] SCHAFT A V D. L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback H_∞ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(6): 770 – 784.

[2] QIAN C. A homogeneous domination approach for global output feedback stabilization of a class of nonlinear systems. *Proceedings of the American Control Conference*. Portland, OR, USA: IEEE, 2005, 7: 4708 – 4715.

[3] QIAN C, LIN W. Almost disturbance decoupling for a class of high-order nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(6): 1208 – 1214.

[4] ISIDORI A, BYRNES C I. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(2): 131 – 140.

[5] CHENG Daizhan, DONG Yali. Output regulation and internal model principle. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(2): 284 – 295.
(程代展, 董亚丽. 输出调节和内模原理. 自动化学报, 2003, 29(2): 284 – 295.)

[6] JIANG Zhongping, HUANG Jie. Stabilization and output regulation by nonlinear feedback: A brief overview. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(9): 1389 – 1401.
(姜钟平, 黄捷. 基于非线性反馈的镇定和输出调节: 简要综述. 自动化学报, 2013, 39(9): 1389 – 1401.)

[7] CHEN Bing, LIU Fenlin, ZHANG Siying. Decentralized output tracking control for a class of linear composite systems with uncertainty via output feedback. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(1): 75 – 81.
(陈兵, 刘粉林, 张嗣瀛. 一类线性不确定组合系统的输出反馈分散输出跟踪控制. 自动化学报, 2001, 27(1): 75 – 81.)

[8] 郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[9] LI S, YANG J, CHEN W, et al. *Disturbance Observer-based Control: Methods and Applications*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2014.

[10] LEONID B, KHALIL H K. Performance recovery of feedback-linearization-based designs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(10): 2324 – 2334.

[11] YANG Feng, WEI Changzhu, WU Rong, et al. Fixed-time convergent disturbance observer for first-order uncertain system. *Control & Decision*, 2019, 34(5): 917 – 926.
(杨峰, 韦常柱, 吴荣, 等. 一阶不确定系统的固定时间收敛干扰观测器. 控制与决策, 2019, 34(5): 917 – 926.)

[12] LI Fanbiao, HUANG Peiming, YANG Chunhua, et al. Sliding mode control design of aircraft electric brake system based on nonlinear disturbance observer. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(11): 2557 – 2569.
(李繁飙, 黄培铭, 阳春华, 等. 基于非线性干扰观测器的飞机全电刹车系统滑模控制设计. 自动化学报, 2021, 47(11): 2557 – 2569.)

[13] HUA Changchun, CHEN Chuanhu, CHEN Jiannan, et al. Prescribed performance control of underwater robot based on disturbance observer. *Control and Decision*, 2022, 37(5): 1160 – 1166.
(华长春, 陈传虎, 陈健楠, 等. 基于干扰观测器的水下机器人预定性能控制. 控制与决策, 2022, 37(5): 1160 – 1166.)

[14] ZHANG Shihua, QI Xiaohui, WAN Hui. Design and performance analysis of generalized nonlinear extended state observer. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(12): 2059 – 2068.
(张世华, 齐晓慧, 万慧. 广义非线性扩张状态观测器设计及性能分析. 控制理论与应用, 2021, 38(12): 2059 – 2068.)

[15] XUE W, BAI W, YANG S, et al. ADRC with adaptive extended state observer and its application to air-fuel ratio control in gasoline engines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, 62(9): 5847 – 5857.

[16] WU Z, DENG F, GUO B, et al. Backstepping active disturbance rejection control for lower triangular nonlinear systems with mismatched stochastic disturbances. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, DOI: 10.1109/TSMC.2021.3050820.

[17] ZHAI D, AN L, DONG J, et al. Robust adaptive fuzzy control of a class of uncertain nonlinear systems with unstable dynamics and mismatched disturbances. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(11): 3105 – 3115.

[18] DAVILA J. Exact tracking using backstepping control design and high-order sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(8): 2077 – 2081.

[19] SUN H, LI S, YANG J, et al. Global output regulation for strict-feedback nonlinear systems with mismatched nonvanishing disturbances. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2015, 25(15): 2631 – 2645.

[20] LEI H, LIN W. Universal adaptive control of nonlinear systems with unknown growth rate by output feedback. *Automatica*, 2006, 42(10): 1783 – 1789.

[21] YAN Y, ZHANG C, NARAYAN A, et al. Generalized dynamic predictive control for nonparametric uncertain systems with application to series elastic actuators. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 14(11): 4829 – 4840.

[22] ZHANG C, YANG J, YAN Y, et al. Semiglobal finite-time trajectory tracking realization for disturbed nonlinear systems via higher-order sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 65(5): 2185 – 2191.

[23] HUANG X, SONG Y, WEN C. Output feedback control for constrained pure-feedback systems: A non-recursive and transformational observer based approach. *Automatica*, 2020, 113: 108789.

[24] LEVANT A. Higher-order sliding modes: Differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 2003, 76(9): 924 – 941.

[25] HO H F, WONG Y K, RAD A B. Adaptive fuzzy approach for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form. *ISA Transactions*, 2008, 47(3): 286 – 299.

附录

为便于后续的稳定性证明, 首先提供一下引理.

引理 1 (杨氏不等式) 设$p>1, q>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则对于$\forall a,b\geqslant 0$, 有如下关系: $a\cdot b\leqslant \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$.

引理 2 (Barbalat引理) 若有$\lim\limits_{t\to\infty} g(t)<\infty$, 且$\dot g$是一致连续的或$\ddot g$是有界的, 那么则有$\lim\limits_{t\to\infty}\dot g(t)=0$.

首先, 定义$e_{i,0}=\hat x_i - x_i$, $e_{i,j}=w_{i,j}-d_i^{(j-1)}$, $j\in\mathcal{N}_{1\to n-i}$, 考虑到假设2, 结合系统(1) 和有限时间干扰观测器(4), 误差动力学系统可表示为

$$\begin{aligned}
&\dot e_{i,0}=e_{i,1}-l_{i,0}\lambda_i^{\beta_{i,0}}|e_{i,0}|^{1-\beta_{i,0}}\operatorname{sgn}(e_{i,0}),\\
&\dot e_{i,j}=e_{i,j+1}-l_{i,j}\lambda_i^{\beta_{i,j}}|e_{i,j}-\dot e_{i,j-1}|^{1-\beta_{i,j}}\times\\
&\qquad \operatorname{sgn}(e_{i,j}-\dot e_{i,j-1}),\\
&\dot e_{i,n-i+1}\in[-\mathcal{D},\mathcal{D}]-l_{i,n-i+1}\lambda_i^{\beta_{i,n-i+1}}|e_{i,n-i+1}-\\
&\qquad \dot e_{i,n-i}|^{1-\beta_{i,n-i+1}}\operatorname{sgn}(e_{i,n-i+1}-\dot e_{i,n-i}).
\end{aligned}\tag{a1}$$

引理 3 [24] 当干扰观测器增益λ_i选取恰当, 满足$\lambda_i>\mathcal{D}$, $i\in\mathcal{N}_{1\to n}$时, 对于任意有界的状态$x(t)$, 式(a1)中所有的状态都是一致有界的, 且存在有限时刻$T_1\in\mathbb{R}_+$使得$e_{i,j}(t)=0$, $i\in\mathcal{N}_{1\to n}$, $j\in\mathcal{N}_{1\to n-i}$, $\forall t\in[T_1,\infty)$.

接下来, 本文将对由所提的非递归鲁棒控制器组成的闭环系统做严格的稳定性证明.

对于系统(8), 构建一个Lyapunov方程$V_1(\eta)=\eta^{\mathrm T}\cdot P\eta$, 则$V_1(\eta)$沿着式(8)对$t$求导可得

$$\begin{aligned}
\dot V_1(\eta)=&\frac{\partial V_1(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm T}}L(A-BK)\eta+\\
&\frac{\partial V_1(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm T}}F(\cdot)+\frac{\partial V_1(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm T}}\varepsilon.
\end{aligned}\tag{a2}$$

根据参数矩阵P满足的条件, 可以得出

$$\frac{\partial V_1(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm T}}L(A-BK)\eta\leqslant -L\|\eta\|^2.\tag{a3}$$

对于非线性项$f_i(\cdot)$, 由式(5)及引理3可知, 对于任意有界的 $x(t)$, x_i^* 是一致有界的, 即存在一个常数 $\bar{\rho}>0$, 使得 $\max\limits_{i\in\mathcal{N}_{1\to n}}\{\sup\limits_{t\geqslant 0}\{x_i^*(t)\}\}\leqslant\bar{\rho}$. 因此给定紧集$\mho\triangleq[-\rho,\rho]^n$, 定义$\eta_i^*\triangleq x_i-x_i^*$和水平集

$$\begin{aligned}&\varOmega=\{\eta^*\in\mathbb{R}^n|\eta^{*\mathrm{T}}P\eta^*\leqslant\\&\qquad c_0\triangleq\sup_{\eta^*\in\varOmega_{\eta^*}[-(\rho+\bar{\rho}),(\rho+\bar{\rho})]^n}\{\eta^{*\mathrm{T}}P\eta^*\}\}.\end{aligned}$$

进一步地, 可以得到$\forall\eta^*(t)\in\varOmega\Rightarrow\eta(t)\in\varOmega$.

对于一个光滑的非线性函数, 由中值定理可知,

$$f_i(\bar{x}_i)-f_i(\bar{x}_i^*)\leqslant\bar{\mu}_i(\bar{x}_i,\bar{x}_i^*)\left(|x_1-x_1^*|+\cdots+|x_i-x_i^*|\right),$$

其中$\bar{\mu}_i(\bar{x}_i,\bar{x}_i^*)$是一个$\mathcal{C}^1$的非负函数[2]. 当$\eta^*\in\varOmega$, 存在一个正常数$\bar{N}$, 使得$|x_j|\leqslant\bar{N}$, $j\in\mathcal{N}_{1\to i}$, 那么则存在一个正常数μ_i, 其值与增益L无关, 使得$\bar{\mu}_i(\bar{x}_i,\bar{x}_i^*)\leqslant\mu_i$, 则有下列关系:

$$\begin{aligned}&\frac{f_i(\bar{x}_i)-f_i(\bar{x}_i^*)}{L^{\varrho+i-1}}\leqslant\\&\frac{\mu_i}{L^{\varrho+i-1}}(|x_1-x_1^*|+\cdots|x_i-x_i^*|)\leqslant\\&\frac{\mu_i}{L^{\varrho+i-1}}(L^{\varrho}|\eta_1|+L^{\varrho+1}|\eta_2|\cdots+L^{\varrho+i-1}|\eta_i|)\leqslant\\&\mu_i\cdot\sqrt{n}\|\eta\|,\ \eta^*\in\varOmega,\end{aligned}\tag{a4}$$

那么进一步地有如下关系:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V_1(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm{T}}}F(L,\varrho,x,x^*)|_{\eta^*\in\varOmega}\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_1(\eta)}{\partial\eta_i}\cdot\frac{f_i(\bar{x}_i)-f_i(\bar{x}_i^*)}{L^{\varrho+i-1}}\leqslant\\&2n\mu\lambda_{\max}(P)\|\eta\|^2=\iota_1\|\eta\|^2,\end{aligned}\tag{a5}$$

其中: $\mu=\mu_{i\max}$, $\iota_1=2n\mu\lambda_{\max}(P)$.

最后, 由假设2及引理3可以得到, ε与干扰观测器的收敛时间T_1有关, 因此与ε相关的稳定性证明将被分成两个部分, 即$t\in[0,T_1)$和$t\in[T_1,\infty)$.

当$0\leqslant t<T_1$时, 由假设2可得存在一个有界常数$E\in\mathbb{R}_+$, 使得 $\sup\limits_{i\in\mathcal{N}_{1\to n}}\{|\varepsilon_i|\}\leqslant E$. 结合引理1, 可以得出

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V_1(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm{T}}}\varepsilon\leqslant2\lambda_{\max}(P)\|\eta\|\|\varepsilon\|\leqslant2\sqrt{n}\lambda_{\max}(P)\|\eta\|E\leqslant\\&\qquad\iota_2\|\eta\|^2+E^2,\end{aligned}\tag{a6}$$

其中$\iota_2=n\lambda_{\max}^2(P)$.

至此, 给出本文定常高增益L的选取准则.

首先定义一个合适的值$\delta\in(0,c_0/2)$. 那么, 对于一个充分大的L, 满足

$$L\geqslant\iota_1+\iota_2+1;E^2\leqslant\frac{L-\iota_1-\iota_2}{2\lambda_{\max}(P)}\delta.\tag{a7}$$

紧接着, 将对状态η的有界性进行阐述. 即是证明对于任意非零的初始状态满足$\eta^*(0)\in\varOmega_{\eta^*}$, 任意$\eta(t)$的轨迹将在$\varOmega$内.

为了更好地阐述, 假设$\eta(t)$在系统渐近稳定过程中出现逃逸. 那么根据有限时间逃逸理论, 存在一个时刻$t_1\geqslant0$, 使得

$$(\eta^*(t_1))^{\mathrm{T}}P(\eta^*(t_1))=c_0,\ \dot{V}_1(\eta(t_1))>0.$$

显而易见的是, $\forall t\in[0,t_1],\eta^*(t)\in\varOmega$, 那么结合式(a3)(a5)–(a6), 式(a2)可被写成

$$\dot{V}_1(\eta)\leqslant-(L-\iota_1-\iota_2)\|\eta\|^2+E^2,\tag{a8}$$

而考虑到$\|\eta\|^2\geqslant\lambda_{\max}^{-1}(P)V_1(\eta)$, 那么式(a8)可被改写为: $\dot{V}_1(\eta(t_1))\leqslant-(L-\iota_1-\iota_2)\lambda_{\max}^{-1}(P)(V_1(\eta(t_1))-\dfrac{1}{2}\delta)\leqslant0$, 该不等式与上述逃逸理论出现了明显的矛盾, 则可以说明假设不成立, 则有$\forall x(0)\in\mho_1\Rightarrow\eta^*\in\varOmega\Rightarrow\eta\in\varOmega,\forall t\geqslant0$. 至此, 式(a2)可以写为

$$\begin{cases}\dot{V}_1(\eta)\leqslant-(L-\iota_1-\iota_2)\|\eta\|^2+E^2, & t\in[0,T_1),\\\dot{V}_1(\eta)\leqslant-(L-\iota_1)\|\eta\|^2, & t\in[T_1,\infty).\end{cases}\tag{a9}$$

结合式(a7), 闭环系统(1)(4)(9)是渐近稳定的. 因此可推得$\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=0$, 即是$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=x^*(t)$, 也就意味着本文所提出的非递归鲁棒控制器可以实现无静差跟踪的控制目标, 即$\lim\limits_{t\to\infty}y=y_{\mathrm{r}}$.

接下来, 本文将对由所提的非递归自适应控制器组成的闭环系统做严格的稳定性证明.

通过构建Lyapunov函数, 其可描述为$V_2(\eta,\tilde{\mu})\triangleq\eta^{\mathrm{T}}P\eta+\tilde{\mu}^2/(2\varpi_1)$, 其中$\varpi_1>0$为设计参数, $\tilde{\mu}=\mu-\hat{\mu}$, μ的定义具体见于上述非递归鲁棒控制稳定性证明中式(a5), $\hat{\mu}$为μ的估计值. 考虑上述$V_2(\eta,\tilde{\mu})$, 其沿着式(8)对t求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(\eta)=&\frac{\partial V_2(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm{T}}}L(A-BK)\eta+\frac{\partial V_2(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm{T}}}F(\cdot)+\\&\frac{\partial V_2(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm{T}}}\varepsilon-\frac{\partial V_2(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm{T}}}(\varrho I_n+\varTheta)\frac{\dot{L}}{L}\eta-\frac{\tilde{\mu}}{\varpi_1}\dot{\hat{\mu}}.\end{aligned}\tag{a10}$$

当$\eta^*\in\varOmega_M\triangleq\{\eta^*\in\mathbb{R}^n|V_2(\eta,\tilde{\mu})\leqslant M+NE^2\}$, 其中 $M\triangleq\sup\limits_{\eta^*\in\varOmega_{\eta^*},\tilde{\mu}\in\varOmega_{\tilde{\mu}}}\{V_2(\eta,\tilde{\mu})\}$, μ必定有界, 且满足

$$\mu\in[\underline{\mu},\bar{\mu}],\ N=\frac{4}{(1-\varpi_3)\lambda_{\max}^{-1}(P)}.$$

此时, 对于任意初始状态满足$\tilde{\mu}(0)\in\varOmega_{\tilde{\mu}}\triangleq[\underline{\mu}-\rho,\bar{\mu}+\rho]$. 接着, 再定义: $\gamma(t)=\tilde{\mu}^2/(2\varpi_1)$, $\varOmega_{\eta^*}\triangleq[-(\rho+\bar{\rho}),(\rho+\bar{\rho})]^n$. 存在合适的$\sigma_0\in(0,\dfrac{M+NE^2}{2})$, 使得

$$E^2<\frac{L(1-\varpi_3)\lambda_{\max}^{-1}(P)}{2}\sigma_0.\tag{a11}$$

接着, 式(a10)右侧的前3项与上述非递归鲁棒控制稳定性证明中式(a3)(a5)–(a6)所得结论相似, 即

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V_2(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm{T}}}L(A-BK)\eta\leqslant-L\|\eta\|^2,\\&\frac{\partial V_2(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm{T}}}F(L,\varrho,x,x^*)\leqslant2n\mu\lambda_{\max}(P)\|\eta\|^2,\\&\eta^*\in\varOmega_M,\\&\frac{\partial V_2(\eta)}{\partial\eta^{\mathrm{T}}}\varepsilon\leqslant n\lambda_{\max}^2(P)\|\eta\|^2+E^2.\end{aligned}\tag{a12}$$

由ϱ的选取准则可知, $2\varrho P+\varTheta P+P\varTheta$为正定的, 那么最

[2] $\mathcal{C}^i$表示所有i阶导数都是连续的可微函数集.

后一项可得如下的不等关系:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V_2(\xi)}{\partial \eta^{\mathrm{T}}}(\varrho I_n+\Theta)\frac{\dot L}{L}\eta \geqslant\\&(2\varrho\lambda_{\min}(P)+\lambda_{\min}(\Theta P+P\Theta))\frac{\dot L}{L}\|\eta\|^2 \geqslant\\&\varpi_2\frac{\dot L}{L}\|\eta\|^2,\end{aligned}\tag{a13}$$

其中$\varpi_2\in(0,2\varrho\lambda_{\min}(P)+\lambda_{\min}(\Theta P+P\Theta))$.

至此, 在干扰观测器收敛前, 即$t<T_1$, 且$\eta^*\in\Omega_M$时, 式(a10)可被写为

$$\begin{aligned}&\dot V_2(\eta,\bar\mu)|_{\eta^*\in\Omega_M}\leqslant\\&-L\|\eta\|^2+2n\mu\lambda_{\max}(P)\|\eta\|^2+E^2+\\&n\lambda^2_{\max}(P)\|\eta\|^2-\varpi_2\frac{\dot L}{L}\|\eta\|^2-\frac{\tilde\mu}{\varpi_1}\dot{\hat\mu}\leqslant\\&-L(1-\varpi_3)\|\eta\|^2-(\dot{\hat\mu}-2n\lambda_{\max}(P)\varpi_1\|\eta\|^2)\times\\&\frac{\tilde\mu}{\varpi_1}+E^2-\frac{\varpi_2}{L}(\dot L-\frac{L}{\varpi_2}2n\lambda_{\max}(P)\times\\&(\hat\mu-\frac{\varpi_3}{2n\lambda_{\max}(P)}L+\frac{\lambda_{\max}(P)}{2}))\|\eta\|^2:=\\&-L(1-\varpi_3)\|\eta\|^2-\frac{\tilde\mu}{\varpi_1}(\dot{\hat\mu}-\kappa_4\|\eta\|^2)+E^2-\\&\frac{\varpi_2}{L}(\dot L-\kappa_1L(\hat\mu-\kappa_2L+\kappa_3))\|\eta\|^2,\end{aligned}\tag{a14}$$

其中:

$$\begin{aligned}&\varpi_3\in(0,1),\\&\kappa_1=\frac{2n\lambda_{\max}(P)}{\varpi_2}\geqslant\\&2n\lambda_{\max}(P)/(2\varrho\lambda_{\min}(P)+\lambda_{\min}(\Theta P+P\Theta)),\\&\kappa_2=\frac{\varpi_3}{2n\lambda_{\max}(P)}\in(0,\frac{1}{2n\lambda_{\max}(P)}),\\&\kappa_3=\lambda_{\max}(P)/2,\ \kappa_4>0.\end{aligned}$$

结合式(a12), 可以得出当$\forall(\eta^{*\mathrm{T}},\tilde\mu)^{\mathrm{T}}\in\Omega_M$, $\exists\varpi_3\in(0,1)$, $t\in[0,T_1)$, 有如下结果:

$$\dot V_2(\eta,\tilde\mu)\leqslant-L(1-\varpi_3)\|\eta\|^2+E^2.\tag{a15}$$

a) 闭环系统所有信号的一致有界性.

对于$L(0)=1$, 可得$(\eta(0)^{\mathrm{T}}\ \tilde\mu(0))^{\mathrm{T}}\in\Omega_M$, 且$V_2(0)\leqslant M+NE^2,\dot V_2(0)\leqslant-L(1-\varpi_3)\|\eta\|^2+E^2$.

首先, 根据$V_2(t)$的形式, 可以得出

$$V_2(\eta,\tilde\mu)\leqslant\lambda_{\max}(P)\|\eta\|^2+\gamma(t).$$

1) 定义集合$\Omega_1=\{\eta\in\mathbb{R}^n|V_2(\eta,\tilde\mu)\leqslant\sigma_0\}$, 那么必然有$\Omega_1\subset\Omega_M$. 而根据式(a11)可得, 任意满足$\tilde\mu(0)\in\Omega_\mu,\eta(0)\in\Omega_{\eta^*}\cap(\Omega_M\backslash\Omega_1)$的状态轨迹$(\eta,\tilde\mu)$, 必将永远在$\Omega_M$内, 并被$\Omega$捕获. 否则必存在一个有限时间$t_2>0$, 有: i) $V_2(0)\leqslant V_2(t_2)=M+NE^2$; ii) $\dot V_2(t_2)\geqslant0$. 而对于$t\in[0,t_2]$有式(a15)成立, 那么有

$$\begin{aligned}&\dot V_2(\eta,\tilde\mu)|_{\eta^*\in\Omega_M}\leqslant\\&-L(1-\varpi_3)\|\eta\|^2+E^2\leqslant\\&-L(1-\varpi_3)\lambda^{-1}_{\max}(P)(V_2-\gamma-\sigma_0/2)<0,\end{aligned}$$

其与假设有明显矛盾, 即$0\leqslant\dot V_2(t_2)<0$. 则$\forall\tilde\mu(0)\in\Omega_\mu,\eta(0)\in\Omega_{\eta^*}\cap(\Omega_M\backslash\Omega_1)\Rightarrow(\eta,\tilde\mu)\in\Omega_M,\forall t\geqslant0$, 也就是当$\Omega_M$是一个不变集时, $\eta(t)$将被Ω_1捕获.

2) 当$t\geqslant T_1$时, 式(a15)可以写为

$$\dot V_2\leqslant-L(1-\varpi_3)\|\eta\|^2\leqslant0,$$

也可以得到此时$(\eta,\tilde\mu)$为有界的.

至此得出结论: η与$\tilde\mu$的半全局一致有界的. 接下来, 将阐述动态增益L的有界性.

首先, 注意到$\dot L\geqslant0$恒成立, 那么假设L是无边界的, 必然存在某个时刻t_3, 使得$\kappa_2L(t_3)>\bar\mu+\kappa_3$, 其中$\bar\mu$为$\hat\mu$的上界值, 因此$L(t_3)>(\bar\mu+\kappa_3)/\kappa_2$. 紧接着

1) $\bar\mu+\kappa_3\leqslant\kappa_2$. 此时, $\bar\mu+\kappa_3-\kappa_2L(t_3)\leqslant\bar\mu+\kappa_3-\kappa_2\leqslant0$. 由式(9)得, $\dot L=0$, 即$\forall t>0$, $L=L(0)\equiv1$.

2) $\bar\mu+\kappa_3>\kappa_2$. 此时, $\bar\mu+\kappa_3-\kappa_2L(0)>0$, $\bar\mu+\kappa_3-\kappa_2L(t_3)<0$, 则由零点定理得, 必然存在时刻$t_0\in(0,t_3)$, 有$\bar\mu+\kappa_3-\kappa_2L(t_0)=0$, 即$\forall t\in(t_0,t_3)$, $\bar\mu+\kappa_3-\kappa_2L(t)<0$, $\dot L=0$, $L\equiv L(t_0)=\frac{\bar\mu+\kappa_3}{\kappa_2}$, 该结论与假设$\bar\mu+\kappa_3-\kappa_2L(t_3)<0$不符. 则此情况下, 可得$\forall t\in[t_0,t_3)$, $L\equiv L(t_0)=(\bar\mu+\kappa_3)/\kappa_2$.

综上所述, L是一致有界的, 即L存在上界$\bar L$满足$\bar L=\max\{1,(\bar\mu+\kappa_3)/\kappa_2\}$.

b) 状态渐近收敛至参考值.

定义$Q\triangleq\int_0^t\|\eta\|^2\mathrm{d}t$, 则

$$\lim_{t\to\infty}Q\leqslant-\int_{T_1}^{\infty}\frac{V_2(\eta,\tilde\mu)}{1-\varpi_3}\mathrm{d}t-\int_0^{T_1}\frac{\dot V_2(\eta,\tilde\mu)-E^2}{1-\varpi_3}\mathrm{d}t\leqslant\frac{V_2(0)+E^2T_1}{1-\varpi_3}<\infty.$$

因此, 结合式(8)(a12)和$\eta\in\Omega_M$, 有$\dot\eta$, $\ddot Q=2(\eta_1\dot\eta_1+\eta_2\dot\eta_2+\cdots+\eta_n\dot\eta_n)$皆是一致有界的. 则根据引理2, 有$\lim\limits_{t\to\infty}\dot Q=0\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to\infty}\eta=0$, 即$\lim\limits_{t\to\infty}y=y_{\mathrm{r}}$.

作者简介:

董　鑫　硕士研究生, 目前研究方向为非线性系统的非递归控制策略设计, E-mail: dongxin@mail.shiep.edu.cn;

张传林　博士, 教授, 主要研究方向为非线性系统控制理论及其在电力系统的应用, E-mail: clzhang@shiep.edu.cn.