

# 一维反应扩散方程的参数辨识和源项反演

赵志学<sup>1</sup>, 郭宝珠<sup>2</sup>, 韩忠杰<sup>3†</sup>

(1. 天津师范大学 数学科学学院, 天津 300387;

2. 华北电力大学 数理学院, 北京 102206; 3. 天津大学 数学学院, 天津 300354)

**摘要:** 反应扩散方程在许多物理、化学以及生物过程的建模中都有着广泛的应用. 本文研究基于边界控制、边界观测的一维反应扩散方程反应项系数和源项的同时反演问题. 首先, 通过设计边界切换开关控制, 并借助于Dirichlet级数表示的唯一性以及逆谱理论, 证明了反应项系数和源项可以由边界观测唯一确定. 在可辨识性基础上, 结合矩阵束方法和最优扰动正则化算法, 提出了一种稳定的重构系统参数和源项的算法. 最后, 通过数值算例验证了辨识算法的有效性.

**关键词:** 反应扩散方程; 反问题; 参数辨识; 开关切换控制; 矩阵束方法; 最优扰动正则化

**引用格式:** 赵志学, 郭宝珠, 韩忠杰. 一维反应扩散方程的参数辨识和源项反演. 控制理论与应用, 2022, 39(9): 1601 – 1608

DOI: 10.7641/CTA.2022.10992

## Simultaneous inversion of coefficient and source term of a one-dimensional reaction-diffusion equation

ZHAO Zhi-xue<sup>1</sup>, GUO Bao-zhu<sup>2</sup>, HAN Zhong-jie<sup>3†</sup>

(1. School of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China;

2. School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China;

3. School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300354, China)

**Abstract:** Reaction-diffusion equations are widely used in the modeling of many physical, chemical and biological processes. This paper investigates simultaneous inversion of the reaction coefficient and source term for a one-dimensional reaction-diffusion equation based on boundary control and boundary observation. To begin with, by virtue of the uniqueness of the Dirichlet series representation and inverse spectral theory, it is shown that the reaction coefficient and source term can be uniquely determined from the boundary observation by designing a switch on/off boundary control. Next, a stable numerical algorithm is proposed for the simultaneous reconstruction of the reaction coefficient and source term by combining the matrix pencil method and optimal perturbation regularization technique. Finally, the effectiveness of the identification algorithm is verified by a numerical example.

**Key words:** reaction-diffusion equation; inverse problems; parameter identification; switch on/off boundary control; matrix pencil method; optimal perturbation regularization

**Citation:** ZHAO Zhixue, GUO Baozhu, HAN Zhongjie. Simultaneous inversion of coefficient and source term of a one-dimensional reaction-diffusion equation. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(9): 1601 – 1608

## 1 引言

对于物理学、化学以及生物学中的诸多问题, 为了对它们进行定性、定量研究, 就要建立各种数学模型, 其中大量的数学模型都可以归结为反应扩散方程. 实际上, 工业中的许多控制都是控制温度. 此外, 外来物种的入侵以及大气、地下水污染等问题也都是典型的反应扩散问题<sup>[1-2]</sup>, 对此都可以通过建立相应的反应

扩散模型来研究.

反应扩散方程的标准形式为 $\omega_t = \Delta\omega + f(\omega)$ , 方程右端表示两个物理过程的结合, 其中第1项为扩散项, 第2项为反应项. 对于这类方程的正演问题, 相关研究成果很多, 并且在化学化工、热流模型以及种群动力学等领域有着广泛的应用. 然而, 对于从实际问题中建立起的数学模型, 系统控制方程中的参数通常

收稿日期: 2021-10-18; 录用日期: 2022-02-21.

†通信作者. E-mail: zjhan@tju.edu.cn; Tel.: +86 22-27402850.

本文责任编辑: 王军民.

天津市教委科研计划项目(2018KJ157)资助.

Supported by the Science & Technology Development Fund of Tianjin Education Commission for Higher Education (2018KJ157).

是未知的,源项以及初始值也可能难以直接测量.因此,如何借助于一些易于测量的数据,通过设计算法或发展相关技术对这些未知量进行识别和确定,成为一类具有重要研究意义的课题.

当反应项为 $\omega$ 的线性函数时,反应扩散方程可用如下抛物型方程来描述:

$$\omega_t = \Delta\omega - q(x)\omega + b(x,t), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

其中: $q(x)$ 称为反应项系数, $b(x,t)$ 为源项.已有的反问题研究中大多处理的是单一的反应项系数或源项辨识问题.例如,当系统源项 $b(x,t) = 0$ 时,Avdonin等人应用边界控制方法研究了基于边界控制、边界观测的反应项系数辨识问题<sup>[3]</sup>; Boumenir等人通过傅里叶分析方法证明了反应项系数可以由边界观测唯一确定<sup>[4]</sup>.当反应项系数 $q(x) = 0$ 时,相应的反问题实际上成为热传导方程的源项反演问题,相关的研究成果也非常丰富,大部分文献中要么假定源项仅依赖于空间变量<sup>[5]</sup>或时间变量<sup>[6]</sup>,要么假定源项满足时空分离性 $b(x,t) = h(t)f(x)$ <sup>[7-8]</sup>,而一般情形时的源项 $b(x,t)$ 辨识研究结果相对较少<sup>[9]</sup>.此外,一些学者也对系数和源项的联合反演进行了研究,其中辨识所需观测数据主要分为3类:边界观测 $\omega(x_0,t)$  ( $x_0 \in \partial\Omega$ ),固定时刻观测 $\omega(x,T)$  ( $T > 0$ ),以及时间积分观测 $\int_0^T \mu(t) \cdot \omega(x,t)dt$ ,其中 $\mu(t)$ 为权函数.例如,文献[10]分别在固定时刻观测和边界观测情形研究了反应项系数和源项的同时辨识问题,但其要求系统初值取遍状态空间一组标准正交基中的所有元素,这在实际中是不现实的;文献[11]研究了根据3个不同时刻的温度测量同时辨识系统的反应项系数、初值及源项;文献[12]研究了基于两个不同权函数时间积分观测的系数和源项同时反演问题,并给出了数值辨识算法.

从实际工程应用的角度看,很多情况下边界观测更易实现.例如,系统(1)可以用来描述化学反应堆中的温度分布,考虑到控制器和传感器可能无法承受反应堆内部的极端温度和恶劣环境,人们自然希望借助于边界上能够测量到的温度、热流等信息来识别系数及源项,进而对反应堆内部情况进行识别和监测.再比如,在水文地质研究领域,也面临着如何通过抽水井(点控制)、观测井(点测量)中的水位、污染物浓度等信息来识别地下含水层参数或者污染源位置、污染强度等问题.

出于以上考虑,本文主要研究基于边界控制、边界观测的一维反应扩散方程反应项系数和源项的同时反演问题:

$$\begin{cases} \omega_t = \omega_{xx} - q(x)\omega + b(x), & 0 < x < 1, t > 0, \\ -\omega_x(0,t) = u(t), \\ \omega(1,t) = 0, \\ \omega(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y_{out}(t) = \omega(0,t), & t \in (0,T], \end{cases} \quad (2)$$

其中 $q(x)$ 表示未知的反应项系数,并且假定它属于如下参数集合:

$$Q = \{q(\cdot) \in C[0,1] : q(x) > 0, \forall x \in [0,1]\}, \quad (3)$$

$b \in L^2(0,1)$ 表示未知源项,假定它仅依赖于空间变量. $u(t)$ 表示Neumann边界控制, $y_{out}(t)$ 是边界观测.本文的目标是设计边界控制 $u \in L^2_{loc}(0,\infty)$ ,进而通过有限时间边界观测 $y_{out}(t)$ ,  $t \in (0,T]$ 同时识别 $q(x)$ 和 $b(x)$ .

本文的创新性主要体现在:1) 辨识所需数据仅为边界控制、边界观测,而不需要对系统内部进行分布测量,这比固定时刻观测、时间积分观测在工程中更易实现;2) 通过设计边界切换开关控制并估计谱数据,将反应项系数和源项的同时反演问题分解为单一的系数辨识问题和单一的源项反演问题,从而可参考借鉴一些现有辨识算法,极大地简化了多未知量的联合反演问题.特别的,本文中提出的通过设计边界控制进而将多个未知量的联合反演问题分解为单个未知量逐一辨识的方法具有一般性,可将其推广应用于其它一些多未知量同时辨识问题.

## 2 预备知识

本节主要给出相应正问题的一些预备知识.引入状态空间 $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ ,定义算子 $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 如下:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\varphi = -\varphi'' + q(\cdot)\varphi, \\ D(\mathcal{A}) = \{\varphi \in H^2(0,1) | \varphi'(0) = \varphi(1) = 0\}. \end{cases} \quad (4)$$

显然, $\mathcal{A}$ 是正定自伴算子,其本征值 $\lambda_n$ 满足如下渐近表达式<sup>[13]</sup>:

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi(n - 1/2) + o(1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

相应的本征向量 $\varphi_n(x)$ 构成状态空间 $\mathcal{H}$ 的标准正交基,并且

$$0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(0)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(0)| < \infty. \quad (6)$$

记 $\kappa_n := \varphi_n(0)$ ,集合 $\{\lambda_n, \kappa_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 称为相应于问题(2)的谱数据.

**定理 1** 对任意的 $u(\cdot) \in L^2_{loc}(0,\infty)$ 及 $T > 0$ ,系统(2)存在唯一解 $\omega \in C(0,T;\mathcal{H})$ ,且边界观测 $y_{out}(\cdot) \in L^2(0,\infty)$ .特别的,当 $u(\cdot) \in L^\infty(0,\infty)$ 时,边界观测

$y_{out}(t)$  在  $t > 0$  时连续.

**证** 将式(2)写成  $[D(\mathcal{A})]'$  ( $D(\mathcal{A})$  相应于轴空间  $\mathcal{H}$  的对偶空间) 中的抽象发展方程

$$\dot{\omega} + \mathcal{A}\omega = \delta(\cdot)u(t) + b, \quad (7)$$

其中  $\delta(\cdot)$  为 Dirac 分布. 令  $\delta^* : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  表示  $\delta(x)$  的伴随算子, 显然对任意的  $\psi \in D(\mathcal{A})$ , 有  $\delta^*\psi = \psi(0)$ , 并且容易验证  $\delta^*\mathcal{A}^{-1}$  是  $\mathcal{H}$  到  $\mathbb{C}$  中的有界线性算子. 从而, 对任意的  $\psi \in D(\mathcal{A})$ ,

$$\delta^*e^{-\mathcal{A}t}\psi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \langle \psi, \varphi_n \rangle \varphi_n(0).$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\int_0^{\infty} |\delta^*e^{-\mathcal{A}t}\psi|^2 dt \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(0)|^2}{2\lambda_n} \right) \|\psi\|^2, \quad (8)$$

其中式(5)–(6)保证了上面级数的收敛性. 上式表明  $\delta(x)$  关于半群  $e^{-\mathcal{A}t}$  是可允许的<sup>[14]</sup>. 从而, 对任意的  $u \in L^2_{loc}(0, \infty)$  及  $T > 0$ , 系统(7)在空间  $C(0, T; \mathcal{H})$  中存在唯一的弱解

$$\omega(\cdot, t) = \int_0^t e^{-\mathcal{A}(t-s)} [\delta(\cdot)u(s) + b] ds. \quad (9)$$

在  $[D(\mathcal{A})]'$  中将  $\delta(x)$  按照基  $\{\varphi_n(x)\}$  展开, 则式(9)可以表示为

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} [\langle b, \varphi_n \rangle + \varphi_n(0)u(s)] ds \varphi_n(x).$$

令

$$\begin{cases} G(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) \varphi_n(y), \\ \tilde{\gamma}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle b, \varphi_n \rangle}{\lambda_n} \varphi_n(x), \quad \lambda_0 = 0, \\ \tilde{\gamma}_n(x) = -\frac{\langle b, \varphi_n \rangle}{\lambda_n} \varphi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{cases} \quad (10)$$

进一步, 系统(2)的解可表示为

$$\omega(x, t; u, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\gamma}_n(x) e^{-\lambda_n t} + \int_0^t G(t-s, x, 0) u(s) ds \triangleq \omega(x, t; 0, b) + \omega(x, t; u, 0), \quad (11)$$

其中  $0 \leq x \leq 1, t > 0$ .

下面说明  $y_{out}(\cdot) \in L^2(0, \infty)$ . 根据式(11), 有

$$y_{out}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t G(t-s, 0, 0) u(s) ds, \quad (12)$$

其中  $\gamma_n = \tilde{\gamma}_n(0), n \in \mathbb{N}$ . 容易验证  $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{-\lambda_n t} \in L^2(0, \infty)$ , 并且  $G(t, 0, 0) \in L^1(0, \infty)$ . 注意到  $u(\cdot) \in L^2_{loc}(0, \infty)$ , 根据文献[15, 引理 A.6.5],

$$\omega(0, t; u, 0) = \int_0^t G(t-s, 0, 0) u(s) ds \in L^2(0, \infty),$$

从而,  $y_{out}(\cdot) \in L^2(0, \infty)$ .

关于边界观测式 (12), 当  $t > 0$  时 Dirichlet 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{-\lambda_n t}$  总是连续的. 进一步, 若  $u(\cdot) \in L^{\infty}(0, \infty)$ , 由  $G(t, 0, 0) \in L^1(0, \infty)$  可知

$$\int_0^t G(t-s, 0, 0) u(s) ds \in L^2(0, \infty)$$

也是  $t$  的连续函数. 从而, 当  $u(\cdot) \in L^{\infty}(0, \infty)$  时边界观测  $y_{out}(t)$  在  $t > 0$  时连续. 证毕.

### 3 可辨识性

可辨识性是反问题中的一个基本问题, 也是辨识算法设计的前提. 粗略地讲, 如果观测数据中包含充分多的信息能够用来唯一确定待辨识的未知量, 则称未知量是可辨识的. 为了给出反应项系数和源项的同时可辨识性定义, 受文献[16]启发, 引入如下参考模型:

$$\begin{cases} \hat{\omega}_t = \hat{\omega}_{xx} - \hat{q}(x)\hat{\omega} + \hat{b}(x), & 0 < x < 1, t > 0, \\ -\hat{\omega}_x(0, t) = u(t), \\ \hat{\omega}(1, t) = 0, \\ \hat{\omega}(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ \hat{y}_{out}(t) = \hat{\omega}(0, t), & t \in (0, T], \end{cases} \quad (13)$$

其中系统(2)中的反应项系数  $q(x)$  及源项  $b(x)$  分别替换为了  $\hat{q}(x)$  和  $\hat{b}(x)$ . 在本节中, 符号“ $\hat{\cdot}$ ”表示参考模型中相应的变量.

**定义 1** 如果存在控制  $u(\cdot) \in L^2_{loc}(0, \infty)$ , 使得在此输入下,  $y_{out}(t) = \hat{y}_{out}(t), t \in (0, T]$  蕴含着  $q(x) = \hat{q}(x), b(x) = \hat{b}(x)$ , 则称系统(2)中的反应项系数  $q(x)$  及源项  $b(x)$  同时可辨识.

本节中, 作者通过设计适当的边界控制  $u(t)$  表明系统(2)中的反应项系数  $q(x)$  及源项  $b(x)$  可以通过有限时间边界观测  $\{y_{out}(t) | t \in (0, T]\}$  唯一确定.

首先, 简单介绍一下边界控制设计的基本思想. 注意到边界观测  $y_{out}(t)$  包含两部分, 即

$$y_{out}(t) = \omega(0, t; 0, b) + \omega(0, t; u, 0), \quad t \in (0, T].$$

对于第 1 部分  $\omega(0, t; 0, b)$ , 它可以表示为 Dirichlet 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{-\lambda_n t}$ , 从而  $t > 0$  时该部分解析, 这意味着该部分在整个  $t > 0$  上的值可以由其在任意有限区间上的值唯一确定. 因此, 如果能将  $\omega(0, t; 0, b)$  中的未知系数  $\{(\gamma_n, \lambda_n) | \gamma_n \neq 0\}_{n \in \mathbb{N}}$  估计出来, 则  $\omega(0, t; 0, b)$  对所有的  $t > 0$  均已知, 再将  $\omega(0, t; 0, b)$  从观测  $y_{out}(t)$  中消掉, 这样就将原参数辨识问题等价地转化为通过“输入–输出”映射  $\mathcal{M} : u(t) \mapsto \omega(0, t; u, 0)$  来辨识反应项系数  $q(x)$ , 其中“输出” $\omega(0, t; u, 0)$  可由下式确

定:

$$\omega(0, t; u, 0) = y_{\text{out}}(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{-\lambda_n t}. \quad (14)$$

这等价于将系数和源项的同时反演问题转化为单一的系数反演问题, 从而原问题得到极大的简化. 基于以上分析, 设计切换开关控制如下:

$$\begin{cases} u(t) = 0, & t \in [0, T_2), \\ u(t) \neq 0, & \text{对几乎所有的 } t \in [T_2, T], \end{cases} \quad (15)$$

其中  $T_2$  为小于  $T$  的任一正数. 当  $t \in (0, T_2)$  时, 观测数据  $y_{\text{out}}(t) = \omega(0, t; 0, b)$  可唯一确定  $\{(\gamma_n, \lambda_n) | \gamma_n \neq 0\}_{n \in \mathbb{N}}$ , 进而唯一确定  $\omega(0, t; 0, b), t \in (0, \infty)$ ; 当  $t \in [T_2, T]$  时, “输入-输出”映射  $\mathcal{M}: u(t) \mapsto \omega(0, t; u, 0)$  可唯一确定反应项系数  $q(x)$ , 其中  $\omega(0, t; u, 0)$  由式(14)确定. 系数可辨识性得到后, 剩下的仅是单一的源项反演问题. 这就是整个可辨识性分析的基本思路.

下面, 本文将沿着这一思路来证明系数和源项的同时可辨识性. 具体的, 设  $T > T_2 > T_1 > 0$  是3个任意正数, 当  $t \in [T_1, T_2]$  时, 根据式(12)

$$y_{\text{out}}(t) = \omega(0, t; 0, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{-\lambda_n t}, \quad (16)$$

注意到源项  $b(x)$  未知, 因此无法确定  $\gamma_k \neq 0$  是否对所有的  $k \in \mathbb{N}$  都成立. 如果对某个  $k \in \mathbb{N}$  有  $\gamma_k = 0$ , 则观测数据  $y_{\text{out}}(t), t \in [T_1, T_2]$  中将不含有  $\gamma_k e^{-\lambda_k t}$  这一项, 从而不可能通过观测数据唯一确定本征值  $\lambda_k$ . 为了便于后续符号表示, 定义集合  $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$  如下:

$$\mathbb{K} = \{k | \gamma_k \neq 0, k \in \mathbb{N}\}. \quad (17)$$

类似于文献[17, 引理1], 下面的引理1表明控制  $u(t) = 0, t \in [0, T_2]$  时, 集合  $\{(\gamma_k, \lambda_k)\}_{k \in \mathbb{K}}$  可由边界观测  $\{y_{\text{out}}(t) | t \in [T_1, T_2]\}$  唯一确定.

**引理1** 设  $\{q(\cdot), b(\cdot)\}, \{\hat{q}(\cdot), \hat{b}(\cdot)\} \in Q \times L^2(0, 1)$ , 其中参数集  $Q$  定义如式(3)所示,  $0 < T_1 < T_2 < \infty$  是两个任意常数. 若边界控制  $u(t) = 0, t \in [0, T_2]$ , 则等式  $y_{\text{out}}(t) = \hat{y}_{\text{out}}(t), t \in [T_1, T_2]$  蕴含着

$$\{(\gamma_k, \lambda_k)\}_{k \in \mathbb{K}} = \{(\hat{\gamma}_k, \hat{\lambda}_k)\}_{k \in \hat{\mathbb{K}}}.$$

**证** 由于  $u(t) = 0, t \in [0, T_2]$ , 根据式(12)可知

$$y_{\text{out}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{K}} \gamma_k e^{-\lambda_k t}, \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (18)$$

由本征值  $\lambda_n$  的渐近表达式(5)可知  $y_{\text{out}}(t), t > 0$  为解析函数. 根据解析函数的唯一延拓性, 对任意的  $t > 0$ , 有  $y_{\text{out}}(t) = \hat{y}_{\text{out}}(t)$ , 即

$$\sum_{k \in \mathbb{K}} \gamma_k e^{-\lambda_k t} = \sum_{k \in \hat{\mathbb{K}}} \hat{\gamma}_k e^{-\hat{\lambda}_k t}, \quad t > 0. \quad (19)$$

对式(19)两端做拉普拉斯变换可得

$$\sum_{k \in \mathbb{K}} \frac{\gamma_k}{s + \lambda_k} = \sum_{k \in \hat{\mathbb{K}}} \frac{\hat{\gamma}_k}{s + \hat{\lambda}_k} \triangleq L(s).$$

注意到  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{K}}$  和  $\{\hat{\lambda}_k\}_{k \in \hat{\mathbb{K}}}$  同为亚纯函数  $-L(-s)$  的全部极点构成的集合, 而  $\gamma_k, \hat{\gamma}_k$  分别为  $-L(-s)$  在  $\lambda_k, \hat{\lambda}_k$  处的留数, 因此

$$\{(\gamma_k, \lambda_k)\}_{k \in \mathbb{K}} = \{(\hat{\gamma}_k, \hat{\lambda}_k)\}_{k \in \hat{\mathbb{K}}}.$$

证毕.

在证明可辨识性之前, 本文还需要如下关于算子  $\mathcal{A}$  的逆谱理论方面的一个结果[13].

**引理2** 算子  $\mathcal{A}$  中的系数  $q(\cdot) \in Q$  可以由谱数据  $\{(\lambda_n, |\varphi_n(0)|)\}_{n=1}^{\infty}$  唯一确定.

下面给出系统(2)中反应项系数  $q(x)$  和源项  $b(x)$  的同时可辨识性.

**定理2** 设  $\{q(\cdot), b(\cdot)\}, \{\hat{q}(\cdot), \hat{b}(\cdot)\} \in Q \times L^2(0, 1)$ , 其中参数集  $Q$  定义如式(3)所示,  $0 < T_1 < T_2 < T < \infty$  是3个任意常数. 设计边界切换开关控制  $u(\cdot) \in L^2(0, T)$  满足式(15), 则等式  $y_{\text{out}}(t) = \hat{y}_{\text{out}}(t), t \in [T_1, T]$  蕴含着  $q(x) = \hat{q}(x), b(x) = \hat{b}(x)$ .

**证** 根据式(12), 有

$$y_{\text{out}}(t) = \omega(0, t; 0, b) + \omega(0, t; u, 0), \quad t \in (0, T], \quad (20)$$

其中:

$$\omega(0, t; 0, b) = \sum_{k \in \mathbb{K}} \gamma_k e^{-\lambda_k t},$$

$$\omega(0, t; u, 0) = \int_0^t G(t-s, 0, 0)u(s)ds.$$

当  $t \in (0, T_2)$  时  $u(t) = 0$ , 根据引理1可知

$$\{(\gamma_k, \lambda_k)\}_{k \in \mathbb{K}} = \{(\hat{\gamma}_k, \hat{\lambda}_k)\}_{k \in \hat{\mathbb{K}}},$$

从而

$$\omega(0, t; 0, b) = \hat{\omega}(0, t; 0, \hat{b}), \quad t > 0. \quad (21)$$

当  $t \in [T_2, T]$  时  $u(t) \neq 0$ , 此时根据等式  $y_{\text{out}}(t) = \hat{y}_{\text{out}}(t)$  以及式(20)–(21)可得

$$\omega(0, t; u, 0) = \hat{\omega}(0, t; u, 0), \quad t \in [T_2, T],$$

即

$$\int_{T_2}^t G(t-s, 0, 0)u(s)ds = \int_{T_2}^t \hat{G}(t-s, 0, 0)u(s)ds.$$

由于  $u(\cdot) \in L^2(T_2, T)$  当  $t \in (T_2, T)$  时几乎处处非零, 并且  $G(t, 0, 0) \in L^1(0, \infty)$ , 根据文献[18, 定理151]可得

$$G(t, 0, 0) = \hat{G}(t, 0, 0), \quad t \in (0, T - T_2],$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(0)]^2 e^{-\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{\varphi}_n(0)]^2 e^{-\hat{\lambda}_n t}. \quad (22)$$

注意到对任意的  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi_n(0) \neq 0$ , 类似于引理1, 可以证明

$$\{(\lambda_n, |\varphi_n(0)|)\}_{n \in \mathbb{N}^*} = \{(\hat{\lambda}_n, |\hat{\varphi}_n(0)|)\}_{n \in \mathbb{N}^*}. \quad (23)$$

再根据引理2可知 $q(x) = \hat{q}(x)$ . 因此, 系统(2)和参考模型(13)具有相同的系统算子, 即 $\mathcal{A} = \hat{\mathcal{A}}$ , 从而,

$$\{(\lambda_n, \varphi_n(x))\}_{n \in \mathbb{N}^*} = \{(\hat{\lambda}_n, \hat{\varphi}_n(x))\}_{n \in \mathbb{N}^*}. \quad (24)$$

另一方面, 根据式(10), 有

$$b(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \langle b, \varphi_n \rangle \varphi_n(x) = - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_n \lambda_n}{\varphi_n(0)} \varphi_n(x), \quad (25)$$

类似于引理1可以证明,  $\omega(0, t; 0, b) = \hat{\omega}(0, t; 0, \hat{b})$ ,  $t \in (0, T_2)$  蕴含着  $\gamma_n = \hat{\gamma}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . 因此

$$b(x) = - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_n \lambda_n}{\varphi_n(0)} \varphi_n(x) = - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\hat{\gamma}_n \hat{\lambda}_n}{\hat{\varphi}_n(0)} \hat{\varphi}_n(x) = \hat{b}(x). \quad (26)$$

证毕.

### 4 辨识算法

从定理2的可辨识性证明过程可以看出, 设计辨识算法的关键在于如何从有限时间观测

$$\{y_{\text{out}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{K}} \gamma_k e^{-\lambda_k t} | t \in [T_1, T_2]\}$$

中提取谱数据. 一旦得到了谱数据 $\{(\gamma_k, \lambda_k)\}_{k \in \mathbb{K}}$ , 就可以将边界观测中由未知源项决定的部分 $\omega(0, t; 0, b)$ 从边界观测 $\omega(0, t; u, b)$ 中消掉, 从而将原有的系数和源项同时反演问题转化为根据 $\omega(0, t; u, 0)$ 辨识系数 $q(x)$ 这样一个单一的参数辨识问题, 辨识出系数 $q(x)$ 后, 剩下的仅是一个单一的源项反演问题, 这样就极大地简化了原来的系数、源项同时反演问题. 基于上述分析, 整个辨识过程由以下3部分构成.

#### 4.1 估计谱数据

令边界控制 $u(t) = 0$ ,  $t \in [0, T_2)$ , 此时, 相应的边界观测

$$\omega(0, t; 0, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{-\lambda_n t} = \sum_{k=0}^{M-1} \gamma_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} t} + \sum_{k=M}^{\#\mathbb{K}-1} \gamma_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} t}, \quad (27)$$

其中:  $\#\mathbb{K}$ 表示集合 $\mathbb{K}$ 中的元素个数, 数列 $\{\gamma_{n_k}\}_{k=0}^{\#\mathbb{K}-1}$ 表示 $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 中所有非零元素构成的子列. 容易证明, 当 $M \rightarrow +\infty$ 时, 式(27)中的余项 $\sum_{k=M}^{\#\mathbb{K}-1} \gamma_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} t}$ 趋于零, 这表明 $\omega(0, t; 0, b)$ 满足如下近似表达式:

$$\omega(0, t; 0, b) \approx \sum_{k=0}^{M-1} \gamma_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} t}, \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (28)$$

下面, 本文将借助于信号处理中的矩阵束方法<sup>[19]</sup>, 根据有限时间观测 $\{\omega(0, t; 0, b) | t \in [T_1, T_2]\}$ 来估计式(28)中的未知系数 $\{(\gamma_{n_k}, \lambda_{n_k})\}_{k=0}^{M-1}$ .

设 $T_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_1} = T_2$ 是 $[T_1, T_2]$ 的一

个均匀分割,  $N_1$ 为采样点的总个数,  $T_s = \frac{T_2 - T_1}{N_1}$ 为采样周期, 采样时刻的测量值为

$$y_i = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{-\lambda_n t_i} = \sum_{k=0}^{\#\mathbb{K}-1} \gamma_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} t_i} \triangleq \sum_{k=0}^{M-1} (\gamma_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} T_1}) e^{-(\lambda_{n_k} T_s) i} + r(M, t_i), \quad (29)$$

其中:  $i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ , 余项 $r(M, t_i)$ 视为测量误差. 可估计的本征值个数 $M$ , 本征值 $\{\lambda_{n_k}\}_{k=0}^{M-1}$ 及相应的系数 $\{\gamma_{n_k}\}_{k=0}^{M-1}$ 均可通过矩阵束方法来估计.

引入向量 $w_k = [y_k \ y_{k+1} \ \dots \ y_{N_1-L+k-1}]^T$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, L$ , 以及矩阵 $W_0 = [w_{L-1} \ w_{L-2} \ \dots \ w_0]$ ,  $W_1 = [w_L \ w_{L-1} \ \dots \ w_1]$ ,  $W = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_L]$ , 其中上标“T”表示转置,  $L$ 称为束参数(pencil parameter), 通常取为 $N_1/3$ 或 $\lfloor N_1/3 \rfloor + 1$  (当 $N_1/3$ 不是整数时), 其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示地板函数.

首先, 记矩阵 $W$ 的奇异值为 $\{\eta_i\}$ , 则

$$M = \#\{\eta_i | \eta_i / \eta_{\max} \geq \varepsilon\},$$

其中:  $\eta_{\max}$ 为矩阵 $W$ 的最大奇异值,  $\varepsilon$ 表示阈值.

然后, 对矩阵 $W_0$ 进行奇异值分解 $W_0 = U_0 \Sigma_0 V_0^T$ , 并定义其秩- $M$ 截断伪逆 $W_{0,M}^\dagger$ 如下:

$$W_{0,M}^\dagger \triangleq \sum_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^*, \quad (30)$$

其中:  $\{\sigma_i\}_{i=1}^M$ 表示 $W_0$ 的前 $M$ 个最大的奇异值,  $\{v_i\}$ 和 $\{u_i\}$ 是相应的奇异向量, 上标“\*”表示共轭转置. 由矩阵束方法可知,  $W_{0,M}^\dagger W_1$ 的 $M$ 个非零特征值即为 $\{e^{-\lambda_{n_k} T_s}\}_{k=0}^{M-1}$ 的估计值, 进而得到 $\{\lambda_{n_k}\}_{k=0}^{M-1}$ 的估计值.

最后, 可通过求解如下线性最小二乘问题来得到系数 $\{\gamma_{n_k}\}_{k=0}^{M-1}$ :

$$\{\gamma_{n_k}\}_{k=0}^{M-1} = \operatorname{argmin} \sum_{i=0}^{N_1-1} [y_i - \sum_{k=0}^{M-1} \gamma_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} t_i}]^2.$$

**注 1** 在得到 $\{(\gamma_{n_k}, \lambda_{n_k})\}_{k=0}^{M-1}$ 的估计值 $\{(\hat{\gamma}_{n_k}, \hat{\lambda}_{n_k})\}_{k=0}^{M-1}$ 后, 边界观测中依赖于未知源项的部分 $\omega(0, t; 0, b)$ 可近似表示为

$$\omega(0, t; 0, b) \approx \sum_{k=0}^{\hat{M}-1} \hat{\gamma}_{n_k} e^{-\hat{\lambda}_{n_k} t}, \quad t > 0. \quad (31)$$

#### 4.2 重构反应项系数

当 $t \in (T_2, T)$ 时, 令 $u(\cdot) \in L^\infty(T_2, T)$ 且几乎处处非零, 将边界观测中依赖于未知源项的部分 $\omega(0, t; 0, b)$ 从 $y_{\text{out}}(t)$ 中消掉

$$\omega(0, t; u, 0) \approx \tilde{y}(t) \triangleq$$

$$y_{\text{out}}(t) - \sum_{k=0}^{\hat{M}-1} \hat{\gamma}_{n_k} e^{-\hat{\lambda}_{n_k} t}, \quad t \in [T_2, T]. \quad (32)$$

从而, 可将系数与源项的同时反演问题(2)转化为单一的系数反演问题. 具体的, 构造如下辅助系统:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_t = \tilde{\omega}_{xx} - q(x)\tilde{\omega}, & 0 < x < 1, t > T_2, \\ -\tilde{\omega}_x(0, t) = u(t), \quad \tilde{\omega}(1, t) = 0, & t > T_2, \\ \tilde{\omega}(x, T_2) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (33)$$

则原来的系数、源项同时反演问题(2)转化为: 根据边界控制 $u(t), t \in [T_2, T]$ 以及近似“边界观测” $\{\tilde{y}(t), t \in [T_2, T]\}$ , 重构未知系数 $q(x)$ . 对于这样的单一反应项系数辨识问题, 现有文献中有多种方法可供借鉴<sup>[3, 20]</sup>.

本文将借助于最优扰动正则化算法(见文献[20, 第6章])来重构未知反应项系数 $q(x)$ . 设 $\{P_j(x), j = 1, 2, \dots, \infty\}$ 表示 $q(x)$ 所在空间的一组基,  $q(x)$ 满足如下近似展开式:

$$q(x) \approx \sum_{j=1}^N q_j P_j(x), \quad (34)$$

其中:  $q_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 为展开项系数,  $N \geq 1$ 表示截断水平. 为了方便起见, 引入 $N$ 维空间 $\Psi^N = \text{span}\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ 及向量 $\vec{q} = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_N)^T$ . 在式(34)意义下, 反应项系数 $q(x)$ 与向量 $\vec{q}$ 相对应, 从而重构未知系数 $q(\cdot) \in \Psi^N$ 等价于寻找相应的向量 $\vec{q} \in \mathbb{R}^N$ . 对此, 一个自然的想法就是通过极小化如下误差泛函来寻找:

$$\min \int_{T_2}^T [\tilde{\omega}(0, t; \vec{q}) - \tilde{y}(t)]^2 dt + \alpha \|\vec{q}\|_2^2, \quad (35)$$

其中 $\alpha$ 为正则化参数.

最优扰动正则化算法本质上是一个迭代优化算法. 给定一个初始猜测值 $\vec{q}^0$ 并假定

$$\vec{q}^{n+1} = \vec{q}^n + \delta_{\vec{q}^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

其中 $\delta_{\vec{q}^n} \triangleq (\delta_{q_1^n}, \delta_{q_2^n}, \dots, \delta_{q_N^n})$ 是第 $n$ 次迭代的扰动向量. 在每一步迭代过程中, 关键就在于最优扰动向量 $\delta_{\vec{q}^n}$ 的计算. 为了简便, 将 $\vec{q}^n$ 和 $\delta_{\vec{q}^n}$ 分别简记为 $\vec{q}$ 和 $\delta_{\vec{q}} = (\delta_{q_1}, \delta_{q_2}, \dots, \delta_{q_N})$ . 根据式(34), 记

$$\delta_{\vec{q}} = \sum_{j=1}^N \delta_{q_j} P_j(x). \quad (37)$$

将 $\tilde{\omega}(0, t; \vec{q} + \delta_{\vec{q}})$ 在 $\vec{q}$ 处进行泰勒展开, 并且仅保留一阶项, 即

$$\tilde{\omega}(0, t; \vec{q} + \delta_{\vec{q}}) \approx \tilde{\omega}(0, t; \vec{q}) + \nabla_{\vec{q}}^T \tilde{\omega}(0, t; \vec{q}) \cdot \delta_{\vec{q}}. \quad (38)$$

定义关于扰动向量 $\delta_{\vec{q}}$ 的偏差泛函如下:

$$\begin{aligned} J(\delta_{\vec{q}}) \triangleq & \int_{T_2}^T (\nabla_{\vec{q}}^T \tilde{\omega}(0, t; \vec{q}) \cdot \delta_{\vec{q}} - [\tilde{y}(t) - \tilde{\omega}(0, t; \vec{q})])^2 dt + \\ & \alpha \|\delta_{\vec{q}}\|_2^2. \end{aligned} \quad (39)$$

为了极小化 $J(\delta_{\vec{q}})$ , 对 $[T_2, T]$ 进行离散 $T_2 = t'_0 < t'_1 < t'_2 < \dots < t'_{N_2} = T$ , 通过差分可得如下近似表达式:

$$\begin{aligned} & \nabla_{\vec{q}}^T \tilde{\omega}(0, t'_i; \vec{q}) \cdot \delta_{\vec{q}} \approx \\ & \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^N [\tilde{\omega}(0, t'_i; (q_1, \dots, q_j + \tau, \dots, q_N)) - \\ & \tilde{\omega}(0, t'_i; \vec{q})] \delta_{q_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N_2, \end{aligned}$$

其中 $\tau$ 为步长. 引入矩阵 $D = (d_{ij})_{N_2 \times N}$ , 其中

$$d_{ij} = \frac{1}{\tau} [\tilde{\omega}(0, t'_i; (q_1, \dots, q_j + \tau, \dots, q_N)) - \tilde{\omega}(0, t'_i; \vec{q})],$$

以及向量

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= (\tilde{\omega}(0, t'_1; \vec{q}) \ \tilde{\omega}(0, t'_2; \vec{q}) \ \dots \ \tilde{\omega}(0, t'_{N_2}; \vec{q}))^T, \\ \tilde{Y} &= (\tilde{y}(t'_1) \ \tilde{y}(t'_2) \ \dots \ \tilde{y}(t'_{N_2}))^T, \end{aligned}$$

根据文献[21, 定理2.11], 极小化问题(39)可转化为如下正规方程来求解:

$$(\alpha I + D^T D) \delta_{\vec{q}} = D^T (\tilde{Y} - \tilde{W}).$$

基于上述分析和计算, 可得到最优扰动向量

$$\delta_{\vec{q}} = (\alpha I + D^T D)^{-1} D^T (\tilde{Y} - \tilde{W}). \quad (40)$$

这样, 就完成了一次迭代. 继续这一迭代过程直至满足一定精度要求, 迭代终止, 从而得到最优参数向量 $\vec{q}$ . 这就是通过最优扰动正则化算法重构式(33)中未知系数 $q(x)$ 的基本过程.

### 4.3 重构源项

在辨识得到反应项系数后, 剩下的相当于单一的源项反演问题. 下面根据边界观测 $y_{\text{out}}(t), t \in [T_1, T_2]$ 来辨识源项 $b(x)$ . 当 $t \in [T_1, T_2]$ 时, 系统(2)可写为

$$\begin{cases} \omega_t = \omega_{xx} - q_{\text{re}}(x)\omega + b(x), & 0 < x < 1, \\ & T_1 \leq t < T_2, \\ -\omega_x(0, t) = 0, \\ \omega(1, t) = 0, \\ \omega(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y_{\text{out}}(t) = \omega(0, t), & t \in [T_1, T_2], \end{cases}$$

其中 $q_{\text{re}}(x)$ 为反应项系数 $q(x)$ 的估计值. 同样的, 对于该源项反演问题, 已有文献中也有多种方法来处理<sup>[20, 22]</sup>. 此处, 本文仍采用最优扰动正则化算法通过求解如下优化问题来估计源项:

$$\min \int_{T_1}^{T_2} [\omega(0, t; q_{\text{re}}, b) - y_{\text{out}}(t)]^2 dt + \alpha \|b\|_2^2.$$

算法的具体过程和第4.2节完全类似, 故省略细节.

### 5 数值仿真

假设系统反应项系数和源项为

$$q(x) = 1 + e^{-x}, \quad b(x) = 2 - x + x \sin(2x),$$

选取参数 $T_1 = 0.1, T_2 = 0.5, T_3 = 1$ , 边界切换开关控制

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 0.5), \\ 1, & t \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

利用有限差分方法对系统(2)进行数值求解, 可得  $y_{\text{out}}(t) = \omega(0, t; u, b)$ . 下面将  $\{y_{\text{out}}(t), 0.1 \leq t \leq 1\}$  作为观测数据, 应用第4节中的辨识算法来反演系数  $q(x)$  和源项  $b(x)$ .

本算例中, 选取勒让德正交多项式的前五项作为基函数, 即

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}, P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}.$$

在这样选定的多项式空间  $\Psi^5 = \text{span}\{P_0, P_1, \dots, P_4\}$  中, 反应项系数和源项有如下近似展开式:

$$q(x) \approx \sum_{j=0}^4 q_j P_j(x), b(x) \approx \sum_{j=0}^4 b_j P_j(x).$$

选取初始迭代  $\vec{q}^0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $\vec{b}^0 = (2, 0, 0, 0, 0)$ , 数值微分步长  $\tau = 0.001$ , 仿真结果如图1和图2.

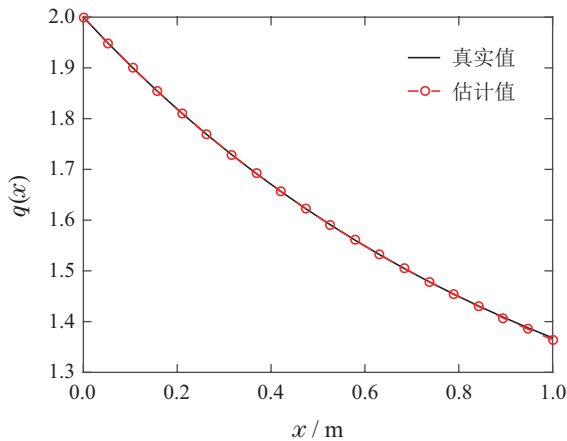


图 1 反应项系数  $q(x)$

Fig. 1 The reaction coefficient  $q(x)$

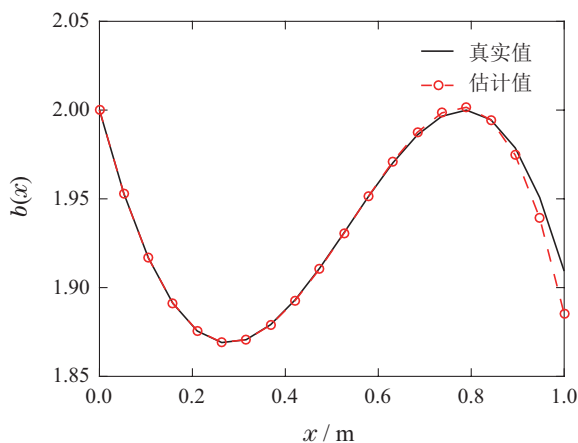


图 2 源项  $b(x)$

Fig. 2 The source term  $b(x)$

可以看出, 通过辨识算法重构得到的系数与真实值比较吻合, 源项反演结果与真实值之间存在一定误差, 但整体仍在可接受范围内, 这就验证了辨识算法的有效性. 关于源项反演误差, 首先, 在最优扰动正则

化算法中, 本文选取勒让德正交多项式作为基函数, 用多项式近似非多项式源项, 本身就会有一定误差. 其次, 在源项反演过程中, 观测数据和系统模型也都不是完全精确的: 一方面, 数值模拟中的观测数据  $y_{\text{out}}(t)$  来自于有限差分得到的数值解,  $y_{\text{out}}(t)$  本身就带有一定的误差; 另一方面, 在重构系统源项  $b(x)$  时, 将已经反演出的  $q_{\text{re}}(x)$  作为真实的反应项系数(见第4.3节), 这同样会引入一定的误差.

参考文献:

- [1] CANTRELL R S, COSNER C. *Spatial Ecology Via Reaction-Diffusion Equations*. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- [2] LI Gongsheng, TAN Yongji, WANG Xiaoqin. Inverse problem method on determining magnitude of groundwater pollution sources. *Mathematica Applicata*, 2005, 18(1): 92 – 98. (李功胜, 谭永基, 王孝勤. 确定地下水污染强度的反问题方法. 应用数学, 2005, 18(1): 92 – 98.)
- [3] AVDONIN S, SEIDMAN T I. Identification of  $q(x)$  in  $u_t = \Delta u - qu$  from boundary observations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1995, 33(4): 1247 – 1255.
- [4] BOUMENIR A, TUAN V K. Inverse problems for multidimensional heat equations by measurements at a single point on the boundary. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2009, 30(11/12): 1215 – 1230.
- [5] JOHANSSON B T, LESNIC D. A variational method for identifying a spacewise-dependent heat source. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2007, 72(6): 748 – 760.
- [6] YANG L, DEGHAN M, YU J N, et al. Inverse problem of time-dependent heat sources numerical reconstruction. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2011, 81(8): 1656 – 1672.
- [7] HUSSEIN M S, LESNIC D, JOHANSSON B T, et al. Identification of a multi-dimensional space-dependent heat source from boundary data. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 54: 202 – 220.
- [8] RUNDELL W, ZHANG Z D. On the identification of source term in the heat equation from sparse data. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2020, 52(2): 1526 – 1548.
- [9] HASANOV A. An inverse source problem with single Dirichlet type measured output data for a linear parabolic equation. *Applied Mathematics Letters*, 2011, 24(7): 1269 – 1273.
- [10] AL-MUSALLAM F, BOUMENIR A. The reconstruction of a source and a potential from boundary measurements. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, 435(1): 800 – 808.
- [11] CAO K, LESNIC D. Simultaneous reconstruction of the spatially-distributed reaction coefficient, initial temperature and heat source from temperature measurements at different times. *Computers and Mathematics with Applications*, 2019, 78(10): 3237 – 3249.
- [12] CAO K, LESNIC D. Simultaneous identification and reconstruction of the space-dependent reaction coefficient and source term. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2021, 29(6): 867 – 894.
- [13] AVDONIN S, LENHART S, PROTOPOESCU V. Solving the dynamical inverse problem for the Schrödinger equation by the boundary control method. *Inverse Problems*, 2002, 18(2): 349 – 361.
- [14] WEISS G. Admissibility of unbounded control operators. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1989, 27(3): 527 – 545.
- [15] CURTAIN R F, ZWART H. *An Introduction To Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [16] BANKS H T, KUNISCH K. *Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems*. Boston: Birkhäuser, 1989.

- [17] ZHAO Z X, GUO B Z, HAN Z J. Boundary control and observation to inverse coefficient problem for heat equation with unknown source and initial value. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(12): 6003 – 6010.
- [18] TITCHMARSH E C. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford: Clarendon Press, 1948.
- [19] HUA Y B, SARKAR T K. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1990, 38(5): 814 – 824.
- [20] WANG Y F, YAGOLA A G, YANG C C. *Computational Methods for Applied Inverse Problems*. Berlin/Boston: Higher Education Press and Walter de Gruyter GmbH, 2012.
- [21] KIRSCH A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Switzerland AG: Springer Nature, 2021.
- [22] HASANOV A, MUKANOVA B. Fourier collocation algorithm for identifying the spacewise-dependent source in the advection-diffusion equation from boundary data measurements. *Applied Numerical Mathematics*, 2015, 97: 1 – 14.

#### 作者简介:

**赵志学** 副教授, 目前研究方向为分布参数系统控制、偏微分方程反问题, E-mail: zxzhao@amss.ac.cn;

**郭宝珠** 教授, 博士生导师, 目前研究方向为分布参数系统控制、自抗扰控制, E-mail: bzguo@iss.ac.cn;

**韩忠杰** 教授, 博士生导师, 目前研究方向为分布参数系统控制, E-mail: zjhan@tju.edu.cn.