不确定Chua电路系统的固定时间自适应参数估计

石 尚[1,3], 李 慧[1], 闵惠芳[2†], 徐胜元[2], 孙永辉[1]

(1. 河海大学 能源与电气学院, 江苏 南京 211100;

2. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094; 3. 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 234299)

摘要: 针对具有未知参数的不确定Chua电路系统, 本文提出了一种基于Volterra积分算子的固定时间自适应参数估计算法. 在仅有输出信号的已知的情况下, 该算法能够保证参数的估计值在一个不依赖于初始误差的固定时间内收敛到参数的真实值. 通过在Volterra积分算子中巧妙的选取核函数, 使其满足在$\tau=0$和$\tau=t$时核函数及其导数为零, 从而能够有效消除系统初始值的影响, 同时避免了对系统输出导数的计算. 最后, 仿真结果验证了所提算法的有效性.

关键词: Chua电路; 固定时间; 自适应参数估计; Volterra积分算子

引用格式: 石尚, 李慧, 闵惠芳, 等. 不确定Chua电路系统的固定时间自适应参数估计. 控制理论与应用, 2022, 39(8): 1551 – 1560

DOI: 10.7641/CTA.2022.11060

Fixed-time adaptive parameter estimation for uncertain Chua circuit system

SHI Shang[1,3], LI Hui[1], MIN Hui-fang[2†], XU Sheng-yuan[2], SUN Yong-hui[1]

(1. College of Energy and Electrical Engineering, Hohai University, Nanjing Jiangsu 211100, China;
2. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;
3. School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 234299, China)

Abstract: In this paper, a novel Volterra integral operator-based fixed-time adaptive parameter estimation algorithm is proposed for uncertain Chua circuit system with unknown parameters. With only the output signal to be known, the proposed algorithm can ensure that the estimation of the parameter can converge to the true value of the parameter in a fixed time independent of the initial error value. The kernel function and its derivative are zero when $\tau=0$ and $\tau=t$, which can effectively eliminate the influence of the initial value of the system and avoid the calculation of the output derivative of the system. Finally, the simulation results verify the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Chua circuit system; fixed-time; adaptive parameter estimation; Volterra integral operator

Citation: SHI Shang, LI Hui, MIN Huifang, et al. Fixed-time adaptive parameter estimation for uncertain Chua circuit system. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(8): 1551 – 1560

1 引言

作为微分动力系统中十分重要的非线性动力学现象, 混沌现象因其在安全通信、激光系统、电子化学、神经生理学等领域的应用, 受到学者们的广泛关注[1–5]. 自混沌学的发展逐渐步入正轨以来, 人们一直尝试用肉眼可见的方法去观察混沌这一令人捉摸不透的动力学现象. 由此, 作为揭开分支与混沌机理过程中的重要研究课题, 电学中非线性电路的混沌现象研究逐渐进入人们的眼球. 关于非线性电路中混沌现象的研究已有三十年以上的历史, 在研究者们的不懈努力下, 许多以混沌机理研究为目的的电路被构造出来[6]. 同时, 研究者们还对一部分实用电路中产生的混沌现象进行了密切研究[7].

1983年, 加利福尼亚大学的Leon Chua教授设计出了第1个可以通过实验模拟混沌现象的Chua电路[8]. 这是一个具有里程碑意义的设计, 它开辟了混沌行为

收稿日期: 2021−11−03; 录用日期: 2022−02−23.

†通信作者. E-mail: jiejie1043640772@126.com; Tel.: +86 18252035397.

本文责任编委: 龙离军.

江苏省自然科学基金项目(BK20200520), 国家自然科学基金项目(62003131, 62073121, 62173125)资助.

Supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20200520) and the National Natural Science Foundation of China (62003131, 62073121, 62173125).

应用于现实世界的新道路. Chua电路是一个可以产生双涡卷混沌的三阶自治电路, 通过赋予一个分段线性负电阻不同形式的参数组合, 从而产生尤为丰富的分支与混沌行为. Chua电路是能引起混沌现象出现的自治电路中构造最为简单的一个, 任何在三阶自治系统中产生的混沌现象, 都可以通过Chua电路系统模拟展现出来. Shilnikov定理中对Chua系统产生的混沌形态做出了严格证明[9]. 基于此, 人们得以通过电路这一形式来对分支和混沌的各种机理进行观察和研究. 因此, 对于Chua电路的研究引起了很多研究者的兴趣, Chua系统也逐渐成为了混沌现象研究中的标准模型[10–14].

最初的关于Chua电路系统的研究需要假设系统的参数是精确已知的. 在实际的电路设计中, 由于受到元器件老化、不确定干扰以及测量成本等各种内部外部因素的影响, 电路中的某些参数往往很难精确或直接获取. 因此, 如何解决具有未知参数的Chua电路系统的参数估计问题变得尤为重要, 当系统仅有部分状态变量可用时, 问题将变得更加困难. 为了解决这一问题, 学者们提出了各种各样的方法, 如: 基于延迟嵌入的方法[15–16]、基于控制理论的方法[17–18]等. 其中基于控制理论的方法可以通过观测器设计、系统辨识等方法从隐藏变量中估计未知参数, 从而得到越来越广泛的应用. 文献[19]提出了一种基于最小二乘法的参数估计方法, 然而该方法需要假设Chua电路系统的所有状态变量均已知, 这在很多情况下无法满足. 文献[20]考虑了系统仅有部分状态变量作为输出可测的情况, 通过巧妙地引入的坐标变换, 将非线性Chua系统转变为可观测的线性系统, 并提出了基于标准线性参数辨识的混沌系统参数估计方法. 在此基础上, 文献[21]提出了基于梯度算法的线性估计方法, 通过利用梯度算法不断调整估计器的增益, 从而使得估计参数能够收敛到参数的实际值, 然而这一算法要求系统的输出及其导数都是已知的.

收敛速度是参数估计过程中非常关键的一个性能指标, 前文中所涉及的文献大多仅能实现参数的渐近估计. 渐近估计仅能保证参数的估计误差在时间趋向于无穷时趋向于零, 因此无法得到更快的估计速度. 从时间优化的角度来看, 使估计误差有限时间收敛的估计方法才是时间最优的估计算法. 此外, 有限时间估计算法通常带有分数幂项, 使得有限时间参数估计和传统的渐近估计相比, 往往具有更好的鲁棒性和抗扰动性. 正是由于有限时间参数估计的诸多优点, 关于混沌系统有限时间参数估计的研究受到越来越多研究者的关注, 并取得了许多积极的成果[22–25]. 特别地, 在最近的文献[26]中, 作者针对Chua电路系统提出了一种基于Volterra积分算子的有限时间自适应参数估计算法, 和现有结果相比, 该算法在实现参数有限时间估计的同时, 避免了对输出导数的计算. 然而, 为了消去未知输出导数的影响, 需要针对Volterra积分算子选取几个不同的核函数, 这大大提升了算法的复杂度.

注意到, 不管是传统的渐近参数估计算法还是近年来被广泛研究的有限时间估计算法, 其收敛时间都是依赖于参数的初始估计误差的, 并随初始估计误差的增大而增大. 为了克服这一缺陷, 文献[27]提出了固定时间稳定性的概念. 固定时间稳定性在保留了有限时间稳定收敛速度快、收敛精度高等诸多优点的同时, 还具有收敛时间不依赖初始值的优良特性, 因此成为国内外的研究热点[28–30]. 近年来, 混沌系统的固定时间同步、固定时间控制等问题被大量地研究[31–32], 但关于混沌系统的固定时间参数估计问题的研究却鲜有报道. 因此, 解决混沌系统的固定时间参数估计问题是本文所要考虑的主要问题.

本文针对带有未知参数的Chua电路系统, 提出了一种新的基于Volterra积分算子的固定时间自适应参数估计算法, 和已有算法相比主要贡献如下:

1) 首先, 和已有的基于渐近收敛和有限时间收敛的参数估计策略相比较, 本文所提出的固定时间参数估计算法在保证了收敛速度快、收敛精度高的同时, 还具有收敛时间不依赖于初始估计误差的特点;

2) 此外, 本文所使用的Volterra积分算子, 能够有效消除系统初始值的影响, 同时避免对系统输出导数的计算, 使得所提算法只需用到系统的输出信息, 从而能够有效减少传感器的使用, 从而有效降低算法的实现成本;

3) 最后, 和文献[26]相比, 本文所提算法除了能实现固定时间参数估计外, 只需要选取一个核函数, 从而使得算法复杂度大大降低.

本文所用符号定义如下: $\mathbb{N}$表示自然数; $\mathbb{Z}$表示整数; $\mathbb{Z}_+$表示正整数; $\mathbb{R}$表示实数; $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$表示非负实数; $\mathbb{R}^{n\times m}$表示$n\times m$维的实数向量; $\mathbb{R}^n$表示n维1列的实数向量; $\boldsymbol{I}_n$表示$n\times n$的单位矩阵; $f(t):\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}$表示定义域为$\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, 值域为$\mathbb{R}$的函数, $f^{(i)}(\cdot), i\in\mathbb{N}$表示$f(\cdot)$的$i$阶导数, 其中$f^{(0)}(\cdot)=f(\cdot)$; $K(t,\tau):\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$表示定义域为$\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}$, 值域为$\mathbb{R}$的二元函数; $K^{(i)}(t,\tau), i\in\mathbb{N}$表示$K(t,\tau)$关于第2个变量$\tau$的$i$阶导数, 其中$K^{(0)}(t,\tau)=K(t,\tau)$; 对$\alpha, x\in\mathbb{R}$, 定义$\lfloor x\rceil^{\alpha}=|x|^{\alpha}\operatorname{sgn}x$; 对$x=[x_1\ \ \cdots\ \ x_n]^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^n$, 定义$\lfloor x\rceil^{\alpha}=[\lfloor x_1\rceil^{\alpha}\ \ \lfloor x_2\rceil^{\alpha}\ \ \cdots\ \ \lfloor x_n\rceil^{\alpha}]^{\mathrm T}$.

本文剩余部分组织如下: 第2节给出了Chua电路系统的建模和预备知识; 第3节给出了固定时间自适应参数估计器的设计与稳定性分析; 第4节和第5节分别给出了仿真结果和总结.

2　问题描述

2.1　系统建模

如图1所示, Chua电路由3个储能元件(1个电感和2个电容)、1个线性电阻器和1个称为Chua二极管的非线性电阻器组成, 其简化非线性模型如下[6]:

$$\begin{cases} C_1\dfrac{\mathrm{d}v_{c_1}}{\mathrm{d}\breve{t}} = \dfrac{1}{R}(v_{c_2}-v_{c_1})-\phi(v_{c_1}),\\ C_2\dfrac{\mathrm{d}v_{c_2}}{\mathrm{d}\breve{t}} = \dfrac{1}{R}(v_{c_1}-v_{c_2})+i_l,\\ L\dfrac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{d}\breve{t}} = -v_{c_2},\end{cases} \tag{1}$$

其中: R是线性电阻, v_{c_1}和v_{c_2}分别是电容器C_1, C_2两端的电压, i_l是通过电感的电流. $\phi(v_{c_1})$是关于电容器C_1电压的函数, 用来表示通过非线性电阻的电流, 该非线性函数由如下的奇对称分段线性函数描述:

$$\phi(v_{c_1}) = -\left[m_1v_{c_1}+\frac{m_0-m_1}{2}(|v_{c_1}+B_p|+|v_{c_1}-B_p|)\right], \tag{2}$$

其中m_0, m_1和B_p为二极管的3个固定常数. 根据文献[33], 系统(1)可以写成如下的无量纲形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta(-x_1+x_2-f(x_1)),\\ \dot{x}_2 = x_1-x_2+x_3,\\ \dot{x}_3 = -\gamma x_2,\\ y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\end{cases} \tag{3}$$

其中y_1, y_2表示系统的输出,

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1+b(|x_1+1|-|x_1-1|),\\ \beta = \dfrac{C_1}{C_2},\ \gamma = \dfrac{C_2R^2}{L},\ a = m_1R,\ b = \dfrac{m_0-m_1}{2}R,\\ x_1 = \dfrac{v_{c_1}}{B_p},\ x_2 = \dfrac{v_{c_2}}{B_p},\ x_3 = \dfrac{Ri_l}{B_p},\ t = \dfrac{\breve{t}}{RC_2}.\end{cases} \tag{4}$$

其中$\breve{t}$为已知时间变量.

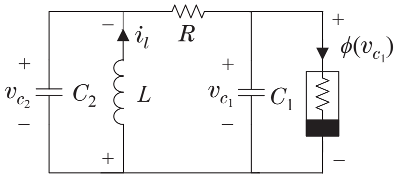

图 1　Chua电路系统

Fig. 1　The Chua system

对于系统(3), 只需要系统输出$y_1 = x_1, y_2 = x_2$和t已知, β, a, b和γ均为待估计的未知参数.

由文献[21]可知, 当参数选取为$\gamma = 27$, $\beta = 15.6$, $a = -\dfrac{5}{7}$和$b = -\dfrac{3}{14}$附近的固定值时, Chua电路将表现出所谓的双涡卷混沌吸引子.

本文的主要目标为: 针对系统(3), 考虑当系统仅有y_1, y_2已知作为输出时, 如何在一个不依赖于初始值的固定时间内, 实现对参数β, a, b和γ的精确估计.

2.2　固定时间稳定性

考虑如下系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \geqslant t_0, \tag{5}$$

其中: $f(0) = 0, x(t)\in\mathbb{R}^n, f(x(t)):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$为一个连续函数, $x_0 = x(t_0)$表示系统的初始值, t_0表示初始时刻为一个定值.

下面将介绍固定时间稳定性的定义和判据.

定义 1　对系统(5), 系统的解记为$x(t, x_0)$. 如果存在一个不依赖于系统初始值x_0的固定时间T, 使得对任意初始状态x_0, 有$x(t, x_0) = 0, \forall t \geqslant T+t_0$成立, 那么系统(5)的平衡点$x = 0$是全局固定时间稳定的.

引理 1[27]　对系统(5), 如果存在一个连续正定径向无界的Lyapunov函数$V(x(t)):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, 使得

$$\dot{V}(x(t)) \leqslant -\alpha_1V^p(x(t))-\alpha_2V^q(x(t)),\ t \geqslant t_0, \tag{6}$$

其中: $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, 0 < p < 1, q > 1$, 那么系统的原点是全局固定时间稳定的, 即对任意初始值$x_0\in\mathbb{R}^n$, 有$x(t, x_0) = 0, \forall t \geqslant T_{\max}$成立, 其中$T_{\max}$满足

$$T_{\max} = \frac{1}{\alpha_1(1-p)}+\frac{1}{\alpha_2(q-1)}+t_0. \tag{7}$$

2.3　Volterra积分算子

定义$f(t)\in\ell^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$为$\mathbb{R}_{\geqslant 0}$到$\mathbb{R}$的希尔伯特空间内的局部平方可积函数. 函数$f(t)$经过Volterra积分算子的映射定义如下[34]:

$$[V_Kf](t) = \int_0^t K(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{8}$$

其中$K(\cdot,\cdot):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$希尔伯特–施密特核函数.

用微分方程的形式实现式(8)更方便实际计算, 通过对式(8)运用莱布尼茨微分规则, 容易证明$[V_Kf](t)$可由如下的微分方程来产生:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = K(t,t)f(t)+\displaystyle\int_0^t\frac{\partial K(t,\tau)}{\partial t}f(\tau)\mathrm{d}\tau,\\ \xi(0) = \xi_0 = 0,\\ \xi(t) = [V_Kf](t),\ \forall t\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}.\end{cases} \tag{9}$$

下面将介绍关于函数$f(t)$的导数$f^{(i)}(t), i\in\mathbb{Z}_+$的积分算子映射$[V_Kf^{(i)}](t)$引理.

引理 2[34]　定义$f^{(i)}(t), i\in\mathbb{Z}_+$为$f(t)$的$i$阶导数, 则$[V_Kf^{(i)}](t)$可展开成如下形式:

$$\begin{aligned}[V_Kf^{(i)}](t) = &\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j-1}f^{(j)}(t)K^{(i-j-1)}(t,t)+\\ &\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}f^{(j)}(0)K^{(i-j-1)}(t,0)+\\ &(-1)^i[V_{K^{(i)}}f](t),\end{aligned} \tag{10}$$

其中$K^{(i)}(\cdot,\cdot)$表示$K(\cdot,\cdot)$关于第2个变量的i阶导数.

3 固定时间参数估计

为了方便参数估计器的设计, 我们将系统(3)重新写成如下形式:

$$\begin{cases}\dot{y}_1=\theta_1y_1+\theta_2y_2+\theta_3y_3,\\ \ddot{y}_2=-\gamma y_2+\dot{y}_1-\dot{y}_2,\end{cases}\tag{11}$$

其中$y_3=|y_1+1|-|y_1-1|$, 参数$\theta_1,\theta_2,\theta_3$满足

$$\theta_1=-\beta(1+a),\ \theta_2=\beta,\ \theta_3=-b\beta,\tag{12}$$

那么β,a,b,γ的估计可转变为对$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma$的估计.

3.1 核函数$K(t,\tau)$的选取

为了计算函数$f(t)$的Volterra积分算子的映射$[V_Kf](t)$, 需要先选取核函数$K(t,\tau)$. 不同于文献[26], 本文核函数$K(t,\tau)$选取如下:

$$K(t,\tau)=\mathrm{e}^{-w_h(t-\tau)}(1-\mathrm{e}^{-w\tau})^2[1-\mathrm{e}^{-w(t-\tau)}]^2,\tag{13}$$

其中$w_h,w>0$为设计参数. 将$K(t,\tau)$展开可得

$$\begin{aligned}&K(t,\tau)=\\&\mathrm{e}^{-w_ht}(\mathrm{e}^{w_h\tau}-2\mathrm{e}^{(w_h-w)\tau}+\mathrm{e}^{(w_h-2w)\tau})-\\&2\mathrm{e}^{-(w_h+w)t}\mathrm{e}^{w\tau}(\mathrm{e}^{w_h\tau}-2\mathrm{e}^{(w_h-w)\tau}+\mathrm{e}^{(w_h-2w)\tau})+\\&\mathrm{e}^{-(w_h+2w)t}\mathrm{e}^{2w\tau}(\mathrm{e}^{w_h\tau}-2\mathrm{e}^{(w_h-w)\tau}+\mathrm{e}^{(w_h-2w)\tau})\triangleq\\&\sum_{p=0}^{2}\mathrm{e}^{-(w_h+wp)t}f_p(\tau),\end{aligned}\tag{14}$$

其中$f_p(\tau),p=0,1,2$满足

$$\begin{aligned}&f_p(\tau)=\sum_{q=0}^{2}k_{p,q}\mathrm{e}^{(w_h-qw+pw)\tau},\\&k_{0,0}=1,\ k_{0,1}=-2,\ k_{0,2}=1,\\&k_{1,p}=-2k_{0,p},\ k_{2,p}=k_{0,p},\ \forall p=0,1,2.\end{aligned}\tag{15}$$

由式(15)可以计算$f_p^{(i)}(\tau),i=0,1,2$满足

$$\begin{cases}f_p^{(i)}(\tau)=\sum\limits_{q=0}^{2}\bar{k}_{p,q}\mathrm{e}^{(w_h-qw+pw)\tau},\\ \bar{k}_{p,q}=k_{p,q}(w_h-qw+pw)^i.\end{cases}\tag{16}$$

由式(14)(16)可知, 核函数$K(t,\tau)$关于τ的导数满足

$$\begin{cases}K^{(i)}(t,\tau)\triangleq\sum\limits_{p=0}^{2}F_{i,p}(t,\tau),\ i=0,1,2,\\ F_{i,p}(t,\tau)=\mathrm{e}^{-(w_h+wp)t}f_p^{(i)}(\tau).\end{cases}\tag{17}$$

由式(16)–(17)容易验证, 对$\forall i=0,1$, 有

$$K^{(i)}(t,t)=0,\ K^{(i)}(t,0)=0.\tag{18}$$

注 1 文献[26]中选取的核函数$K(t,\tau)$满足$K(t,\tau)=K_h(t,\tau)=\mathrm{e}^{-w_h(t-\tau)}(1-\mathrm{e}^{-w\tau})^N$. 当利用此核函数估计参数$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma$时, 为了消除未知变量的影响, 需要选取具有不同参数w_h,w_1,w_2和相同参数w的核函数K_h,K_1,K_2. 和文献[26]不同, 本文只需选取一个核函数就能实现对系统所有未知参数的估计.

3.2 参数估计

对系统(11)两边同时进行积分算子V_K运算可得

$$\begin{cases}[V_K\dot{y}_1](t)=\theta_1[V_Ky_1](t)+\theta_2[V_Ky_2](t)+\\ \qquad\theta_3[V_Ky_3](t),\\ [V_K\ddot{y}_2](t)=[V_K\dot{y}_1](t)-[V_K\dot{y}_2](t)-\\ \qquad\gamma[V_Ky_2](t),\end{cases}\tag{19}$$

尽管$y_1(t),y_2(t)$是已知的, 但其导数$\dot{y}_1,\dot{y}_2,\ddot{y}_2$是未知的, 因此$[V_K\dot{y}_1]$, $[V_K\dot{y}_2]$, $[V_K\ddot{y}_2]$是未知的. 运用引理3对其进行展开, 并将式(18)代入可得

$$\begin{cases}[V_K\dot{y}_1](t)=-[V_{K^{(1)}}y_1](t),\\ [V_K\dot{y}_2](t)=-[V_{K^{(1)}}y_2](t),\\ [V_K\ddot{y}_2](t)=[V_{K^{(2)}}y_2](t),\end{cases}\tag{20}$$

将式(20)代入式(19)可得

$$\begin{cases}-[V_{K^{(1)}}y_1](t)=\theta_1[V_Ky_1](t)+\theta_2[V_Ky_2](t)+\\ \qquad\theta_3[V_Ky_3](t),\\ [V_{K^{(2)}}y_2](t)=-[V_{K^{(1)}}y_1](t)+[V_{K^{(1)}}y_2](t)-\\ \qquad\gamma[V_Ky_2](t).\end{cases}\tag{21}$$

注 2 注意到, 式(21)中除了参数$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma$外, 其它变量均是已知的, 因此可以用来设计参数估计器. 然而, 直接根据Volterra积分算子的定义式(8)去计算式(21)中的Volterra积分算子映射非常繁琐, 用微分方程来产生等式(21)中的所需变量更方便实际计算.

下面的引理中给出等式(21)中的变量$[V_{K^{(i)}}y_j](t)$, $\forall i\in\{0,1,2\},\forall j\in\{1,2,3\}$的微分方程产生方式, 其证明详见附录.

引理 3 对$\forall i\in\{0,1,2\}$, $\forall j\in\{1,2,3\}$, 构造如下的微分方程:

$$\begin{cases}\dot{\xi}_{i,p}^{y_j}(t)=F_{i,p}(t,t)y_j(t)-(w_h+wp)\xi_{i,p}^{y_j}(t),\\ \xi_{i,p}^{y_j}(0)=0,\qquad p\in\{0,1,2\},\\ \xi_{i,y_j}(t)=\sum\limits_{p=0}^{2}\xi_{i,p}^{y_j}(t),\ \forall t\in\mathbb{R}_{\geqslant0},\end{cases}\tag{22}$$

其中$F_{i,p}(t,t)=\mathrm{e}^{-(w_h+wp)t}f_p^{(i)}(t)$可由式(17)获得. 若核函数$K(t,\tau)$满足式(13), 那么$\xi_{i,y_j}(t)=[V_{K^{(i)}}y_j](t)$对$\forall i\in\{0,1,2\},\forall j\in\{1,2,3\}$成立.

由引理3可得$\xi_{i,y_j}(t)=[V_{K^{(i)}}y_j](t)$, 因此式(21)可重新写为

$$\begin{cases}-\xi_{1,y_1}(t)=\theta_1\xi_{0,y_1}(t)+\theta_2\xi_{0,y_2}(t)+\theta_3\xi_{0,y_3}(t),\\ \xi_{2,y_2}(t)=-\xi_{1,y_1}(t)+\xi_{1,y_2}(t)-\gamma\xi_{0,y_2}(t).\end{cases}\tag{23}$$

为了方便估计器的设计, 等式(23)可以重新写为

$$\begin{cases} s_1(t) = v_1(t)\theta, \\ s_2(t) = v_2(t)\gamma, \end{cases} \tag{24}$$

其中:

$$\begin{cases} \theta = [\theta_1 \ \ \theta_2 \ \ \theta_3]^{\mathrm{T}}, \\ s_1(t) = -\xi_{1,y_1}(t), \\ v_1(t) = [\xi_{0,y_1}(t), \xi_{0,y_2}(t), \xi_{0,y_3}(t)], \\ s_2(t) = \xi_{1,y_1}(t) - \xi_{1,y_2}(t) + \xi_{2,y_2}(t), \\ v_2(t) = -\xi_{0,y_2}(t). \end{cases} \tag{25}$$

为了设计自适应参数估计器, 需要$v_1(t), v_2(t)$满足如下的持续可激励假设:

假设 1 函数$v_1(t), v_2(t)$满足持续可激励条件, 即存在常数$r > 0, T_0 > 0$使得如下不等式对$\forall t \geqslant T_0$成立:

$$\int_{t-T_0}^{t} v_1^{\mathrm{T}}(\tau)v_1(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant r\boldsymbol{I}_{3\times 3}, \ \int_{t-T_0}^{t} v_2^2(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant r.$$

注 3 由文献[35–36]可知, 假设1中的持续可激励条件是解决自适应参数辨识问题的必备条件. 在这一假设条件下, 通过直接应用文献[35–36]中的理论方法, 容易针对系统(24)设计自适应参数估计算法, 实现参数的渐近估计. 然而, 本文的主要目标是实现参数的固定时间精确估计, 因此传统的渐近估计算在此无法满足要求.

可以发现式(24)中两个等式一个是向量形式一个是标量形式, 因此对两式分别左乘$v_1^{\mathrm{T}}(t)$和$v_2(t)$可得

$$\begin{cases} \bar{s}_1(t) = \bar{v}_1(t)\theta, \\ \bar{s}_2(t) = \bar{v}_2(t)\gamma, \end{cases} \tag{26}$$

其中:

$$\begin{cases} \bar{s}_1(t) = v_1^{\mathrm{T}}(t)s_1(t), \ \bar{v}_1(t) = v_1^{\mathrm{T}}(t)v_1(t), \\ \bar{s}_2(t) = v_2(t)s_2(t), \ \bar{v}_2(t) = v_2^2(t). \end{cases} \tag{27}$$

对式(26)等式两边同时进行积分算子V_{K_g}运算, 其中$K_g = \mathrm{e}^{-g(t-\tau)}, g > 0$, 则可得

$$\begin{cases} s_{1,f}(t) = v_{1,f}(t)\theta, \\ s_{2,f}(t) = v_{2,f}(t)\gamma, \end{cases} \tag{28}$$

其中: $s_{1,f}(t) = [V_{K_g}\bar{s}_1](t), v_{1,f}(t) = [V_{K_g}\bar{v}_1](t), s_{2,f}(t) = [V_{K_g}\bar{s}_2](t), v_{2,f}(t) = [V_{K_g}\bar{v}_2](t)$. 通过求导容易证明, 变量$s_{1,f}(t), v_{1,f}(t), s_{2,f}(t), v_{2,f}(t)$均可由如下系统产生:

$$\begin{cases} \dot{s}_{1,f}(t) = -gs_{1,f}(t) + \bar{s}_1(t), \ s_{1,f}(0) = 0 \in \mathbb{R}^3, \\ \dot{v}_{1,f}(t) = -gv_{1,f}(t) + \bar{v}_1(t), \ v_{1,f}(0) = 0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \\ \dot{s}_{2,f}(t) = -gs_{2,f}(t) + \bar{s}_2(t), \ s_{2,f}(0) = 0 \in \mathbb{R}, \\ \dot{v}_{2,f}(t) = -gv_{2,f}(t) + \bar{v}_2(t), \ v_{2,f}(0) = 0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{29}$$

定义如下辅助变量:

$$\begin{cases} R_{1,f}(t) = v_{1,f}(t)\hat{\theta}(t) - s_{1,f}(t), \\ R_{2,f}(t) = v_{2,f}(t)\hat{\gamma}(t) - s_{2,f}(t), \end{cases} \tag{30}$$

其中: $\hat{\theta}(t), \hat{\gamma}(t)$为自适应估计参数, 其更新律将由下面定理给出.

定理 1 自适应参数$\hat{\theta}(t), \hat{\gamma}(t)$的更新律为

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \begin{cases} v_{1,f}^{-1}(t)[-\alpha_1\lfloor R_{1,f}(t)\rceil^{\kappa_1} - \alpha_2\lfloor R_{1,f}(t)\rceil^{\kappa_2} + \\ (gv_{1,f}(t) - \bar{v}_1(t))\hat{\theta}(t) + \dot{s}_{1,f}(t)], \\ \qquad \min\{\mathrm{eig}(v_{1,f}(t))\} \geqslant \varepsilon, \\ 0, \quad \min\{\mathrm{eig}(v_{1,f}(t))\} < \varepsilon, \end{cases}$$

$$\dot{\hat{\gamma}}(t) = \begin{cases} v_{2,f}^{-1}(t)[-\alpha_1\lfloor R_{2,f}(t)\rceil^{\kappa_1} - \alpha_2\lfloor R_{2,f}(t)\rceil^{\kappa_2} + \\ (gv_{2,f}(t) - \bar{v}_2(t))\hat{\gamma}(t) + \dot{s}_{2,f}(t)], \\ \qquad |v_{2,f}(t)| \geqslant \varepsilon, \\ 0, \quad |v_{2,f}(t)| < \varepsilon, \end{cases} \tag{31}$$

其中各变量分别由式(22)(25)(27)(29)以及式(30)给出, $\min\{\mathrm{eig}(v_{1,f}(t))\}$ 表示$v_{1,f}(t)$的特征值的最小值. 若假设1成立, 且自适应更新律中的各参数满足

$$\begin{cases} 0 < \kappa_1 < 1, \ \kappa_2 > 1, \ 0 < \varepsilon \leqslant \mathrm{e}^{-gT_0}r, \\ g > 0, \ \alpha_1 > 0, \ \alpha_2 > 0, \end{cases} \tag{32}$$

那么存在一个不依赖初始误差的固定时间$T_{\max}$使得$\hat{\theta}(t) = \theta, \hat{\gamma}(t) = \gamma, \forall t \geqslant T_{\max}$成立, 其中$T_{\max}$估计值为

$$T_{\max} = \frac{2^{\frac{1-\kappa_1}{2}}}{\alpha_1(1-\kappa_1)} + \frac{2^{\frac{1-\kappa_2}{2}}}{\alpha_2(\kappa_2-1)} + T_0. \tag{33}$$

注 4 由式(33)可以发现参数估计时间$T_{\max}$只依赖于自适应律的参数, 并可以通过调节参数$\alpha_1, \alpha_2, \kappa_1, \kappa_2$来调节$T_{\max}$.

证 首先证明辅助变量$R_{1,f}(t), R_{2,f}(t)$能够在固定时间内收敛到零. 对$R_{1,f}(t), R_{2,f}(t)$求导可得

$$\begin{cases} \dot{R}_{1,f}(t) = \dot{v}_{1,f}(t)\hat{\theta}(t) + v_{1,f}(t)\dot{\hat{\theta}}(t) - \dot{s}_{1,f}(t), \\ \dot{R}_{2,f}(t) = \dot{v}_{2,f}(t)\hat{\gamma}(t) + v_{2,f}(t)\dot{\hat{\gamma}}(t) - \dot{s}_{2,f}(t). \end{cases} \tag{34}$$

由$v_{1,f}(t)$的定义以及假设1可得, 当$t \geqslant T_0$,

$$\begin{aligned} & v_{1,f}(t) = [V_{K_g}\bar{v}_1](t) = \\ & \int_0^t \mathrm{e}^{-g(t-\tau)}v_1^{\mathrm{T}}(\tau)v_1(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant \\ & \int_{t-T_0}^t \mathrm{e}^{-g(t-\tau)}v_1^{\mathrm{T}}(\tau)v_1(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant \\ & \mathrm{e}^{-gT_0}\int_{t-T_0}^t v_1^{\mathrm{T}}(\tau)v_1(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant \\ & \mathrm{e}^{-gT_0}r\boldsymbol{I}_{3\times 3}. \end{aligned} \tag{35}$$

同理可得

$$v_{2,f}(t) \geqslant \mathrm{e}^{-gT_0} r, \forall t \geqslant T_0. \tag{36}$$

由式(35)–(36)可知

$$\min\{\mathrm{eig}(v_{1,f}(t))\} \geqslant \varepsilon,\ |v_{2,f}(t)| \geqslant \varepsilon,$$

对$\forall t \geqslant T_0$成立, 因此有

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}(t) = v_{1,f}^{-1}(t)[-\alpha_1 \lfloor R_{1,f}(t) \rceil^{\kappa_1} - \alpha_2 \lfloor R_{1,f}(t) \rceil^{\kappa_2} + \\ \qquad (gv_{1,f}(t) - \bar{v}_1(t))\hat{\theta}(t) + \dot{s}_{1,f}(t)],\ t \geqslant T_0, \\ \dot{\hat{\gamma}}(t) = v_{2,f}^{-1}(t)[-\alpha_1 \lfloor R_{2,f}(t) \rceil^{\kappa_1} - \alpha_2 \lfloor R_{2,f}(t) \rceil^{\kappa_2} + \\ \qquad (gv_{2,f}(t) - \bar{v}_2(t))\hat{\gamma}(t) + \dot{s}_{2,f}(t)],\ t \geqslant T_0. \end{cases} \tag{37}$$

将式(29)(37)代入式(34)可得

$$\begin{cases} \dot{R}_{1,f}(t) = -\alpha_1 \lfloor R_{1,f}(t) \rceil^{\kappa_1} - \alpha_2 \lfloor R_{1,f}(t) \rceil^{\kappa_2}, \\ \qquad t \geqslant T_0, \\ \dot{R}_{2,f}(t) = -\alpha_1 \lfloor R_{2,f}(t) \rceil^{\kappa_1} - \alpha_2 \lfloor R_{2,f}(t) \rceil^{\kappa_2}, \\ \qquad t \geqslant T_0, \end{cases} \tag{38}$$

其中: $R_{1,f}(t) \in \mathbb{R}^3, R_{2,f}(t) \in \mathbb{R}$. 定义

$$\begin{bmatrix} R_{1,f}(t) \\ R_{2,f}(t) \end{bmatrix} = [r_1(t)\ \ r_2(t)\ \ r_3(t)\ \ r_4(t)]^{\mathrm{T}},$$

那么式(38)可以写成如下的4个标量系统:

$$\dot{r}_i(t) = -\alpha_1 \lfloor r_i(t) \rceil^{\kappa_1} - \alpha_2 \lfloor r_i(t) \rceil^{\kappa_2}, \\ \forall t \geqslant T_0,\ i = 1, 2, 3, 4. \tag{39}$$

选取如下的Lyapunov函数V_i:

$$V_i = \frac{1}{2} r_i^2(t),\ i = 1, 2, 3, 4. \tag{40}$$

对V_i求导可得

$$\dot{V}_i = -\alpha_1 |r_i(t)|^{1+\kappa_1} - \alpha_2 |r_i(t)|^{1+\kappa_2} = \\ -2^{\frac{1+\kappa_1}{2}} \alpha_1 V_i^{\frac{1+\kappa_1}{2}} - 2^{\frac{1+\kappa_2}{2}} \alpha_2 V_i^{\frac{1+\kappa_2}{2}},\ t \geqslant T_0. \tag{41}$$

由引理1可得, $r_i(t) = 0, \forall t \geqslant T_{\max}, i = 1, 2, 3, 4$成立, 即

$$R_{1,f}(t) = 0 \in \mathbb{R}^3,\ R_{2,f}(t) = 0 \in \mathbb{R},\ \forall t \geqslant T_{\max} \tag{42}$$

成立, 其中$T_{\max}$满足式(33).

由式(30)可知, 当$R_{1,f}(t) = 0, R_{2,f}(t) = 0$时, 有

$$\begin{cases} s_{1,f}(t) = v_{1,f}(t)\hat{\theta}(t), \\ s_{2,f}(t) = v_{2,f}(t)\hat{\gamma}(t). \end{cases} \tag{43}$$

将式(28)和式(43)相减可得

$$\begin{cases} v_{1,f}(t)(\theta - \hat{\theta}(t)) = 0,\ t \geqslant T_{\max}, \\ v_{2,f}(t)(\gamma - \hat{\gamma}(t)) = 0,\ t \geqslant T_{\max}. \end{cases} \tag{44}$$

由式(35)–(36)可知$v_{1,f}(t)$可逆且$v_{2,f}(t)$大于零, 因此可得

$$\theta = \hat{\theta}(t),\ \gamma = \hat{\gamma}(t) = 0,\ \forall t \geqslant T_{\max}. \tag{45}$$

由此, 定理1得证. 证毕.

4 仿真算例

为了验证算法的有效性, 本节将对系统(3)运用定理1中提出的固定时间参数估计算法进行仿真验证, 并通过与文献[26]所提出的有限时间参数估计算法进行比较, 以验证所提算法的优越性.

4.1 参数选取

对系统选取如下的初始状态和参数:

$$\begin{cases} x_1(0) = -0.9,\ x_2(0) = -0.15,\ x_3(0) = 1.47, \\ \gamma = 27,\ \beta = 15.6,\ a = -5/7,\ b = -3/14. \end{cases} \tag{46}$$

系统的混沌吸引子及其在各坐标平面的投影如图2所示.

按照定理1设计固定时间自适应参数估计算法, 其参数选取如表1所示. 按照文献[26]设计有限时间参数估计算法, 其参数选取与文献[26]相同. 为了验证算法的固定时间收敛性, 分别选取如下两个不同的自适应初始值:

$$\begin{cases} \text{(C.1)}: \hat{\theta}(0) = [0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ \hat{\gamma}(0) = 0, \\ \text{(C.2)}: \hat{\theta}(0) = [10^5\ 10^5\ 10^5]^{\mathrm{T}},\ \hat{\gamma}(0) = 10^5. \end{cases} \tag{47}$$

表 1 估计器参数选取

Table 1 Parameter selection of the estimator

自适应参数	数值	核函数参数	数值
α_1, α_2	5	w_h	0.1
κ_1	3/5	w	1
κ_2	2	g	0.001
ε	10^{-6}		

下面将分别针对以上两个不同的自适应初始值, 分别对本文所提出的固定时间参数估计算法和文献[26]所提出的有限时间参数估计算法进行仿真验证和比较.

4.2 仿真结果分析

当选取$r = 10^{-12}$, $T_0 = 0.6$ s, 可以验证假设1成立. 由定理1可得$T_{\max}$的表达式

$$T_{\max} = \frac{2^{\frac{1-\kappa_1}{2}}}{\alpha_1(1-\kappa_1)} + \frac{2^{\frac{1-\kappa_2}{2}}}{\alpha_2(\kappa_2-1)} + T_0. \tag{48}$$

将表1中的参数代入上式可以算出参数估计器的收敛时间$T_{\mathrm{c}} < T_{\max} = 1.4$ s. 固定时间自适应参数估计算法的仿真结果见图3和图4. 选取自适应初始值$\hat{\theta}(0) = [0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 0$, 仿真结果见图3. 由图3可得, 本文所提出的算法能够在1.4 s内实现对系统参数β, γ, a, b的准确估计. 当选取一个大的自适应初始值$\hat{\theta}(0) = [10^5\ \ 10^5\ \ 10^5]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 10^5$, 仿真结果见图4.

由图4可得, 即使在大的初始状态下, 所提算法依然能够在1.4 s内实现对系统参数β, γ, a, b的准确估计, 由此验证了本文所提算法的固定时间收敛性质, 即收敛时间T_c有一个不依赖初始值上界$T_{\max}$.

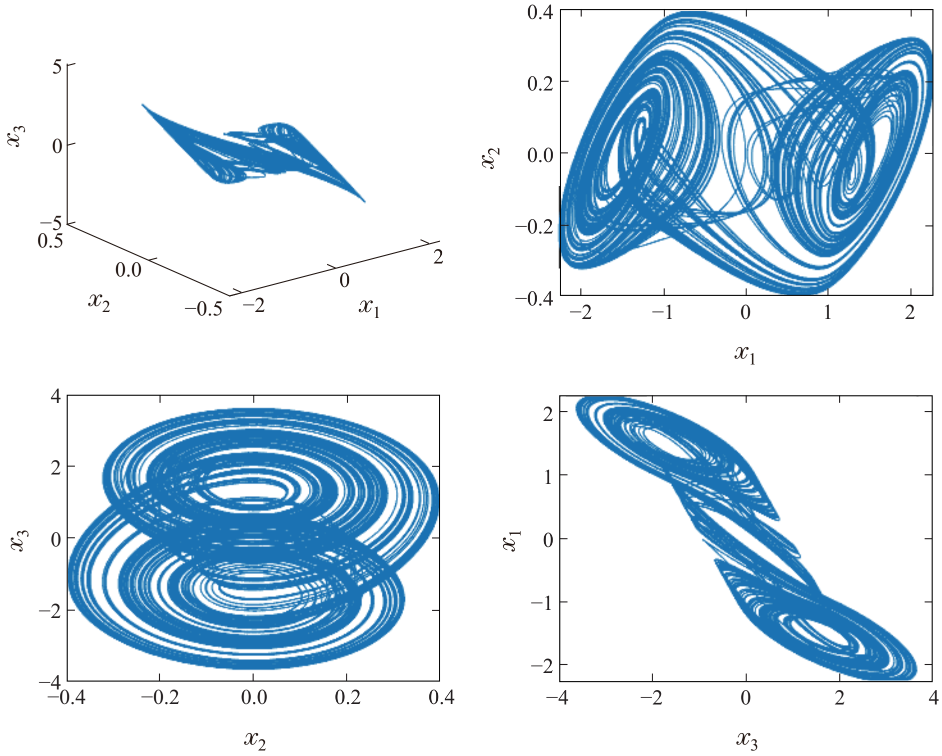

图 2　系统的混沌吸引子图

Fig. 2　Chaotic attractor of system

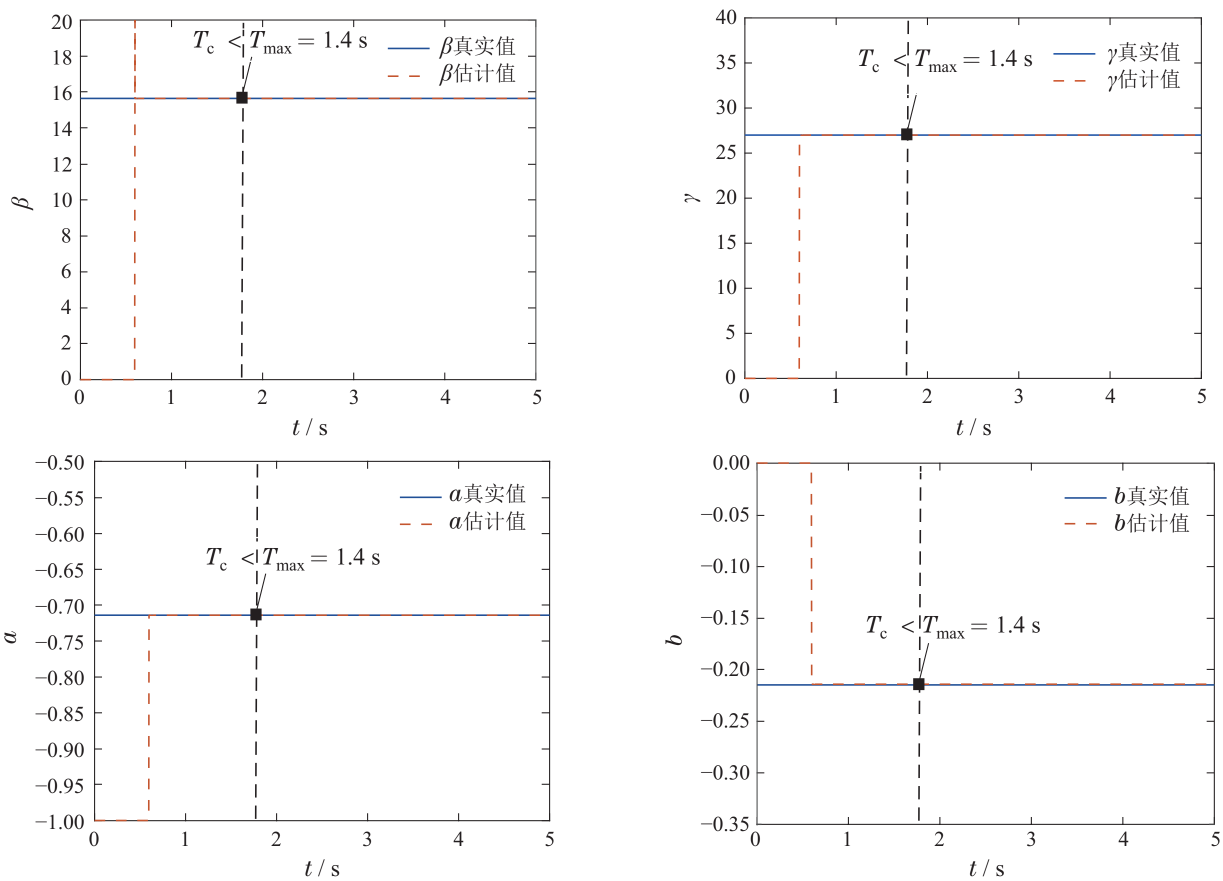

图 3　自适应初始值$\hat{\theta}(0) = [0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 0$下的固定时间参数估计

Fig. 3　Parameter estimation under adaptive initial values $\hat{\theta}(0) = [0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 0$

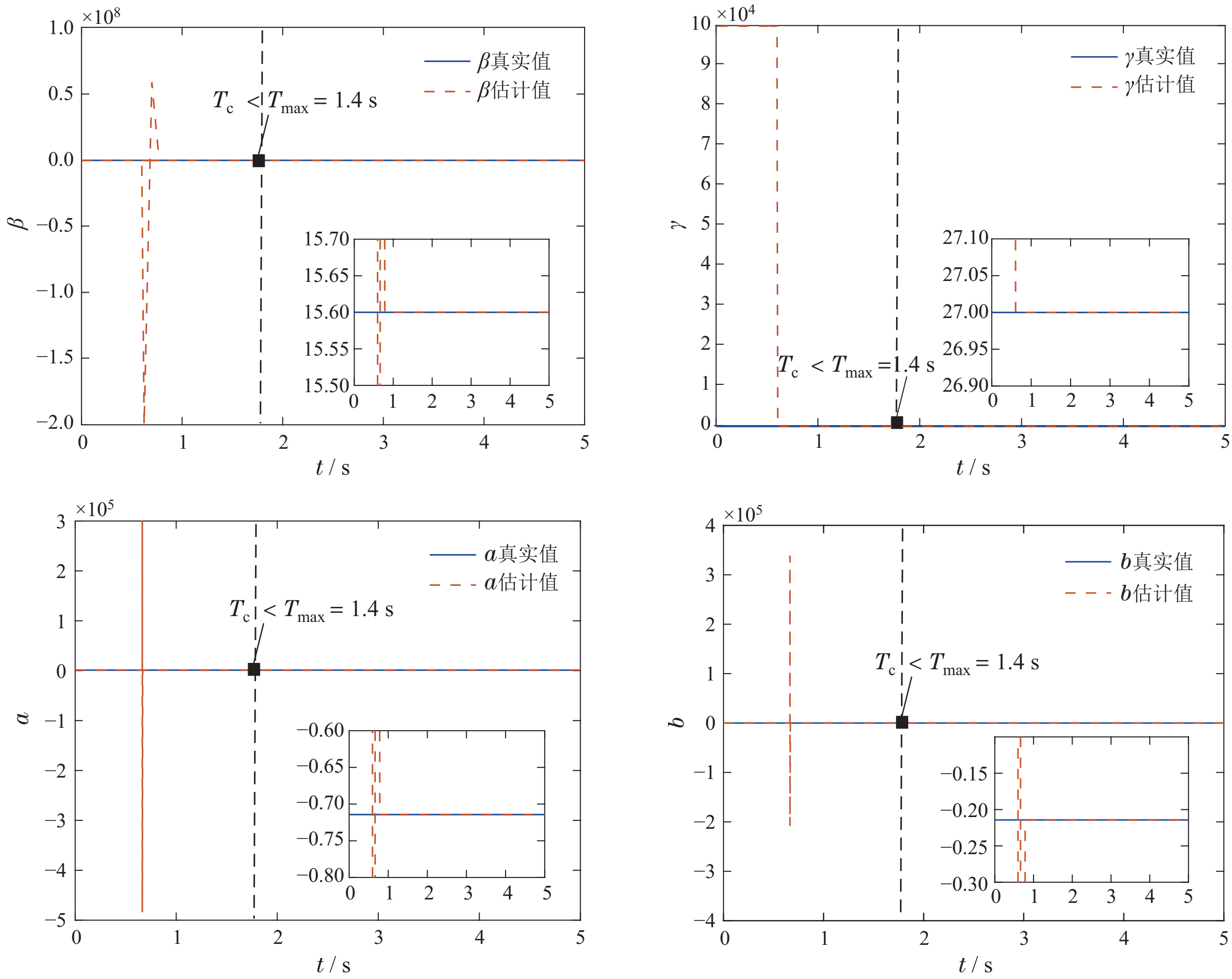

图 4 自适应初始值$\hat{\theta}(0) = [10^5\ \ 10^5\ \ 10^5]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 10^5$下的固定时间参数估计

Fig. 4 Parameter estimation under adaptive initial values $\hat{\theta}(0) = [10^5\ \ 10^5\ \ 10^5]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 10^5$

文献[26]所提出的有限时间自适应参数估计算法的仿真结果见图5. 由图5可知, 选取自适应初始值$\hat{\theta}(0) = [0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 0$时, 有限时间参数估计算法也能在一个很短的时间$T_{\mathrm{c}} = 5$ s 内实现对参数的有限时间估计. 然而, 当选取一个大的自适应初始值$\hat{\theta}(0) = [10^5\ \ 10^5\ \ 10^5]^{\mathrm{T}}$, $\hat{\gamma}(0) = 10^5$时, 可以发现参数估计器的收敛时间增加到$T_{\mathrm{c}} > 150$ s. 由此也说明了本文所提出的固定时间参数估计算法的优越性.

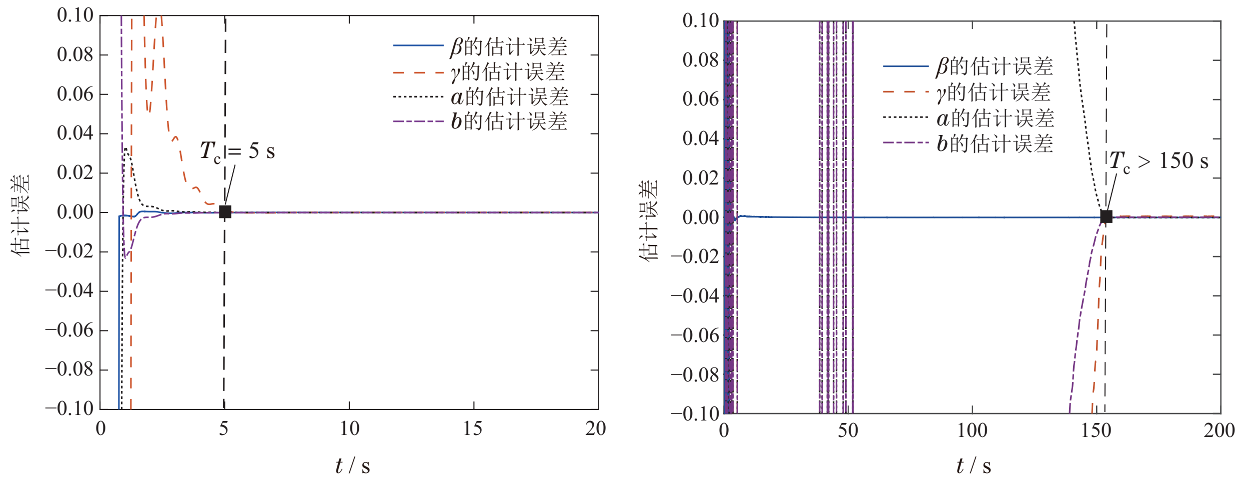

图 5 有限时间参数估计: 左图: 初始值$\hat{\theta}(0) = [0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 0$; 右图初始值$\hat{\theta}(0) = [10^5\ \ 10^5\ \ 10^5]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 10^5$

Fig. 5 Finite-time parameter estimation: Left: initial values $\hat{\theta}(0) = [0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 0$; Right: initial values $\hat{\theta}(0) = [10^5\ \ 10^5\ \ 10^5]^{\mathrm{T}}, \hat{\gamma}(0) = 10^5$

注 5 定理1只给出了参数$\theta_1, \theta_2, \theta_3$和$\gamma$估计算法. 由定理1可得, 参数估计值$\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$和$\hat{\gamma}$能够实现对参数θ_1, θ_2, θ_3和γ的固定时间估计. 由式(12)可得

$$\beta = \theta_2,\ a = -\theta_1/\theta_2 - 1,\ b = -\theta_3/\theta_2. \tag{49}$$

因此, 根据式(49)容易证明, β, γ, a和b的估计值可由$\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$和$\hat{\gamma}$获得.

$$\hat{\beta} = \hat{\theta}_2, \hat{\gamma} = \gamma,\ \hat{a} = -\hat{\theta}_1/\hat{\theta}_2 - 1,\ \hat{b} = -\hat{\theta}_3/\hat{\theta}_2. \tag{50}$$

需要注意的是, 估计值$\hat{\theta}_2$在收敛到真实值的过程中可能会穿过零点, 这可能会导致在仿真时$\hat{a}, \hat{b}$的计算出现问题. 为了解决这一问题, 可以选取一个小的阈值$0 < \delta \ll |\theta_2|$, 在计算$\hat{a}, \hat{b}$时, 当$|\hat{\theta}_2| < \delta$时选取$\hat{\theta}_2 = \delta \operatorname{sgn} \hat{\theta}_2$, 当$|\hat{\theta}_2| \geqslant \delta$时选取$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2$.

5 总结

本文针对不确定Chua电路系统, 提出了一种新的自适应固定时间参数估计算法. 与传统的渐近估计和有限时间估计算法相比, 本方法在实现对参数精确估计的同时, 还具有收敛时间不依赖于初始估计误差的优良特性. 需要指出的是, 和许多已有文献类似[21,26], 尽管本文所使用的持续可激励假设已经在实验中被验证, 但缺乏严格的理论证明. 并且本文所提算法仅能实现对参数的估计, 不能实现对未知状态的估计. 此外, 由于混沌系统对初始值的选取非常敏感, 对系统初始状态的估计也具有重要的理论和实际意义. 因此, 如何解决以上问题是笔者今后要考虑的主要课题.

参考文献:

[1] CAO Rui, SHEN Haidong, LIU Yanbin, et al. Robust optimization of commands based on polynomial chaos and application in flight control. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(12): 2482 – 2492.
(曹瑞, 沈海东, 刘燕斌, 等. 基于混沌多项式的指令鲁棒优化及在飞行控制中的应用. 控制理论与应用, 2020, 37(12): 2482 – 2492.)

[2] WU Yang, ZHANG Jiancheng. Finite time observer-based synchronization for discrete-time chaotic systems. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(8): 1855 – 1864.
(吴阳, 张建成. 基于有限时间观测器的离散系统混沌同步. 控制理论与应用, 2020, 37(8): 1855 – 1864.)

[3] LIN Qian, WU Xiaofeng, CHEN Yun. Global finite-time synchronization of chaotic systems based on two-step control strategy. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(8): 1194 – 1198.
(林茜, 吴晓锋, 陈云. 基于两步控制策略的混沌系统全局有限时间同步. 控制理论与应用, 2018, 35(8): 1194 – 1198.)

[4] ARAB A, ROSTAMI M J, GHAVAMI B. An image encryption method based on chaos system and AES algorithm. *The Journal of Supercomputing*, 2019, 75(10): 6663 – 6682.

[5] WU W S, ZHAO Z S, ZHANG J, et al. State feedback synchronization control of coronary artery chaos system with interval time-varying delay. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(3): 1773 – 1783.

[6] CHUA L O, LIN G N. Canonical realization of Chua's circuit family. *IEEE Transactions on Circuits & Systems*, 1990, 37(7): 885 – 902.

[7] MAGGIO G M, FEO O D, KENNEDY M P. Nonlinear analysis of the Colpitts oscillator and applications to design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I Fundamental Theory and Applications*, 1999, 46(9): 1118 – 1130.

[8] MATSUMOTO T. A chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits & Systems*, 1984, 31(12): 1055 – 1058.

[9] CHUA L O, KOMURO M, MATSUMOTO T. The double scroll family. *IEEE Transactions on Circuits & Systems*, 1986, 33(11): 1072 – 1118.

[10] GAO Yongyi, LI Bangyan. Chaotic synchronization of non-autonomous Chua's circuits with variable parameters. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 389 – 394.
(高永毅, 李邦彦. 变参数非自治蔡氏电路的混沌同步. 控制理论与应用, 2011, 28(3): 389 – 394.)

[11] WANG Jiang, QIAO Guodong, DENH Bin. Variable universe adaptive fuzzy control and its application for Chua's chaotic circuit. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(3): 433 – 438.
(王江, 乔国栋, 邓斌. 变论域自适应模糊控制及其在Chua's混沌电路中的应用. 控制理论与应用, 2006, 23(3): 433 – 438.)

[12] MAAMRI F, BOUOUDEN S, BOULKAIBET I. Identification of Chua's chaotic circuit parameters using penguins search optimisation algorithm. *Cyber-Physical Systems*, 2021: 1 – 28.

[13] KAYA T. A true random number generator based on a Chua and RO-PUF: Design, implementation and statistical analysis. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 2020, 102(2): 415 – 426.

[14] WANG C, LIU Z, HOBINY A, et al. Capturing and shunting energy in chaotic Chua circuit. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, 134: 109697.

[15] PARLITZ U, ZOLLER R, HOLZFUSS J, et al. Reconstructing physical variables and parameters from dynamical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1994, 4(6): 1707.

[16] STOJANOVSKI T, PARLITZ U, KOCAREV L, et al. Exploiting delay reconstruction for chaos synchronization. *Physics Letters A*, 1997, 233(4/6): 355 – 360.

[17] SHI S, MIN H, DING S. Observer-based adaptive scheme for fixed-time frequency estimation of biased sinusoidal signals. *Automatica*, 2021, 127: 109559.

[18] MIN H, XU S, FEI S, et al. Observer-based NN control for nonlinear systems with full-state constraints and external disturbances. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3056524.

[19] BAKER G L, GOLLUB J P, BLACKBURN J A. Inverting chaos: Extracting system parameters from experimental data. *Chaos*, 1996, 6(4): 528 – 533.

[20] HUIJBERTS H, NIJMEIJER H, WILLEMS R. System identification in communication with chaotic systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I Fundamental Theory and Applications*, 2000, 47(6): 800 – 808.

[21] AGUILAR-IBAEZ C, HERNADEZ-RUBIO E, SUAREZ-CASTAON M S. On recovering the parametric model of the Chua system via a gradient algorithm. *Revista Mexicana De Fisica*, 2007, 53(6): 436 – 440.

[22] YAN Lihong, HAN Ziyang, WANG Renyi, et al. Finite time stochastic synchronization and parameter identification of generalized Sprott-C systems. *Henan Science*, 2020, 38(4): 524 – 530.
(闫丽宏, 韩紫阳, 王仁义, 等. 广义Sprott-C系统的有限时间随机同步与参数辨识. 河南科学, 2020, 38(4): 524 – 530.)

[23] ARANCIBIA A, SORIANO-RANGEL C A, MANCILLA-DAVID F, et al. Finite-time identification of the Thévenin equivalent parameters in power grids. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2019, DOI: 10.1016/j.ijepes.2019.105534.

[24] TU Lilan, WANG Yujuan, HU Yang. Finite time synchronization and parameter identification of uncertain uncertain chaotic systems. Mathematical practice and understanding. *Journal of Mathematics in Practice and Theory*, 2018, 48(19): 105 – 112.
(涂俐兰, 王宇娟, 胡洋. 不确定临界混沌系统的有限时间同步与参数识别. 数学的实践与认识, 2018, 48(19): 105 – 112.)

[25] LU Huibin, PENG Haipeng, WEI Lixin, et al. A new method for identifying the parameters of Lorenz chaotic system. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2004, 25(6): 757 – 759.
(卢辉斌, 彭海朋, 魏立新, 等. 辨识Lorenz混沌系统参数的新方法. 仪器仪表学报, 2004, 25(6): 757 – 759.)

[26] FEDELE G, DALFONSO L, PIN G, et al. Volterra's kernels-based finite-time parameters estimation of the Chua system. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 318: 121 – 130.

[27] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106 – 2110.

[28] SHI S, SUN Y, HU Y, et al. Robust fixed-time output-feedback control for linear systems without chattering: An exact uncertainty compensation method. *Science China Information Science*, 2022, 65(7): 1 – 2.

[29] SUN Xiaotong, GUO Ge, ZHANG Pengfei. Fixed-time consensus tracking of multi-agent systems under unmatched disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(6): 1368 – 1376.
(孙小童, 郭戈, 张鹏飞. 非匹配扰动下的多智能体系统固定时间一致跟踪. 自动化学报, 2021, 47(6): 1368 – 1376.)

[30] CHENG Ming, AN Siyu. Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm. *Control and Decision*, 2021, 36(1): 173 – 179.
(陈明, 安思宇. 基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制. 控制与决策, 2021, 36(1): 173 – 179.)

[31] WANG H, YUE H, LIU S, et al. Adaptive fixed-time control for Lorenz systems. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102(4): 2617 – 2625.

[32] GUO X, WEN G, PENG Z, et al. Global fixed-time synchronization of chaotic systems with different dimensions. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(2): 1155 – 1173.

[33] KAPITANIAK T. *Chaos for Engineers: Theory, Applications, and Control*. Berlin Heidelberg: Springer Science and Business Media, 2000.

[34] PIN G, ASSALONE A, LOVERA M, et al. Non-asymptotic kernel-based parametric estimation of continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(2): 360 – 373.

[35] KRSTIC M, KANELLAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P. *Nonlinear and Adaptive Control Systems Design*. New York: Wiley, 1995.

[36] SASTRY S, BODSON M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. Mineola, New York: Courier Dover Publications, 2011.

附录: 引理3证明

由Volterra积分算子的定义式(8)和式(17)可得

$$
\begin{aligned}
&[V_K^{(i)}y_j](t) = \int_0^t K^{(i)}(t,\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&\sum_{p=0}^{2}\int_0^t F_{i,p}(t,\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&\sum_{p=0}^{2}[V_{F_{i,p}}y_j](t).
\end{aligned} \tag{51}
$$

由式(9)可得, $[V_{F_{i,p}}y_j](t)$可有如下系统产生:

$$
\begin{cases}
\dot{\xi}_{i,p}^{y_j}(t) = F_{i,p}(t,t)y_j(t) + \int_0^t \dfrac{\partial F_{i,p}(t,\tau)}{\partial t}y_j(\tau)\mathrm{d}\tau,\\
\xi_{i,p}^{y_j}(0) = 0,\\
\xi_{i,p}^{y_j}(t) = [V_{F_{i,p}}y_j](t),\ \forall t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.
\end{cases} \tag{52}
$$

由式(17)计算可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{\partial F_{i,p}(t,\tau)}{\partial t}y_j(\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&-(w_h+wp)\int_0^t F_{i,p}(t,\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&-(w_h+wp)[V_{F_{i,p}}y_j](t) = \\
&-(w_h+wp)\xi_{i,p}^{y_j}(t).
\end{aligned} \tag{53}
$$

将$\xi_{i,p}^{y_j}(t) = [V_{F_{i,p}}y_j](t)$代入式(51), 同时将式(53)代入式(52)可得

$$
\begin{cases}
\dot{\xi}_{i,p}^{y_j}(t) = F_{i,p}(t,t)y_j(t) - (w_h+wp)\xi_{i,p}^{y_j}(t))\mathrm{d}\tau,\\
\xi_{i,p}^{y_j}(0) = 0,\\
[V_K^{(i)}y_j](t) = \sum\limits_{p=0}^{2}\xi_{i,p}^{y_j}(t),\ \forall t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.
\end{cases} \tag{54}
$$

对比式(22)和式(54)容易证明$\xi_{i,y_j}(t) = [V_{K^{(i)}}y_j](t)$对$\forall i \in \{0,1,2\}$, $\forall j \in \{1,2,3\}$成立.

由此, 引理3证毕. 证毕.

作者简介:

石 尚 副教授, 博士, 目前研究方向为混沌系统参数辨识和滑模控制, E-mail: shishang@hhu.edu.cn;

李 慧 硕士研究生, 目前研究方向为混沌系统参数辨识和同步控制, E-mail: 646718760@qq.com;

闵惠芳 教授, 博士, 目前研究方向为随机系统控制和固定时间控制, E-mail: jiejie1043640772@126.com;

徐胜元 教授, 博士, 目前研究方向为时延系统鲁棒控制与滤波, E-mail: syxu@njust.edu.cn;

孙永辉 教授, 博士, 目前研究方向为新能源电力系统建模与优化控制, E-mail: sunyonghui168@163.com.