第 39 卷第 9 期
2022 年 9 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 39 No. 9
Sep. 2022

热传导方程的时间最优脉冲控制问题的有限元逼近

黄景芳[1], 刘康生[2†], 于　欣[1]

(1. 浙大宁波理工学院 计算机与数据工程学院, 浙江 宁波 315100;

2. 浙江大学 数学科学学院, 浙江 杭州 310027)

摘要: 时间最优控制问题是一类典型的最优控制问题, 受到研究者的广泛关注. 脉冲控制是一种在工程控制中被广泛应用的控制方式. 偏微分方程描述系统的最优控制问题的数值逼近的收敛性为数值求解方法的可行性提供了定性依据. 本文研究热传导方程的时间最优脉冲控制问题的有限元逼近的收敛性. 通过利用投影算子的特性和系统状态的误差估计, 证明了逼近问题的最优时间收敛到原问题的最优时间. 由此进一步利用原问题最优控制的bang-bang性证明了最优控制的收敛性.

关键词: 最优时间; 脉冲; 最优控制; 有限元逼近; 收敛性

引用格式: 黄景芳, 刘康生, 于欣. 热传导方程的时间最优脉冲控制问题的有限元逼近. 控制理论与应用, 2022, 39(9): 1619 – 1623

DOI: 10.7641/CTA.2021.10980

Finite element approximations of impulsive time optimal control problems for heat equations

HUANG Jing-fang[1], LIU Kang-sheng[2†], YU Xin[1]

(1. School of Computer and Data Engineering, NingboTech University, Ningbo Zhejiang 315100, China;
2. School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: The time optimal control problem is a kind of typical optimal control problem, which has attracted the extensive attention of researchers. Impulsive control has been widely used in engineering control. The convergence of numerical approximations of optimal control problems for the systems governed by partial differential equations provides a qualitative basis for the feasibility of the numerical method. In this paper, the convergence of finite element approximation for the impulsive time optimal control problem of heat equations is studied. By making use of the properties of the projection operator and the error estimates of the system state, we prove that the optimal time of the approximation problem converges to the optimal time of the original problem. Furthermore, the convergence of the optimal control is proved by means of the bang-bang property of the optimal control for the original problem.

Key words: optimal time; impulse; optimal control; finite element approximation; convergence analysis

Citation: HUANG Jingfang, LIU Kangsheng, YU Xin. Finite element approximations of impulsive time optimal control problems for heat equations. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(9): 1619 – 1623

1 引言

时间最优控制问题是一类典型的最优控制问题, 受到研究者的广泛关注[1–8]. 然而, 上述研究都是控制作用在连续的时间区间. 关于脉冲控制的无限维时间最优控制问题的研究较少, Duan和Wang[9]对一类时间最优脉冲控制的线性抛物系统进行了研究, 得到了最优控制的存在性和bang-bang性, 以及最小时间泛函关于控制约束界和脉冲时刻的连续性. Wang[10]对一类时间最优脉冲控制的半线性热传导方程进行了研究, 得到了极小时间最优脉冲控制问题和极小范数最优脉冲控制问题的等价性.

偏微分方程最优控制问题的数值计算与逼近方法是近年来非常活跃的领域, 但是, 关于无限维系统时间最优控制问题的有限维逼近的相关研究比较少. Knowles[11]研究了具有边界控制的线性抛物型偏微分方程时间最优控制问题的有限元逼近, 得到了最优时间的误差估计, 其中控制是取值于有限维空间, 不需要逼近. Lasiecka[12]研究了具有边界控制的线性抛物

收稿日期: 2021−10−15; 录用日期: 2021−12−30.
†通信作者. E-mail: ksliu@zju.edu.cn.
本文责任编委: 郭宝珠.
国家重点研发计划课题(2018AAA0100902), 浙江省自然科学基金项目(LY19A010024, LZ21A010001), 浙江省教育厅一般项目(Y202044208)资助.
Supported by the National Key Research and Development Project (2018AAA0100902), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LY19A010024, LZ21A010001), and the General Project of Education Department of Zhejiang Province (Y202044208).

型偏微分方程时间最优控制问题的有限元逼近, 证明了最优时间和最优控制的收敛性. Wang和Zheng[13]研究了线性热传导方程的时间最优内部控制问题的有限元逼近, 利用Pontryagin最大值原理得到最优时间的误差估计. Huang[14]和合作者研究了半线性热传导方程的时间最优控制问题的有限元逼近, 对非光滑初值得到了最优时间的误差估计. Liu[15]和合作者研究了抽象抛物系统的时间最优控制问题有限维逼近的最优时间的误差估计. 然而, 上述文献的控制作用时间都是在连续的时间区间. 在本文中, 将研究热传导方程的脉冲时间最优控制问题的有限元逼近, 控制只施加在离散的脉冲时刻. Yu[16]和合作者研究了具有二次型指标和脉冲控制的热传导方程最优控制问题的有限元逼近, 给出了误差估计. 对于热传导方程的脉冲时间最优控制问题的有限元逼近的收敛性, 未见研究文献, 本文将证明热传导方程的脉冲时间最优控制问题的有限元逼近的最优时间和最优控制的收敛性.

令Ω为$\mathbb{R}^d$ $(d=1,2,3)$中具有光滑边界$\partial\Omega$的有界凸的开区域. 令ω为Ω的非空开子集. 考虑如下脉冲控制的热传导方程:

$$\begin{cases}\partial_t y-\Delta y=0, & 在\Omega\times(0,+\infty)\setminus\{\tau\}中,\\ y=0, & 在\partial\Omega\times(0,+\infty)上,\\ y(0)=y_0, & 在\Omega中,\\ y(\tau)=y(\tau_-)+Bu, & 在\Omega中.\end{cases} \tag{1}$$

这里$y_0\in L^2(\Omega)$, $\tau>0$为脉冲时刻, $u\in L^2(\omega)$为脉冲控制. $y(\tau_-)$表示在$L^2(\Omega)$中y在$t=\tau$的左极限. 算子$B\in\mathcal{L}(L^2(\omega),L^2(\Omega))$.

用$y(\cdot;y_0,u)$表示方程(1)的解. 用$S(t)$表示Δ在$L^2(\Omega)$中生成的半群. 那么方程(1)的解可表示为[17]

$$y(t;y_0,u)=\begin{cases}S(t)y_0, & t\in[0,\tau),\\ S(t)y_0+S(t-\tau)Bu, & t\in[\tau,+\infty).\end{cases} \tag{2}$$

令$r>0, M>0$均为固定的常数. 在本文中, 分别用$\|\cdot\|$和$(\cdot,\cdot)$表示空间$L^2(\Omega)$中的范数和内积, 分别用$\|\cdot\|_{L^2(\omega)}$和$(\cdot,\cdot)_{L^2(\omega)}$表示空间$L^2(\omega)$中的范数和内积. 考虑如下时间最优脉冲控制问题:

$$(\mathcal{TP})\ \inf\{T;T\geqslant\tau,y(T;y_0,u)\in B(0,r),u\in\mathcal{U}\},$$

其中控制约束集为

$$\mathcal{U}=\{u;\|u\|_{L^2(\omega)}\leqslant M\},$$

目标集为

$$B(0,r)=\{w\in L^2(\Omega);\|w\|\leqslant r\}.$$

称

$$T^*\triangleq\inf\{T;T\geqslant\tau,y(T;y_0,u)\in B(0,r),u\in\mathcal{U}\}$$

为问题$(\mathcal{TP})$的最优时间. 对于最优时间T^*, 易知$T^*<+\infty$. 在本文中, 假设

$$\{S(\tau)y_0+Bu;u\in\mathcal{U}\}\cap B(0,r)=\varnothing. \tag{3}$$

如果式(3)不成立, 则$T^*=\tau$. 因此, 在式(3)的假设之下, 有$T^*>\tau$. 如果$u^*\in\mathcal{U}$使得式(1)的解满足$y(T^*;y_0,u^*)\in B(0,r)$, 则称u^*为问题$(\mathcal{TP})$的一个时间最优脉冲控制(简称最优控制). 容易验证问题$(\mathcal{TP})$的最优控制是存在的(文献[9]引理3.1).

首先构建问题$(\mathcal{TP})$的有限元逼近. 考虑$\bar\Omega$的一族三角形剖分τ_h (剖分直径h)以及$\bar\omega$的一族三角形剖分τ_l^ω (剖分直径l), 使用连续分片线性有限元分别对状态空间和控制空间进行离散, 建立时间最优脉冲控制逼近问题$(\mathcal{TP}_{hl})$. 本文的目的是研究逼近问题最优时间和最优控制的收敛性.

本文的结构如下: 在第2章中介绍时间最优脉冲控制问题的有限元逼近; 在第3章中给出主要结果——逼近问题最优时间和最优控制的收敛性.

2 有限元逼近

在这一节中, 将要构建时间最优脉冲控制问题$(\mathcal{TP})$的有限元逼近. 为此, 考虑$\bar\Omega$的一族三角形剖分$\mathcal{T}_h$, 剖分直径

$$h=\max_{T\in\mathcal{T}_h}\operatorname{diam}(T),\ 0<h<1.$$

边界元允许有曲边$(d=2)$或曲面$(d=3)$. 并且, 假定剖分是正则的且是拟一致的.

在三角形剖分$\mathcal{T}_h$上, 采用连续分片线性函数构成的有限元空间$V_h^0(\Omega)$

$$V_h^0(\Omega)=\{v_h\in H_0^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega);\ v_h在T上为线性函数,\ \forall T\in\mathcal{T}_h\}.$$

令$P_h^0:L^2(\Omega)\to V_h^0(\Omega)$为$L^2$–投影算子, 定义为

$$(P_h^0 v,w_h)=(v,w_h),\ \forall\, v\in L^2(\Omega),w_h\in V_h^0(\Omega). \tag{4}$$

那么有下面的估计[18–19]

$$\|v-P_h^0 v\|\leqslant Ch\|v\|_{H_0^1(\Omega)},\ \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

接下来, 假设ω是凸多面体或具有光滑边界的区域. 类似地, 构造$\bar\omega$的正则和拟一致剖分$\mathcal{T}_l^\omega$ (剖分直径l, $0<l<1$). 在$\mathcal{T}_l^\omega$上, 采用有限元空间$V_l(\omega)$

$$V_l(\omega)=\{v_l\in C(\bar\omega);\ v_l在T^\omega上为线性函数,\ \forall T^\omega\in\mathcal{T}_l^\omega\}.$$

由此可见, $V_l(\omega)\subset H^1(\omega)$. 令$P_l:L^2(\omega)\to V_l(\omega)$为$L^2$–投影, 定义为: $\forall v\in L^2(\omega)$, $w_l\in V_l(\omega)$,

$$(P_l v,w_l)_{L^2(\omega)}=(v,w_l)_{L^2(\omega)}. \tag{6}$$

则有如下不等式[20]:

$$\|v - P_l v\|_{L^2(\omega)} \leqslant Cl\|v\|_{H^1(\omega)},\ \forall v \in H^1(\omega). \tag{7}$$

现在, 将式(1)投影到下面的有限维微分方程:

$$\begin{cases} \partial_t y_h(t) - \Delta_h y_h(t) = 0,\ t \in (0, +\infty) \setminus \{\tau\}, \\ y_h(0) = P_h^0 y_0, \\ y_h(\tau) = y_h(\tau_-) + P_h^0 B u_l, \end{cases} \tag{8}$$

其中 $u_l \in V_l(\omega)$, 算子 $-\Delta_h : V_h^0(\Omega) \to V_h^0(\Omega)$ 定义如下:

$$(-\Delta_h v_h, w_h) = \int_\Omega \nabla v_h \cdot \nabla w_h \mathrm{d}x,$$
$$\forall v_h, w_h \in V_0^h(\Omega).$$

下面用$y_h(\cdot; y_0, u)$表示下述方程的解:

$$\begin{cases} \partial_t y_h(t) - \Delta_h y_h(t) = 0,\ t \in (0, +\infty) \setminus \{\tau\}, \\ y_h(0) = P_h^0 y_0, \\ y_h(\tau) = y_h(\tau_-) + P_h^0 B u, \end{cases}$$

其中$u \in L^2(\omega)$. 用$y_h(\cdot; y_0, u_l)$表示方程(8)相对应于控制u_l和初值$P_h^0 y_0$的解. 令$S_h(t)$为Δ_h产生的半群, 那么式(8)的解可表示为

$$y_h(t; y_0, u_l) = \begin{cases} S_h(t) P_h^0 y_0, & t \in [0, \tau), \\ S_h(t) P_h^0 y_0 + S_h(t-\tau) P_h^0 B u_l, & t \in [\tau, +\infty). \end{cases} \tag{9}$$

定义

$$\mathcal{U}_l = \{u_l; u_l \in V_l(\omega), \|u_l\|_{L^2(\omega)} \leqslant M\}$$

和

$$B_h(0, r) = \{w_h \in V_h^0(\Omega); \|w_h\| \leqslant r\}.$$

从而, 问题$(\mathcal{TP})$可被投影为下述时间最优脉冲控制问题:

$$(\mathcal{TP}_{hl})\ \inf\{T; T \geqslant \tau,$$
$$y_h(T; y_0, u_l) \in B_h(0, r),\ u_l \in \mathcal{U}_l\}.$$

称

$$T_{hl}^* \triangleq \inf\{T; T \geqslant \tau,$$
$$y_h(T; y_0, u_l) \in B_h(0, r),\ u_l \in \mathcal{U}_l\}$$

为问题 $(\mathcal{TP}_{hl})$ 的最优时间. 易知对任意的 $h,\ l > 0$, $T_{hl}^* < +\infty$. 如果$u_{hl}^* \in \mathcal{U}_l$使得式(8)的解满足$y_h(T_{hl}^*; y_0, u_{hl}^*) \in B_h(0, r)$, 则称$u_{hl}^*$为问题$(\mathcal{TP}_{hl})$的最优控制. 容易验证问题$(\mathcal{TP}_{hl})$的最优控制存在.

3　最优时间和最优控制的收敛性

在这一节中, 将讨论问题$(\mathcal{TP})$和$(\mathcal{TP}_{hl})$最优时间和最优控制的收敛性. 用C表示不依赖于h和l的一般正常数.

为了得到最优时间的收敛性, 需要应用状态方程解的如下误差估计结果(文献[21]定理3.2).

引理 1　对任意的$v \in L^2(\Omega)$和$t > 0$, 存在$C > 0$使得

$$\|S(t)v - S_h(t) P_h^0 v\| \leqslant Ch^2\ t^{-1} \|v\|. \tag{10}$$

而且, 对任意的$v \in L^2(\Omega)$和$T > 0$,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|S(t)v - S_h(t) P_h^0 v\| \longrightarrow 0,\ 当 h \to 0. \tag{11}$$

为了研究最优控制的收敛性, 首先给出如下结果(文献[9]定理2.1).

引理 2　假设式(3)成立. 设u^*是问题$(\mathcal{TP})$的最优控制. 则u^*是唯一的, 并且是bang-bang控制, 即

$$\|u^*\|_{L^2(\omega)} = M.$$

现在给出最优时间的收敛性.

定理 1　假设式(3)成立. 设T^*和T_{hl}^*分别为问题$(\mathcal{TP})$和$(\mathcal{TP}_{hl})$的最优时间. 那么

$$\lim_{h, l \to 0^+} T_{hl}^* = T^*.$$

证　只需证明对任意小的$\epsilon > 0$, 存在正数$\widetilde{h}$和$\widetilde{l}$使得对任意的$0 < h < \widetilde{h}, 0 < l < \widetilde{l}$,

$$T_{hl}^* \leqslant T^* + \epsilon \tag{12}$$

以及

$$T^* \leqslant T_{hl}^* + \epsilon \tag{13}$$

成立.

首先证明式(12). 令u^*为问题$(\mathcal{TP})$的最优控制. 可知

$$\|y(T^*; y_0, u^*)\| \leqslant r, \tag{14}$$

并且,

$$\begin{aligned} &\|y_h(T^* + \epsilon; y_0, P_l u^*)\| \leqslant \\ &\|y_h(T^* + \epsilon; y_0, P_l u^*) - y(T^* + \epsilon; y_0, P_l u^*)\| + \\ &\|y(T^* + \epsilon; y_0, P_l u^*) - y(T^* + \epsilon; y_0, u^*)\| + \\ &\|y(T^* + \epsilon; y_0, u^*)\|. \end{aligned} \tag{15}$$

注意到$T^* > \tau$, 由式(2)(9)–(10)得

$$\begin{aligned} &\|y_h(T^* + \epsilon; y_0, P_l u^*) - y(T^* + \epsilon; y_0, P_l u^*)\| \leqslant \\ &\|S_h(T^* + \epsilon) P_h^0 y_0 - S(T^* + \epsilon) y_0\| + \\ &\|S_h(T^* + \epsilon - \tau) P_h^0 B P_l u^* - \\ &S(T^* + \epsilon - \tau) B P_l u^*\| \leqslant \\ &C\frac{h^2}{T^* + \epsilon}\|y_0\| + C\frac{h^2}{T^* + \epsilon - \tau}\|P_l u^*\|_{L^2(\omega)} \leqslant \\ &C\frac{h^2}{T^* + \epsilon}\|y_0\| + C\frac{h^2}{T^* + \epsilon - \tau} M \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

当$h \longrightarrow 0^+$.

而且, 根据P_l算子的性质, 有

$$\|y(T^*+\epsilon;y_0,P_lu^*)-y(T^*+\epsilon;y_0,u^*)\| \leqslant \|S(T^*+\epsilon-\tau)B(u^*-P_lu^*)\| \leqslant C\|u^*-P_lu^*\| \longrightarrow 0,\ 当l \longrightarrow 0^+.$$

由上面两个不等式可得存在$h_1>0, l_1>0$使得对任意的$0<h<h_1, 0<l<l_1$, 成立

$$\|y_h(T^*+\epsilon;y_0,P_lu^*)-y(T^*+\epsilon;y_0,P_lu^*)\|+\|y(T^*+\epsilon;y_0,P_lu^*)-y(T^*+\epsilon;y_0,u^*)\| \leqslant r(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1\epsilon}), \tag{16}$$

其中λ_1表示$-\Delta$算子对应齐次, Dirichlet边界的第一个特征根. 根据式(14), 能够得到

$$\|y(T^*+\epsilon;y_0,u^*)\| \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_1\epsilon}\|y(T^*;y_0,u^*)\| \leqslant r\mathrm{e}^{-\lambda_1\epsilon},$$

由此, 结合式(15)和式(16), 可得

$$\|y_h(T^*+\epsilon;y_0,P_lu^*)\| \leqslant r.$$

因而, 考虑到T^*_{hl}是问题$(\mathcal{TP}_{hl})$的最优时间, 可以推得

$$T^*_{hl} \leqslant T^*+\epsilon,\ \forall 0<h<h_1,\ 0<l<l_1,$$

这意味着式(12)成立.

接下来, 将证明式(13). 为此, 令u^*_{hl}为问题$(\mathcal{TP}_{hl})$的最优控制. 则

$$\|y_h(T^*_{hl};y_0,u^*_{hl})\| \leqslant r. \tag{17}$$

显然, $u^*_{hl} \in \mathcal{U}$, 以及

$$\|y(T^*_{hl}+\epsilon;y_0,u^*_{hl})\| \leqslant \|y(T^*_{hl}+\epsilon;y_0,u^*_{hl})-y_h(T^*_{hl}+\epsilon;y_0,u^*_{hl})\|+\|y_h(T^*_{hl}+\epsilon;y_0,u^*_{hl})\|. \tag{18}$$

注意到$T^*_{hl} \geqslant \tau$, 有

$$\|y(T^*_{hl}+\epsilon;y_0,u^*_{hl})-y_h(T^*_{hl}+\epsilon;y_0,u^*_{hl})\| \leqslant \|S_h(T^*_{hl}+\epsilon)P^0_hy_0-S(T^*_{hl}+\epsilon)y_0\|+\|S_h(T^*_{hl}+\epsilon-\tau)P^0_hBu^*_{hl}-S(T^*_{hl}+\epsilon-\tau)Bu^*_{hl}\| \leqslant C\frac{h^2}{T^*_{hl}+\epsilon}\|y_0\|+C\frac{h^2}{T^*_{hl}+\epsilon-\tau}\|u^*_{hl}\|_{L^2(\omega)} \leqslant C\frac{h^2}{\epsilon}\|y_0\|+C\frac{h^2}{\epsilon}M \longrightarrow 0,\ 当h \longrightarrow 0^+.$$

因此, 存在$\widetilde{h}$和$\widetilde{l}$满足$0<\widetilde{h} \leqslant h_1$和$0<\widetilde{l} \leqslant l_1$, 使得对任意的$0<h<\widetilde{h}, 0<l<\widetilde{l}$, 有

$$\|y(T^*_{hl}+\epsilon;y_0,u^*_{hl})-y_h(T^*_{hl}+\epsilon;y_0,u^*_{hl})\| \leqslant r(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1\epsilon})$$

成立. 并且, 依据式(17), 可得

$$\|y_h(T^*_{hl}+\epsilon;y_0,u^*_{hl})\| \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_1\epsilon}\|y_h(T^*_{hl};y_0,u^*_{hl})\| \leqslant r\mathrm{e}^{-\lambda_1\epsilon}.$$

由上述两个不等式和式(18), 可推得

$$\|y(T^*_{hl}+\epsilon;y_0,u^*_{hl})\| \leqslant r.$$

由T^*对于问题$(\mathcal{TP})$的最优性, 可知对任意的$0<h<\widetilde{h}, 0<l<\widetilde{l}$,

$$T^* \leqslant T^*_{hl}+\epsilon.$$

即式(13)成立. 定理的证明完成. 证毕.

下面讨论最优控制的收敛性.

定理 2 假设式(3)成立. 设$u^*_{hl} \in \mathcal{U}_l$为$(\mathcal{TP}_{hl})$的最优控制. 则存在子列$\{u^*_{hl}\}$, 和$u^* \in \mathcal{U}$, 使得

$$u^*_{hl} \longrightarrow u^*在L^2(\omega)中强收敛,\ 当h,l \longrightarrow 0^+.$$

而且, u^*为问题$(\mathcal{TP})$的最优控制.

证 令T^*_{hl}和u^*_{hl}分别为问题$(\mathcal{TP}_{hl})$的最优时间和最优控制. 那么

$$\|y_h(T^*_{hl};y_0,u^*_{hl})\| \leqslant r. \tag{19}$$

而且, 存在子列$\{u^*_{hl}\}$, 和$u^* \in \mathcal{U}$使得

$$u^*_{hl} \longrightarrow u^*在L^2(\omega)中弱收敛,\ 当h,l \longrightarrow 0^+. \tag{20}$$

接下来, 将证明$u^* \in \mathcal{U}$是问题$(\mathcal{TP})$的最优控制. 注意到

$$\lim_{h,l\to0^+} T^*_{hl} = T^*$$

和$T^*>\tau$, 则对充分小的h和l, 有

$$T^*_{hl} > \frac{T^*+\tau}{2} > \tau. \tag{21}$$

因此, 依据式(20), 可得对任意的$\varphi \in L^2(\Omega)$,

$$(y(T^*;y_0,u^*)-y(T^*;y_0,u^*_{hl}),\varphi) = (S(T^*-\tau)B(u^*-u^*_{hl}),\varphi) = (u^*-u^*_{hl},B^*S^*(T^*-\tau)\varphi)_{L^2(\omega)} \longrightarrow 0,\ 当h,l \longrightarrow 0^+ \tag{22}$$

以及

$$(y(T^*;y_0,u^*_{hl})-y(T^*_{hl};y_0,u^*_{hl}),\varphi) = (S(T^*)y_0+S(T^*-\tau)Bu^*_{hl}-S(T^*_{hl})y_0-S(T^*_{hl}-\tau)Bu^*_{hl},\varphi) = (S(T^*)y_0-S(T^*_{hl})y_0,\varphi)+(u^*_{hl},B^*S^*(T^*-\tau)\varphi-B^*S^*(T^*_{hl}-\tau)\varphi)_{L^2(\omega)} \longrightarrow 0,\ 当h,l \longrightarrow 0^+. \tag{23}$$

并且, 由式(10)和式(21)得

$$\|y(T^*_{hl};y_0,u^*_{hl})-y_h(T^*_{hl};y_0,u^*_{hl})\| \leqslant$$

$$C\frac{h^2}{T_{hl}^*}\|y_0\| + C\frac{h^2}{T_{hl}^* - \tau}\|u_{hl}^*\|_{L^2(\omega)} \leqslant$$
$$C\frac{2h^2}{T^* + \tau}\|y_0\| + C\frac{2h^2}{T^* - \tau}M \longrightarrow 0,$$
$$当 h, l \longrightarrow 0^+. \tag{24}$$

结合式(22)–(23)和式(24), 则对任意的$\varphi \in L^2(\Omega)$,

$$(y(T^*; y_0, u^*) - y_h(T_{hl}^*; y_0, u_{hl}^*), \varphi) =$$
$$(y(T^*; y_0, u^*) - y(T^*; y_0, u_{hl}^*), \varphi) +$$
$$(y(T^*; y_0, u_{hl}^*) - y(T_{hl}^*; y_0, u_{hl}^*), \varphi) +$$
$$(y(T_{hl}^*; y_0, u_{hl}^*) - y_h(T_{hl}^*; y_0, u_{hl}^*), \varphi) \longrightarrow 0,$$
$$当 h, l \longrightarrow 0^+. \tag{25}$$

由此, 结合式(19)可得

$$\|y(T^*; y_0, u^*)\| \leqslant \varliminf_{h,l\to 0} \|y_h(T_{hl}^*; y_0, u_{hl}^*)\| \leqslant r. \tag{26}$$

因而u^*是问题$(\mathcal{TP})$的最优控制.

现在说明

$$u_{hl}^* \longrightarrow u^* 在 L^2(\omega) 中强收敛, \ 当 h, l \longrightarrow 0^+.$$

根据式(20)和问题$(\mathcal{TP})$的最优控制u^*是bang-bang控制(引理2), 可得

$$\|u_{hl}^* - u^*\|_{L^2(\omega)}^2 =$$
$$(u_{hl}^* - u^*, u_{hl}^* - u^*)_{L^2(\omega)} =$$
$$(u_{hl}^*, u_{hl}^*)_{L^2(\omega)} - 2(u_{hl}^*, u^*)_{L^2(\omega)} +$$
$$(u^*, u^*)_{L^2(\omega)} \leqslant$$
$$M^2 - 2(u_{hl}^*, u^*)_{L^2(\omega)} + M^2 \longrightarrow$$
$$M^2 - 2(u^*, u^*)_{L^2(\omega)} + M^2 = 0,$$
$$当 h, l \longrightarrow 0^+.$$

定理的证明完成. 证毕.

参考文献:

[1] BARBU V. *Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems*. Boston: Academic Press, 1993.

[2] FATTORINI H O. *Infinite Dimensional Optimization and Control Theory*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.

[3] LIONS J L. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

[4] LI X, YONG J. *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1995.

[5] WANG G. L^∞ null controllability for the heat equation and its consequences for the time optimal control problem. *SIAM Journal on Control Optimization*, 2008, 47(4): 1701 – 1720.

[6] WANG G, WANG L. The bang-bang principle of time optimal controls for the heat equation with internal controls. *Systems & Control Letters*, 2007, 56(11/12): 709 – 713.

[7] WANG L, WANG G. The optimal time control of a phase-field system. *SIAM Journal on Control Optimization*, 2003, 42(4): 1483 – 1508.

[8] WANG G, ZUAZUA E. On the equivalence of minimal time and minimal norm controls for internally controlled heat equations. *SIAM Journal on Control Optimization*, 2012, 50(5): 2938 – 2958.

[9] DUAN L, WANG L, ZHANG C. Minimal time impulse control of an evolution equation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, 183(3): 902 – 919.

[10] WANG L. Minimal time impulse control problem of semilinear heat equation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2021, 188(3): 805 – 822.

[11] KNOWLES G. Finite element approximation of parabolic time optimal control problems. *SIAM Journal on Control Optimization*, 1982, 20(3): 414 – 427.

[12] LASIECKA I. Ritz-Galerkin approximation of the time optimal boundary control problem for parabolic systems with Dirichlet boundary conditions. *SIAM Journal on Control Optimization*, 1984, 22(3): 477 – 500.

[13] WANG G, ZHENG G. An approach to the optimal time for a time optimal control problem of an internally controlled heat equation. *SIAM Journal on Control Optimization*, 2012, 50: 601 – 628.

[14] HUANG J, YU X, LIU K. Semidiscrete finite element approximation of time optimal control problems for semilinear heat equations with nonsmooth initial data. *Systems & Control Letters*, 2018, 116: 32 – 40.

[15] LIU Kangsheng, HUANG Jingfang, YU Xin. Error estimates of finite dimensional approximations for the time optimal control of parabolic systems. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2019, 39(2): 311 – 325.
(刘康生, 黄景芳, 于欣. 抛物系统时间最优控制问题有限维逼近的误差估计. 系统科学与数学, 2019, 39(2): 311 – 325.)

[16] YU X, HUANG J, LIU K. Finite element approximations of impulsive optimal control problems for heat equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, 477(1): 250 – 271.

[17] PAZY A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1983.

[18] BRENNER S C, SCOTT L R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. New York: Springer-Verlag, 1994.

[19] GONG W, YAN N. Finite element approximations of parabolic optimal control problems with controls acting on a lower dimensional manifold. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2016, 54: 1229 – 1262.

[20] QUARTERONI A, VALLI A. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[21] THOMÉE V. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

作者简介:

黄景芳 博士, 讲师, 目前研究方向为微分方程最优控制问题及其计算方法, E-mail: huangjf@zju.edu.cn;

刘康生 博士, 教授, 目前研究方向为分布参数系统的控制理论, E-mail: ksliu@zju.edu.cn;

于 欣 博士, 教授, 目前研究方向为分布参数系统的控制理论及其计算, E-mail: yuxin@zju.edu.cn.