第 39 卷第 8 期
2022 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 39 No. 8
Aug. 2022

输出非对称死区的非严格反馈非线性系统控制

孙 猛[1], 杨 洪[2†]

(1. 江苏海洋大学 电子工程学院, 江苏 连云港 222005; 2. 江苏海洋大学 计算机工程学院, 江苏 连云港 222005)

摘要: 本文研究了具有输出非对称死区和状态含未知控制方向的非严格反馈非线性系统, 设计了稳定的自适应神经网络控制器. 首先, 针对输出非对称死区的问题, 本文采用死区逆的方法, 构造光滑模型逼近原死区模型. 其次, 在控制器设计过程中, 基于障碍Lyapunov函数的构造, 动态面控制和反步法, 设计出自适应控制信号, 虚拟控制信号和实际控制信号. 通过稳定性分析, 证明所设计的神经网络控制器可以保证闭环系统内所有信号是半全局一致最终有界. 最后, 通过MATLAB数值仿真, 说明所设计控制器的有效性.

关键词: 神经网络; 输入饱和; 输出死区; 非严格反馈非线性系统; 未知控制方向; 动态面控制

引用格式: 孙猛, 杨洪. 输出非对称死区的非严格反馈非线性系统控制. 控制理论与应用, 2022, 39(8): 1442 – 1450

DOI: 10.7641/CTA.2022.20016

Nonstrict feedback nonlinear system control with asymmetric dead zone output

SUN Meng[1], YANG Hong[2†]

(1. School of Electronic Engineering, Jiangsu Ocean University, Lianyungang Jiangsu 222005, China;
2. School of Computer Engineering, Jiangsu Ocean University, Lianyungang Jiangsu 222005, China)

Abstract: This paper studies the nonstrict feedback nonlinear systems with output asymmetric dead zone and unknown control directions. A stable adaptive neural network controller is designed in this paper. First of all, in order to deal with the problem of output asymmetric dead zone, a smooth model is constructed to approximate the original dead zone model by making use of the dead zone inverse method. Then, during the controller designing procedure, the adaptive control signals, the virtual control signals and an actual control signal are designed based on the construction of barrier Lyapunov function, dynamic surface control and backstepping method. The stability analysis proves that the proposed neural network controller in this paper can guarantee that all the signals which are in the closed-loop system are semiglobal uniformly ultimately bounded. Finally, the effectiveness of the controller which is proposed in this paper could be testified by numerical simulations on MATLAB.

Key words: neural network; input saturation; output dead zone; nonstrict feedback nonlinear systems; unknown control directions; dynamic surface control

Citation: SUN Meng, YANG Hong. Nonstrict feedback nonlinear system control with asymmetric dead zone outputs. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(8): 1442 – 1450

1 引言

在日常生活中, 绝大多数物理系统为非线性系统, 如: 近空间飞行器系统[1]、无人直升机系统[2], 因此, 近些年来, 学者们更加重视对非线性系统的研究.

一方面, 基于逼近的自适应反步法作为非线性系统的一种研究方法得到了学者们的关注, 并且在此研究领域中, 学者们取得了大量的研究成果[3–8]. 文献[9]借助反步法, 解决了具有未建模动态的严格反馈时滞系统的自适应模糊控制问题. 文献[10]利用径向基函数神经网络(radial basis function neural networks, RBFNNs)和跟踪微分器实现对未知函数和虚拟量导数的逼近, 通过反步法研究了未知控制方向的不确定系统. 为了解决传统反步法中存在的参数爆炸问题, 文献[11]基于反步法提出了动态面控制. 动态面控制

收稿日期: 2022−01−06; 录用日期: 2022−05−10.
†通信作者. E-mail: yanghonghit@163.com; Tel.: +86 18603670520.
本文责任编委: 龙离军.
中国博士后基金面上项目(2020M681521), 国家自然科学基金项目(61873105, 72174079), 江苏省博士后项目(2021K456C), 连云港市博士后科学基金项目(LYG20210012), 江苏省海洋生物资源与环境重点实验室开放课题项目(SH20201209)资助.
Supported by the China Postdoctoral Science Foundation (2020M681521), the National Natural Science Foundation of China (61873105, 72174079), the Jiangsu Postdoctoral Project (2021K456C), the Postdoctoral Science Foundation of Lianyungang City (LYG20210012) and the Open Project of Jiangsu Key Laboratory of Marine Biological Resources and Environment (SH20201209).

需要在反步法设计中的每一步引入一个一阶滤波器. 文献[12]使用了动态面控制和反步法, 利用RBFNNs逼近未知函数, 研究了一类具有输入饱和的未知非线性系统自适应控制问题. 然而, 上述文献研究内容针对的均是严格反馈的非线性系统, 相比严格反馈系统, 非严格反馈系统更具一般化, 控制器设计问题上也更加复杂, 所以上述文献所使用的研究方法有待进一步提升或改进.

另一方面, 死区经常出现在实际系统中, 如液压伺服系统[13]、机器人系统[14]. 死区的发生会降低系统性能, 造成系统的振荡, 甚至使系统不稳定. 目前有许多文献记录输入死区相关研究[15,18,20], 但是, 在实际系统中, 系统输出也会出现死区情况. 文献[16]针对具有输出非对称死区和状态含时滞的严格反馈系统, 采用一种光滑模型描述死区, 并设计了稳定的自适应模糊控制器. 文献[17]针对具有输出对称死区的非严格反馈系统, 通过动态面控制方和反步法, 设计了一种稳定的自适应神经网络控制器. 然而, 上述文献内容忽略了对输出非对称死区非严格反馈系统的研究.

受到上述文献研究内容的启发, 本文针对具有输出非对称死区的非严格反馈非线性系统, 设计一种自适应神经网络控制器. 本文主要的创新之处如下:

1) 由于在实际系统中, 系统的输出死区大多是非对称形式, 如在机器人系统中, 机械执行关节间存在动态摩擦, 会使机器人存在输出非对称死区. 因此, 在文献[17]的基础上, 本文考虑具有输出非对称死区的非严格反馈系统. 相较于输出对称死区, 输出非对称死区更具一般性和广泛性, 也更具实际工程研究价值;

2) 由于含未知控制方向的情况普遍存在于实际物理系统中, 如船舶航向控制系统, 所以, 本文在文献[17]的基础之上, 考虑系统状态含未知控制方向的情况. 研究系统控制方向对解决现实控制问题具有一定的价值.

2 系统描述及预备知识

2.1 系统描述

考虑下面的非严格反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + f_i(x) + d_i(x,t), \\ \qquad i = 1,\cdots,n-1, \\ \dot{x}_n = g_{n0}(\bar{x}_n)u(v) + f_n(x) + d_n(x,t), \\ y = D(x_1), \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x = [x_1\ \ \cdots\ \ x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_i = [x_1\ \ \cdots\ \ x_i]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^i$, $i = 1,\cdots,n$表示系统的状态向量; $y \in \mathbb{R}$表示系统的输出; $v(t) \in \mathbb{R}$和$u(v)$分别表示控制器的输入和系统的输入; $d_i(x,t)$表示有界的外部扰动信号; $f_i(x)$是未知的光滑非线性函数, 其中 $f_i(0) = 0$; $g_i(\cdot)$, $g_{n0}(\cdot)$是未知参数; $D(x_1)$表示输出死区函数.

2.2 输出死区模型

本文考虑的输出为非对称死区[16], 其模型如下:

$$y = D(x_1) = \begin{cases} m_y(x_1 - b_y), & x_1 > b_y, \\ 0, & b_z \leqslant x_1 \leqslant b_y, \\ m_z(x_1 - b_z), & x_1 < b_z, \end{cases} \tag{2}$$

其中: $m_z > 0$和$m_y > 0$分别表示死区函数的左右斜率; $b_z < 0, b_y > 0, |b_y - b_z|$表示死区宽度.

基于输出死区的描述, 式(2)可以写成

$$x_1 = \frac{y + m_y b_y}{m_y}\sigma_y(y) + \frac{y + m_z b_z}{m_z}\sigma_z(y), \tag{3}$$

其中: $\sigma_y(y) = (\pi + 2\arctan(ky))/2\pi$; $\sigma_z(y) = (\pi - 2\arctan(ky))/2\pi, k > 0$为可调参数. 式(3)表示对输出死区求逆的结果, 通过改变k值大小, 从而可以使用该光滑模型表示式(2)中的非线性死区.

定理 1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_1}\dot{x}_1 = M(t)\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \tag{4}$$

其中 $M(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_1}$, 并且满足 $0 < M(t) < m_1 = \max\{m_z, m_y\}$.

定理1的证明和文献[16]中的定理1证明类似, 因此在此省略证明过程.

2.3 输入饱和模型

本文考虑的输入具有饱和特性[20], 其模型如下:

$$u(v(t)) = \mathrm{sat}(v(t)) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(v(t))u_m, & |v(t)| \geqslant u_m, \\ v(t), & |v(t)| < u_m, \end{cases} \tag{5}$$

其中u_m是$u(v)$边界, 当$v(t)$值为$|u_m|$时, $u(v(t))$不可微, 可采用一种光滑模型逼近输入饱和函数

$$p(v) = u_m \times \tanh(\frac{v}{u_m}) = u_m\frac{\mathrm{e}^{v/u_m} - \mathrm{e}^{-v/u_m}}{\mathrm{e}^{v/u_m} + \mathrm{e}^{-v/u_m}}, \tag{6}$$

那么, $\mathrm{sat}(v)$可以写成

$$\mathrm{sat}(v) = p(v) + q(v) = u_m \times \tanh(\frac{v}{u_m}) + q(v), \tag{7}$$

其中 $q(v)$是一个可微的函数, 是饱和函数与逼近模型函数之间的差值函数. $|q(v)| = |\,\mathrm{sat}(v) - p(v)| \leqslant u_m(1 - \tanh(1)) = Q_1$, Q_1为正常量. 为了继续进行动态面控制, 根据中值定理, $p(v)$可以由下面等式表示: $p(v(t)) = p(v^0) + \left.\dfrac{\partial p(v)}{\partial v}\right|_{v=v^\mu}(v - v^0)$, 其中: $v^\mu = \mu v + (1-\mu)v^0, 0 < \mu < 1$. 考虑下面情况: $v^0 = 0$和$p(0) = 0$, 则可进一步得到

$$p(v(t)) = \left.\frac{\partial p(v)}{\partial v}\right|_{v=v^\mu} v, \tag{8}$$

定义 $g_n(\bar{x}_n)=g_{n0}(\bar{x}_n)(\dfrac{\partial p(v)}{\partial v})|_{v=v^\mu}$, $g_{n0}(\bar{x}_n)Q_1+d_n(x,t)=G(x,t)$, 则系统(1)可改写成如下形式:

$$\begin{cases}\dot{x}_i=g_i(\bar{x}_i)x_{i+1}+f_i(x)+d_i(x,t),\\ \qquad i=1,\cdots,n-1,\\ \dot{x}_n=g_n(\bar{x}_n)v+f_n(x)+G(x,t),\\ y=D\left(x_1\right).\end{cases}\tag{9}$$

系统(9)的控制目标是设计的控制器v能够使系统的输出$y(t)$很好地跟踪给定参考的理想信号y_r, 即跟踪误差要满足$|z_1(t)|=|y(t)-y_r|\leqslant k_{z1}$, k_{z1}为正常量, 并保证闭环内所有信号是半全局一致最终有界.

为了进行控制器设计, 现做出如下假设.

假设 1 存在正常量$\underline{g}_i$, $\bar{g}_i$, 满足$\underline{g}_i\leqslant|g_i|\leqslant\bar{g}_i$, $1\leqslant i\leqslant n-1$. 同时$g_{n0}$满足$\underline{g}_n\leqslant|g_{n0}|\leqslant\bar{g}_n$. 不失一般性, 本文认为$g_i$和$g_{n0}$大于0.

假设 2 对于任意的时间t, $t>0$, 给定的参考信号$y_r(t)$以及$\dot{y}_r(t)$, $\ddot{y}_r(t)$都是可导且有界的,存在正常量d, 满足$y_r<d$, 并且存在正常量B_0, 使紧集Π_r满足 $\Pi_r:=\{[y_r\ \ \dot{y}_r\ \ \ddot{y}_r]:y_r+\dot{y}_r+\ddot{y}_r\leqslant B_0\}$.

假设 3 对于外部扰动函数$d_i(x,t)$, 存在连续函数$\chi_i(\bar{x}_i)$和正常量c_i^*, 满足 $|d_i(x,t)|\leqslant\chi_i(\bar{x}_i)c_i^*$.

假设 4 对于未知的非线性连续函数$f_i(x)$, 满足关系 $|f_i(x)|\leqslant\phi_i(\|x\|)$, 其中$\phi_i(0)=0$, $\phi_i(\cdot)$ 是一个严格递增光滑函数.

注 1 关于函数$\phi_i(\cdot)$存在下面的不等关系[22]:

$$\phi_i(\sum_{i=1}^n a_i)\leqslant\sum_{i=1}^n na_ih_i(na_i),\tag{10}$$

其中 $h_i(\cdot)$ 为连续函数.

假设 5 对于$\dfrac{\partial p(v)}{\partial v}|_{v=v^\mu}$, 满足不等关系$0<h_0<\dfrac{\partial p(v)}{\partial v}|_{v=v^\mu}<1$, 其中$h_0$为正常量.

注 2 本文中的假设借鉴了文献[12,17,19,21–22]中的相关假设, 说明本文做出假设的合理性.

2.4 Nussbaum函数

定义 1 一个连续可导的函数$N(\zeta)$, 如果满足

$$\begin{cases}\lim\limits_{r\to+\infty}\sup\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^r N(\zeta)\mathrm{d}\zeta=+\infty,\\ \lim\limits_{r\to-\infty}\inf\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^r N(\zeta)\mathrm{d}\zeta=-\infty,\end{cases}\tag{11}$$

那么$N(\zeta)$可以叫做Nussbaum函数.

注 3 本文选取$\mathrm{e}^{\zeta^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\zeta\right)$作为Nussbaum函数.

引理 1 令$V(\cdot)$, $\zeta(\cdot)$为定义在$[0,\ t_l)$上的光滑函数, 且$V(t)\geqslant0$, $N(\zeta)$为Nussbaum函数. 对于任意时间$t\in[0,\ t_l)$, $t_l\in[0,+\infty)$, 如果以下不等式成立[17]:

$$V(t)\leqslant c_1+\mathrm{e}^{-c_2t}\int_0^t[g(\tau)N(\zeta)+1]\dot{\zeta}\mathrm{e}^{c_2\tau}\mathrm{d}\tau,\tag{12}$$

其中: c_1, c_2为正常量, $g(\tau)$为时变参数, 那么$V(t)$, $\zeta(t)$, $\int_0^t g(\tau)N(\zeta)\dot{\zeta}\mathrm{d}\tau$在$[0,t_l)$上一定有界.

2.5 径向基函数神经网络

对于任意定义在紧集$\Omega_z\in\mathbb{R}^q$上的非线性连续函数$f(Z)$, 可以由RBFNNs进行逼近[23]

$$f(Z)=W^{*\mathrm{T}}S(Z)+\delta(Z),\ |\delta(Z)|\leqslant\epsilon,\tag{13}$$

其中: $W^*\in\mathbb{R}^l$表示的是最优权值向量, $l>1$表示神经网络节点数, $W^*:=\arg\min\limits_{W\in R^N}\{\sup\limits_{Z\in\Omega_Z}|f(Z)–W^{\mathrm{T}}\times S(Z)|\}$; $\delta(Z)$为逼近误差; $S(Z)=[s_1(Z)\cdots s_l(Z)]^{\mathrm{T}}$为基函数向量, $s_i(Z)$通常选取为高斯函数, 形式如下:

$$s_i(Z)=\exp[-\frac{(Z-v_i)^{\mathrm{T}}(Z-v_i)}{\eta^2}].\tag{14}$$

定义$s:=(1/2)\min\limits_{i\neq j}\|v_i-v_j\|$, 有下面的不等式关系:

$$\|S(Z)\|\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}3q(j+2)^{q-1}\mathrm{e}^{\frac{-2s^2j^2}{\eta^2}},\tag{15}$$

本文使用n个径向基函数神经网络去逼近n个未知函数$f_i(Z_i)$, 即

$$f_i(Z_i)=W_i^{*\mathrm{T}}S_i(Z_i)+\delta_i(Z_i),\tag{16}$$

其中: $S_i(Z_i)=[s_{i1}(Z_i)\ \ s_{i2}(Z_i)\cdots s_{il}(Z_i)]^{\mathrm{T}}$, $s_{ij}(Z_i)=\exp\left[-(Z_i-v_{ij})^{\mathrm{T}}(Z_i-v_{ij})/\eta_{ij}^2\right]$, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,l$.

3 自适应神经网络控制器设计和稳定性分析

为了简化表达, 首先定义下面符号:

$$\bar{z}_i=[z_1\ \ \cdots\ \ z_i]^{\mathrm{T}},\ \bar{y}_i=[y_2\ \ \cdots\ \ y_i]^{\mathrm{T}},\tag{17}$$

其中 i为不大于n的正整数.

基于动态面控制技术, 现引入如下的坐标变换:

$$z_1=y-y_r,\tag{18}$$

$$z_i=x_i-\omega_i,\tag{19}$$

$$y_i=\omega_i-\alpha_i,\tag{20}$$

其中: $i=2,\cdots,n$; z_i为误差面; ω_i为一阶滤波器输出信号; y_i为有界层误差; α_i为虚拟控制信号. 构造虚拟控制信号α_i和$\dot{\zeta}$

$$\alpha_2=N(\zeta)(k_1z_1+\frac{1}{2a_1^2}z_1\theta S_1^{\mathrm{T}}\left(Z_1\right)S_1\left(Z_1\right)),\tag{21}$$

$$\alpha_{i+1}=-\bar{g}_ik_iz_i-\frac{\bar{g}_iz_i}{2a_i^2(k_{z1}^2-z_1^2)}\theta S_i^{\mathrm{T}}(Z_i)S_i(Z_i),\tag{22}$$

其中: $i=2,\cdots,n-1$, k_1, a_1, $\bar{g}_i$, k_i, a_i为正的常量,

$Z_1=[x_1\ \ z_1\ \ \theta\ \ \dot{y}_r]^{\mathrm{T}}, Z_i=[\bar{x}_i\ \ z_i\ \ \dot{\omega}_i\ \ \theta]^{\mathrm{T}}$. 解下面的微分方程从而得到Nussbaum参数$\zeta$

$$\dot{\zeta}=\frac{\bar{g}_1 k_1 z_1^2}{k_{z1}^2-z_1^2}+\frac{\bar{g}_1 z_1^2}{2a_1^2\left(k_{z1}^2-z_1^2\right)}\theta S_1^{\mathrm{T}}\left(Z_1\right)S_1\left(Z_1\right), \tag{23}$$

其中θ是未知常量θ^*的估计, 并且满足$\tilde{\theta}=\theta^*-\theta$. 定义$\theta^*=\max\limits_{i=1,\cdots,n}\{\|W_i^*\|^2\}$, θ 的导数如下:

$$\dot{\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{g}_i z_i^2}{2a_i^2(k_{z1}^2-z_1^2)}\theta S_i^{\mathrm{T}}(Z_i)S_i(Z_i)-\eta\sigma\theta, \tag{24}$$

其中 η, σ为正常量.

引理 2 状态向量x存在下面不等关系:

$$\|x\|\leqslant P^*+\varphi(\bar{y}_n)+\sum_{j=1}^{n}P_j|z_j|, \tag{25}$$

其中: $P^*=d/m_2+\bar{b}/2$, $m_2=\min\{m_z,\ m_y\}$, $\bar{b}=b_y-b_z+|b_y+b_z|$; $P_j=1+P_{j0}$, $P_{10}=|1/m_2+N(\zeta)(k_1+\theta/2a_1^2)|-1$, $P_{j0}=|\bar{g}_i k_i+\bar{g}_i\theta/2a_i^2(k_{z1}^2-z_1^2)|$, $j=2,\cdots,n-1$, $P_{n0}=0$.

证 由式(3)可以得到$|x_1|\leqslant|y|/m_2+\bar{b}/2$, 将假设2, $\sum\limits_{i=2}^{n}|y_i|\leqslant\varphi(\bar{y}_n)$和式(18)–(22)代入$\|x\|$放缩步骤中, 其中$\varphi(\bar{y}_n)$为非负连续函数, 得到

$$\begin{aligned}&\|x\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|x_1|+\sum_{i=2}^{n}|x_i|\leqslant\\&\frac{|z_1+y_r|}{m_2}+\frac{\bar{b}}{2}+\sum_{i=2}^{n}|z_i|+\sum_{i=2}^{n}|y_i|+\sum_{i=2}^{n}|\alpha_i|\leqslant\\&\frac{|z_1|}{m_2}+\frac{d}{m_2}+\frac{\bar{b}}{2}+\sum_{i=2}^{n}|z_i|+\varphi(\bar{y}_n)+\sum_{i=2}^{n}|\alpha_i|\leqslant\\&P^*+\varphi(\bar{y}_n)+\frac{|z_1|}{m_2}+\sum_{i=2}^{n}|z_i|+|\alpha_2|+\sum_{i=3}^{n}|\alpha_i|\leqslant\\&\frac{|z_1|}{m_2}+\sum_{i=2}^{n}|z_i|+|N(\zeta)(k_1z_1+\frac{\theta z_1}{2a_1^2})|+\varphi(\bar{y}_n)\\&\sum_{i=2}^{n-1}|\bar{g}_ik_iz_i+\frac{\bar{g}_i\theta}{2a_i^2(k_{z1}^2-z_1^2)}z_i|+P^*\leqslant\\&P^*+\varphi(\bar{y}_n)+\sum_{j=1}^{n}P_j|z_j|.\end{aligned} \tag{26}$$

证毕.

注 4 引理2说明了系统全状态可以通过变量分离的方法分离成一系列光滑函数, 由假设4可以看出, 包含系统全状态的未知函数也可以分离成一系列光滑函数.

3.1 控制器设计

本小节中, 基于反步法的动态面控制技术将被用于处理非严格反馈非线性系统(9), 设计的步骤如下.

步骤 1 根据式(4)(9)(18), 对z_1进行求导得到

$$\begin{aligned}&\dot{z}_1=\dot{y}-\dot{y}_r=M(t)\dot{x}_1-\dot{y}_r=M(t)g_1(x_1)x_2+\\&M(t)f_1(x)+M(t)d_1(x,t)-\dot{y}_r.\end{aligned} \tag{27}$$

借助一个微小的正时间常量κ_2, 令虚拟控制信号α_2通过一个一阶滤波器, 可以获得滤波变量ω_2.

$$\kappa_2\dot{\omega}_2+\omega_2=\alpha_2,\ \omega_2(0)=\alpha_2(0). \tag{28}$$

构造Lyapunov函数V_1

$$V_1=\frac{1}{2}\log\frac{k_{z1}^2}{k_{z1}^2-z_1^2}+\frac{\tilde{\theta}^2}{2\eta},$$

由假设1, 4和式(19)–(20) (27), 对V_1求导, 得

$$\begin{aligned}&\dot{V}_1=\frac{z_1\dot{z}_1}{k_{z1}^2-z_1^2}-\frac{\tilde{\theta}\dot{\theta}}{\eta}\leqslant\\&\frac{M(t)\bar{g}_1z_1\left(z_2+y_2+\alpha_2\right)}{k_{z1}^2-z_1^2}+\frac{M(t)z_1\phi_1(\|x\|)}{k_{z1}^2-z_1^2}+\\&\frac{M(t)z_1d_1(x,t)}{k_{z1}^2-z_1^2}-\frac{z_1\dot{y}_r}{k_{z1}^2-z_1^2}-\frac{\tilde{\theta}\dot{\theta}}{\eta}.\end{aligned} \tag{29}$$

由定理1, 假设3和Young不等式, 可得到下列不等式:

$$\frac{M(t)\bar{g}_1z_1z_2}{k_{z1}^2-z_1^2}\leqslant\frac{m_1^2\bar{g}_1^2z_1^2}{2\left(k_{z1}^2-z_1^2\right)^2}+\frac{1}{2}z_2^2, \tag{30}$$

$$\frac{M(t)\bar{g}_1z_1y_2}{k_{z1}^2-z_1^2}\leqslant\frac{m_1^2\bar{g}_1^2z_1^2}{2\left(k_{z1}^2-z_1^2\right)^2}+\frac{1}{2}y_2^2, \tag{31}$$

$$\frac{M(t)d_1(x,t)z_1}{k_{z1}^2-z_1^2}\leqslant\frac{m_1^2\chi_1^2(x_1)z_1^2}{2\left(k_{z1}^2-z_1^2\right)^2}+\frac{1}{2}c_1^{*2}. \tag{32}$$

由定理1, 式(10) (25)和Young不等式, 可以得到下面不等式:

$$\begin{aligned}&\frac{M(t)z_1\phi_1(\|x\|)}{k_{z1}^2-z_1^2}\leqslant\\&\frac{m_1\left|z_1\right|\phi_1(\sum\limits_{j=1}^{n}P_j\left|z_j\right|+P^*+\varphi(\bar{y}_n))}{k_{z1}^2-z_1^2}\leqslant\\&\frac{\left|z_1\right|m_1}{k_{z1}^2-z_1^2}\phi_1\sum_{j=1}^{n}\left(\left|z_j\right|P_j\right)+\frac{m_1\left|z_1\right|}{k_{z1}^2-z_1^2}\phi_1(\varphi(\bar{y}_n))+\\&\frac{m_1\left|z_1\right|}{k_{z1}^2-z_1^2}\phi_1(P^*)\leqslant\sum_{j=1}^{n}z_j^2n^2P_j^2h_1^2(n|z_j|P_j)+b_1^2+\\&\frac{1}{4}\frac{m_1^2z_1^2}{(k_{z1}^2-z_1^2)^2}+\frac{m_1^2z_1^2\phi_1^2(P^*)}{2b_1^2(k_{z1}^2-z_1^2)^2}+\frac{m_1^2z_1^2\phi_1^2(\varphi(\bar{y}_n))}{2b_1^2(k_{z1}^2-z_1^2)^2}.\end{aligned} \tag{33}$$

其中b_1为正常量. 将式(21)和式(30)–(33)代入到式(29)中, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1\leqslant&\frac{m_1^2\bar{g}_1^2z_1^2}{(k_{z1}^2-z_1^2)^2}+\frac{1}{2}z_2^2+\frac{m_1^2\chi_1^2(x_1)z_1^2}{2(k_{z1}^2-z_1^2)^2}+\frac{1}{2}y_2^2+\\&\frac{1}{2}c_1^{*2}-\frac{z_1\dot{y}_r}{k_{z1}^2-z_1^2}+[M(t)N(\zeta)+1]\dot{\zeta}-\frac{\tilde{\theta}\dot{\theta}}{\eta}-\\&\frac{\bar{g}_1k_1z_1^2}{k_{z1}^2-z_1^2}-\frac{\bar{g}_1z_1^2\theta}{2(k_{z1}^2-z_1^2)a_1^2}S_1^{\mathrm{T}}(Z_1)S_1(Z_1)+\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}\frac{m_1^2 z_1^2}{(k_{z1}^2-z_1^2)^2}+b_1^2+\frac{m_1^2 z_1^2\phi_1^2(P^*)}{2b_1^2(k_{z1}^2-z_1^2)^2}+\\ \sum_{j=1}^{n} z_j^2 n^2 P_j^2 h_1^2(n|z_j|P_j)+\frac{m_1^2 z_1^2\phi_1^2(\varphi(\bar{y}_n))}{2b_1^2(k_{z1}^2-z_1^2)^2}. \tag{34}$$

步骤 $\boldsymbol{i}$ $(2\leqslant i\leqslant n-1)$ 根据式(9)(19), 对z_i进行求导, 可以得到

$$\dot{z}_i=\dot{x}_i-\dot{\omega}_i=g_i(\bar{x}_i)x_{i+1}+f_i(x)+d_i(x,t)-\dot{\omega}_i. \tag{35}$$

借助微小的正时间常量κ_{i+1}. 令虚拟控制信号α_{i+1}通过一阶滤波器,可以获得滤波变量ω_{i+1}.

$$\kappa_{i+1}\dot{\omega}_{i+1}+\omega_{i+1}=\alpha_{i+1},\ \omega_{i+1}(0)=\alpha_{i+1}(0). \tag{36}$$

构造Lyapunov函数$V_i=(1/2)z_i^2$, 对V_i求导, 根据假设1, 3, 4, 并代入式(19)–(20) (35), 得

$$\dot{V}_i=z_i\dot{z}_i\leqslant z_i\bar{g}_i(z_{i+1}+y_{i+1}+\alpha_{i+1})+\\ z_i\phi_i(\|x\|)+z_i\chi_i(\bar{x}_i)c_i^*-z_i\dot{\omega}_i. \tag{37}$$

类似步骤1中的推导过程, 可以得到V_i的导数, 如下:

$$\dot{V}_i\leqslant\bar{g}_i^2 z_i^2+\frac{1}{2}z_{i+1}^2+\frac{1}{2}y_{i+1}^2+\frac{1}{2}z_i^2\chi_i^2(\bar{x}_i)+\frac{1}{2}c_i^{*2}-\\ z_i\dot{\omega}_i-\bar{g}_i k_i z_i^2+\frac{z_i^2}{4}+\frac{z_i^2\phi_i^2(P^*)}{2b_i^2}+b_i^2+\\ \sum_{j=1}^{n} z_j^2 n^2 P_j^2 h_i^2(n|z_j|P_j)+\frac{z_i^2\phi_i^2(\varphi(\bar{y}_n))}{2b_i^2}-\\ \frac{\bar{g}_i z_i^2\theta}{2a_i^2(k_{z1}^2-z_1^2)}S_i^{\mathrm{T}}(Z_i)S_i(Z_i), \tag{38}$$

其中 b_i 为正常量.

步骤 $\boldsymbol{n}$ 构造实际控制器 $v(t)$

$$v(t)=-\frac{1}{h_0}[k_n z_n+\frac{z_n}{2a_n^2(k_{z1}^2-z_1^2)}\theta S_n^{\mathrm{T}}(Z_n)S_n(Z_n)]. \tag{39}$$

根据式(9) (19)对z_n求导, 可得

$$\dot{z}_n=\dot{x}_n-\dot{\omega}_n=g_n(\bar{x}_n)v+f_n(x)+G(x,t)-\dot{\omega}_n. \tag{40}$$

构造Lyapunov函数$V_n=(1/2)z_n^2$, 对V_n求导, 并代入式(40), 得

$$\dot{V}_n=z_n\dot{z}_n=z_n(g_n(\bar{x}_n)v+f_n(x)+G(x,t)-\dot{\omega}_n). \tag{41}$$

根据假设1, 假设5和式(39), 可以得到

$$z_n g_n(\bar{x}_n)v\leqslant-\frac{\bar{g}_n z_n^2\theta S_n^{\mathrm{T}}(Z_n)S_n(Z_n)}{2a_n^2(k_{z1}^2-z_1^2)}-k_n z_n^2\bar{g}_n. \tag{42}$$

由假设3, Young不等式, 可以得到

$$z_n G(t)\leqslant\bar{g}_n^2 z_n^2+\frac{1}{4}Q_1^2+\frac{1}{2}z_n^2\chi_i^2(x)+\frac{1}{2}c_n^{*2}. \tag{43}$$

类似步骤1的推导过程, 并将式(42)–(43)代入到式(41)中, 可以得到V_n的导数, 如下:

$$\dot{V}_n\leqslant\bar{g}_n^2 z_n^2-k_n z_n^2\bar{g}_n-\frac{\bar{g}_n z_n^2\theta S_n^{\mathrm{T}}(Z_n)S_n(Z_n)}{2a_n^2(k_{z1}^2-z_1^2)}+\\ \frac{Q_1^2}{4}+\frac{z_n^2\chi_i^2(x)}{2}+\frac{c_n^{*2}}{2}-z_n\dot{\omega}_n+\frac{z_n^2\phi_n^2(P^*)}{2b_n^2}+\\ \frac{z_n^2\phi_n^2(\varphi(\bar{y}_n))}{2b_n^2}+\sum_{j=1}^{n} z_j^2 n^2 P_j^2 h_n^2(n|z_j|P_j)+\\ \frac{z_n^2}{4}+b_n^2, \tag{44}$$

其中b_n为正常量.

3.2 稳定性分析

本小节的主要目的是对所设计的神经网络控制器进行稳定性分析. 首先, 准备如下工作, 定义下面紧集:

$$\varPi_i=\{[\bar{z}_i\ \ \bar{y}_{i+1}\ \ \theta]^{\mathrm{T}}:V_i\leqslant p\}\subset\mathbb{R}^{2i+1},i=1,\cdots,n,\\ \varPi_r=\{[y_r\ \ \dot{y}_r\ \ \ddot{y}_r]^{\mathrm{T}}:y_r+\dot{y}_r+\ddot{y}_r\leqslant B_0\}\subset\mathbb{R}^3,$$

其中 p, B_0为正参数.

构造如下Lyapunov函数:

$$V=\frac{1}{2}\log\frac{k_{z1}^2}{k_{z1}^2-z_1^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}z_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}y_i^2+\frac{\tilde{\theta}^2}{2\eta}. \tag{45}$$

容易看出$\varPi_i\times\varPi_r\subset\mathbb{R}^{2i+4}$仍是一个紧集, 所以$\|\eta_j\|$在紧集上有一个最大值$m_j$. 在$\varPi_i$上存在一个正常量$Y^*$满足$\|\varphi(\bar{y}_n)\|\leqslant Y^*$.

定理 2 在做出假设1到假设5的情况下, 考虑非严格反馈非线性系统(9), 并且定义紧集$\varPi_{k_{z1}}:=\{z_1(t)\in R|z_1|<k_{z1}\}$. 如果$z_1$的初始值$z_1(0)\in\varPi_{k_{z1}}$, 构造虚拟控制信号(21)–(22)和实际自适应控制器(39)(24), 那么存在以下正常量$\bar{g}_1$, $\bar{g}_i$, k_i, κ_i, η, σ, 使得输出误差满足: $z_1(t)\in\varPi_{k_{z1}}$, 且闭环内所有信号半全局一致最终有界. 其中$\bar{g}_1$, $\bar{g}_i$, k_i, κ_i满足

$$\begin{cases}\bar{g}_1^2 k_1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2\bar{g}_i}\geqslant\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\alpha_0,\\ 2\bar{g}_i k_i-\bar{g}_i^2\geqslant\dfrac{5}{2}+\alpha_0,\ i=2,\cdots,n,\\ \dfrac{1}{\kappa_i}\geqslant\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\alpha_0,\ \alpha_0\leqslant\eta\sigma.\end{cases} \tag{46}$$

证 由式(20)(36)可得

$$\dot{y}_{i+1}=-\frac{y_{i+1}}{\kappa_{i+1}}-\dot{\alpha}_{i+1}, \tag{47}$$

其中$i=1,\cdots,n-1$. 根据式(21)–(22), 式(47)和Young不等式, 可以得到

$$y_{i+1}\dot{y}_{i+1}\leqslant-\frac{y_{i+1}^2}{\kappa_{i+1}}+y_{i+1}^2+\frac{\eta_{i+1}^2}{4} \tag{48}$$

和

$$|\dot{\alpha}_2|=|\frac{\partial\alpha_1}{\partial z_1}\dot{z}_1+\frac{\partial\alpha_1}{\partial\zeta}\dot{\zeta}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial\dot{y}_r}\dot{y}_r|\leqslant\\ \eta_2(\bar{z}_n,\bar{y}_n,\theta,\zeta,y_r,\dot{y}_r,\ddot{y}_r),$$

$$|\dot{\alpha}_{i+1}| = |\frac{\partial\alpha_{i+1}}{\partial z_i}\dot{z}_i + \frac{\partial\alpha_{i+1}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\alpha_{i+1}}{\partial\dot{y}_r}\dot{y}_r| \leqslant \eta_{i+1}(\bar{z}_n, \bar{y}_n, \theta, y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r), \tag{49}$$

其中η_{i+1}, $i = 1, \cdots, n-1$为非负连续函数.

对V进行求导, 带入式(34)(38)(44)(48), 得

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant{}& \sum_{i=1}^{n-1}(\frac{3}{2} - \frac{1}{\kappa_{i+1}})y_{i+1}^2 - \frac{\bar{g}_1^2 k_1 z_1^2}{k_{z1}^2 - z_1^2} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\eta_{i+1}^2}{4} + \\ & \sum_{i=2}^{n}(\frac{3}{4} - \bar{g}_i k_i + \bar{g}_i^2)z_i^2 + [M(t)N(\zeta)+1]\dot{\zeta} - \\ & \sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{g}_i z_i^2\theta}{2a_i^2(k_{z1}^2 - z_1^2)}S_i^{\mathrm{T}}(Z_i)S_i(Z_i) - \frac{z_1\dot{y}_r}{k_{z1}^2 - z_1^2} - \\ & \sum_{i=2}^{n} z_i\dot{\omega}_i + \frac{m_1^2\bar{g}_1^2 z_1^2}{(k_{z1}^2 - z_1^2)^2} + \frac{m_1^2 z_1^2}{4(k_{z1}^2 - z_1^2)^2} + \frac{Q_1^2}{4} + \\ & \frac{m_1^2 z_1^2\phi_1^2(P^*)}{2b_1^2(k_{z1}^2 - z_1^2)^2} + \frac{m_1^2 z_1^2\phi_1^2(Y^*)}{2b_1^2(k_{z1}^2 - z_1^2)^2} - \frac{\tilde{\theta}\dot{\theta}}{\eta} + \\ & \sum_{i=2}^{n}\frac{z_i^2\phi_i^2(P^*)}{2b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} z_i^2\sum_{j=1}^{n} n^2 P_i^2 h_j^2(n|z_i|P_i) + \\ & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}c_i^{*2} + \sum_{i=2}^{n}\frac{z_i^2\phi_i^2(Y^*)}{2b_i^2} + \frac{m_1^2\chi_1^2(x_1)z_1^2}{2(k_{z1}^2 - z_1^2)^2} + \\ & \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2}z_i^2\chi_i^2(\bar{x}_i).\end{aligned} \tag{50}$$

接下来, 利用径向基函数神经网络逼近未知的非线性函数. 首先, 令

$$\begin{aligned}f_1(Z_1) ={}& -\frac{\dot{y}_r}{k_{z1}^2 - z_1^2} + \frac{m_1^2\bar{g}_1^2 z_1}{(k_{z1}^2 - z_1^2)^2} + \frac{1}{4}\frac{m_1^2 z_1}{(k_{z1}^2 - z_1^2)^2} + \\ & \frac{m_1^2 z_1\phi_1^2(Y^*)}{2b_1^2(k_{z1}^2 - z_1^2)^2} + z_1\sum_{j=1}^{n} n^2 P_1^2 h_j^2(n|z_1|P_1) + \\ & \frac{m_1^2\phi_1^2((n+2)P^*)}{2b_1^2(k_{z1}^2 - z_1^2)^2} + \frac{m_1^2\chi_1^2(x_1)z_1}{2(k_{z1}^2 - z_1^2)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_i(Z_i) ={}& -\dot{\omega}_i + z_i\frac{\phi_i^2(P^*)}{2b_i^2} + z_i\frac{\phi_i(Y^*)}{2b_i^2} + \\ & z_i\sum_{j=1}^{n} n^2 P_i^2 h_j^2(n|z_i|P_i) + \frac{1}{2}z_i\chi_i^2(\bar{x}_i),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_n(Z_n) ={}& -\dot{\omega}_n + z_n\sum_{j=1}^{n} n^2 P_i^2 h_j^2(n|z_i|P_i) + \\ & z_n\frac{\phi_n^2(P^*)}{2b_n^2} + z_n\frac{\phi_n^2(Y^*)}{2b_n^2} + \frac{1}{2}z_n\chi_n^2(x),\end{aligned} \tag{51}$$

其中 $i = 2, \cdots, n-1$. 将式(51)代入式(50)中, 得

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant{}& -\frac{\bar{g}_1^2 k_1 z_1^2}{k_{z1}^2 - z_1^2} + \sum_{i=2}^{n}(-\frac{1}{\kappa_i} + \frac{3}{2})y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \\ & \frac{Q_1^2}{4} - \frac{\tilde{\theta}\dot{\theta}}{\eta} + [M(t)N(\zeta)+1]\dot{\zeta} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{4}\eta_{i+1}^2 + \\ & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}c_i^{*2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{g}_i z_i^2\theta}{2a_i^2(k_{z1}^2 - z_1^2)}S_i^{\mathrm{T}}(Z_i)S_i(Z_i) + \\ & \sum_{i=2}^{n}(\frac{3}{4} - \bar{g}_i k_i + \bar{g}_i^2)z_i^2 + \sum_{i=1}^{n} z_i f_i(Z_i).\end{aligned} \tag{52}$$

根据式(16), Young不等式, 可以得到

$$\begin{aligned}z_i f_i(Z_i) ={}& z_i[W_i^{*\mathrm{T}}S_i(Z_i) + \delta_i(Z_i)] \leqslant \\ & \frac{\bar{g}_i z_i^2\|W_i^*\|^2 S_i^{\mathrm{T}}S_i}{2a_i^2(k_{z1}^2 - z_1^2)} + \frac{a_i^2(k_{z1}^2 - z_1^2)}{2\bar{g}_i} + \frac{z_i^2}{2} + \frac{\varepsilon_i^2}{2} \leqslant \\ & \frac{\bar{g}_i z_i^2\theta^* S_i^{\mathrm{T}}S_i}{2a_i^2(k_{z1}^2 - z_1^2)} + \frac{a_i^2(k_{z1}^2 - z_1^2)}{2\bar{g}_i} + \frac{z_i^2}{2} + \frac{\varepsilon_i^2}{2}.\end{aligned} \tag{53}$$

因为$-z_1^2/(k_{z1}^2 - z_1^2) \leqslant -\log(k_{z1}^2/(k_{z1}^2 - z_1^2))$, 以及$\tilde{\theta}\theta \leqslant \tilde{\theta}(\theta^* - \tilde{\theta}) \leqslant \tilde{\theta}^2/2 + \theta^{*2}/2 - \tilde{\theta}^2 \leqslant \theta^{*2}/2 - \tilde{\theta}^2/2$, 同时将式(24)(53)代入到式(52)中, 所以进一步可得到下面不等式:

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant{}& -(\bar{g}_1^2 k_1 - \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\bar{g}_i})\log\frac{k_{z1}^2}{k_{z1}^2 - z_1^2} + \frac{\sigma\tilde{\theta}^2}{2} + \\ & \sum_{i=2}^{n}(\frac{5}{4} - \bar{g}_i k_i + \bar{g}_i^2)z_i^2 + \sum_{i=2}^{n}(-\frac{1}{\kappa_i} + \frac{3}{2})y_i^2 - \\ & \frac{\sigma\theta^{*2}}{2} + [M(t)N(\zeta)+1]\dot{\zeta} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \frac{Q_1^2}{4} + \\ & \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{4}\eta_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^{*2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2 k_{z1}^2}{2\bar{g}_i}.\end{aligned} \tag{54}$$

进一步得到

$$\dot{V} \leqslant -\alpha_0 V + \mu + [M(t)N(\zeta)+1]\dot{\zeta}. \tag{55}$$

其中: $\alpha_0 = \min[2\bar{g}_1^2 k_1 - 1 + \sum_{i=1}^{n}\bar{g}_i, (2\bar{g}_i k_i - 7/2 - \bar{g}_i^2), (2/\kappa_i - 3), \eta\sigma]$, $\mu = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + Q_1^2/4 + \sum_{i=1}^{n-1}\eta_{i+1}^2/4 + \sum_{i=1}^{n}\bar{d}_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2/2 + \sigma\theta^{*2}/2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 k_{z1}^2/2\bar{g}_i$.

两边同乘$\mathrm{e}^{\alpha_0 t}$, 并在$[0, t]$上进行积分可得

$$V \leqslant c + \mathrm{e}^{-\alpha_0 t}\int_0^t (M(t)N(\zeta)+1)\dot{\zeta}\mathrm{e}^{\alpha_0\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{56}$$

其中 $c = \mu/\alpha_0 + V(0)$. 根据引理1可以知道, V, ζ, $\int_0^t (M(t)N(\zeta)+1)\dot{\zeta}\mathrm{e}^{\alpha_0\tau}\mathrm{d}\tau$在区间$[0, t]$上有界. 进一步将结果推广到$t \to \infty$. 所以, 闭环所有信号半全局一致最终有界.

令$\mathrm{e}^{-\alpha_0 t}\int_0^t (M(t)N(\zeta)+1)\dot{\zeta}e^{\alpha_0\tau}\mathrm{d}\tau \leqslant c_0$, 可得

$$\frac{1}{2}\log\frac{k_{z1}^2}{k_{z1}^2 - z_1^2} \leqslant V \leqslant c + c_0. \tag{57}$$

求解z_1, 得$|z_1| \leqslant k_{z1}\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2(c+c_0)}}$. 所以, 跟踪误差$z_1(t)$满足跟踪误差限制条件.

4 仿真算例

本节通过两个数值模拟例子, 验证本文所设计神经网络控制器的有效性.

例 1 考虑下面非严格反馈非线性二阶系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = g_1(\bar{x}_1)x_2 + f_1(x) + d_1(x,t), \\ \dot{x}_2 = g_{20}(\bar{x}_2)u(v) + f_2(x) + d_2(x,t), \\ y = D(x_1),\end{cases} \tag{58}$$

被控对象(58)的仿真参数选取表1所示.

表 1 被控对象(58)结构取值表

Table 1 Value table of the controlled object (58)

被控对象结构	参数选取
$g_1(\bar{x}_1)$	2
$g_{20}(\bar{x}_2)$	1
$f_1(x)$	$\sin(x_1x_2)$
$f_2(x)$	$1-\cos(x_1x_2)$
$d_1(x,t)$	$0.2x_1\sin t$
$d_2(x,t)$	$0.2\cos(0.5x_2)$

本例中$y_r=0.3\sin t$. 虚拟控制信号α_2通过式(21)计算得到, 其中选取a_1, k_1分别为2, 2. 其余参数取值如下: $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.2$, $\omega_2(0)=0$, $\theta(0)=0.5$, $\zeta(0)=1$, $k_2=5$, $a_2=2$, $h_0=0.1$, $\sigma=0.05$, $\eta=100$, $\kappa_2=0.001$, $k_{z1}=0.15$.

在本例中, 输出非对称死区$y=D(x_1)$是由式(59)计算得到

$$D(x_1)=\begin{cases} m_y(x_1-b_y), & x_1>b_y,\\ 0, & b_z\leqslant x_1\leqslant b_y,\\ m_z(x_1-b_z), & x_1<b_z,\end{cases} \tag{59}$$

其中m_z, m_y, b_z, b_y分别取1, 1.2, –0.0002, 0.001. 在控制器神经网络的设计中, 基函数向量$S_i(Z_i)=[s_{i1}(Z_i)\ \cdots\ s_{il}(Z_i)]^{\mathrm T}$, 其中$s_{ij}(Z_i)=\exp[-(Z_i-v_{ij})^{\mathrm T}(Z_i-v_{ij})/\eta_{ij}^2]$. $v_{1j}=(j-5)[1\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm T}$,$v_{2j}=0.5(j-5)[1\ 1\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm T}$; $\eta_{1j}=2$, $\eta_{2j}=2$, 其中$i=1, 2$, $j=1,\cdots,9$.

图1是输出非对称死区y的跟踪效果及其跟踪误差图, 从图中可以看出在本文所设计控制器的控制下, y可以很好地跟踪给定参考信号y_r, 且跟踪误差z_1可由约束$|k_{z1}|$控制, 说明系统具有良好的跟踪性能. 自适应参数θ和控制信号$v(t)$的有界性如图2–3所示. 虚拟控制信号α_2, 滤波信号ω_2以及它们之间的误差y_2如图4所示.

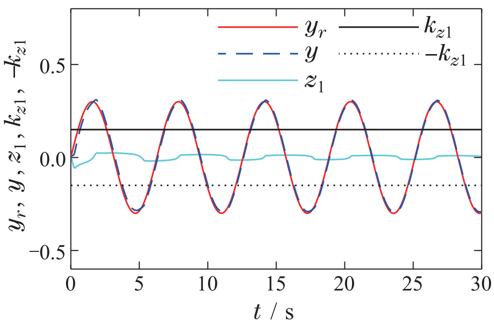

图 1 输出y的跟踪效果和跟踪误差

Fig. 1 The tracking effect and tracking error of output y

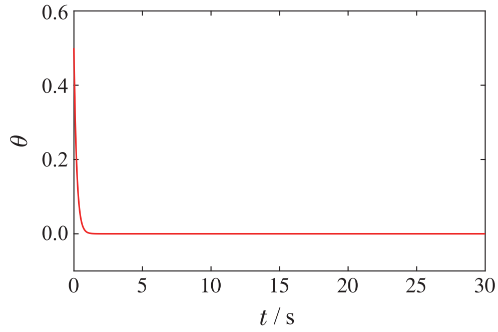

图 2 自适应参数θ轨迹

Fig. 2 The trajectory of adaptive parameter θ

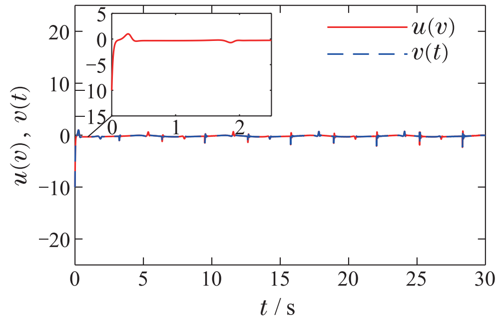

图 3 控制输入v和饱和输入$u(v)$

Fig. 3 Control input v and saturation input $u(v)$

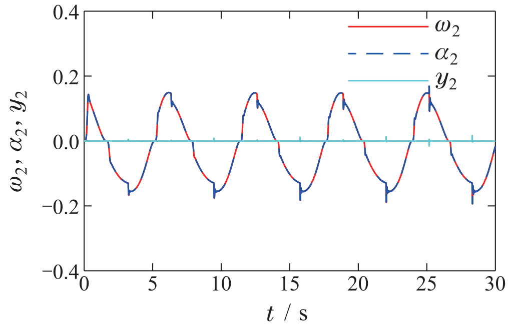

图 4 虚拟信号α_2, 滤波信号ω_2及有界层误差y_2的轨迹

Fig. 4 The trajectories of virtual signal α_2 , filter signal ω_2 and boundary layer error y_2

例 2 考虑下面可以描述化学反应的简化Brusselator模型[17]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2+[A-(B+1)x_1+(x_1^2-1)x_2]+d_1(x,t),\\ \dot{x}_2=(2+\cos(x_1))\,u(v)+[Bx_1-x_1^2x_2]+d_2(x,t),\\ y=g(x_1),\end{cases} \tag{60}$$

其中x_1, x_2代表反应中间产物的浓度. 储存化学品的供应用A和B来表示, $A>0$, $B>0$. $g(x_1)$表示输出对称死区. 文献[17]中指出, Brusselator模型是一种可在一系列近似之后, 从部分差分方程中推导出来的简化化学模型. 所以, 在实际的化学反应中, 难以避免存在数学建模误差和其他类型的未知非线性. 因此, 系统的输出难免存在输出非对称死区的情形. 基于此, 本仿真考虑实际化学反应过程中, 系统输出为非

对称死区的Brusselator模型, 形式如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + [A - (B+1)x_1 + (x_1^2 - 1)x_2] + \\ \qquad d_1(x,t), \\ \dot{x}_2 = (2 + \cos(x_1))\, u(v) + [Bx_1 - x_1^2 x_2] + \\ \qquad d_2(x,t), \\ y = D(x_1), \end{cases} \tag{61}$$

其中 $D(x_1)$为输出非对称死区. 本文选取$A=1, B=3$, 那么被控对象(61)的仿真参数选取则如表2所示.

表 2 被控对象(61)结构取值表

Table 2 Value table of the controlled object (61)

被控对象结构	参数选取
$g_1(\bar{x}_1)$	1
$g_{20}(\bar{x}_2)$	$2+\cos x_1$
$f_1(x)$	$1-4x_1+(x_1^2-1)x_2$
$f_2(x)$	$3x_1-x_1^2x_2$
$d_1(x,t)$	$0.7x_1^2\cos(1.5t)$
$d_2(x,t)$	$0.5\sin(x_1x_2)$

本例所选取的参考信号为$y_r = 0.5\sin t + 3$. 虚拟控制信号α_2通过式(21)计算得到, 其中选取a_1, k_1的值分别为7, 10. 其余参数选取值如下所示:

$$\begin{cases} x_1(0) = 2.7,\ x_2(0) = 1, \\ \omega_2(0) = 4,\ \theta(0) = 1, \\ \zeta(0) = 1,\ k_2 = 2, \\ a_2 = 10,\ h_0 = 0.1, \\ \sigma = 0.2,\ \eta = 2, \\ \kappa_2 = 0.0001,\ k_{z1} = 1. \end{cases}$$

在本例中, 输出非对称死区$y = D(x_1)$是由式(62)计算得到

$$D(x_1) = \begin{cases} m_y(x_1 - b_y), & x_1 > b_y, \\ 0, & b_z \leqslant x_1 \leqslant b_y, \\ m_z(x_1 - b_z), & x_1 < b_z, \end{cases} \tag{62}$$

其中输出非对称死区函数的左右斜率和宽度参数 m_z, m_y, b_z, b_y 的选取数值分别是 1, 1.2, -0.2, 0.1. 在神经网络控制器设计过程中, 基函数向量为$S_i(Z_i) = [s_{i1}(Z_i)\cdots s_{il}(Z_i)]^{\mathrm{T}}$. 其中, $s_{ij}(Z_i)$ 由公式$s_{ij}(Z_i) = \exp\left[-(Z_i - v_{ij})^{\mathrm{T}}(Z_i - v_{ij})/\eta_{ij}^2\right]$计算得到. 基函数向量中心选取如下: $v_{1j} = (j-11)[1\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$, $v_{2j} = 0.5(j-11)[1\ 1\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$; 高斯函数宽度选取如下: $\eta_{1j} = 1$, $\eta_{2j} = 1$. 其中: $i = 1, 2$, $j = 1, \cdots, 21$.

图5是输出非对称死区y的跟踪效果及其跟踪误差图, 从图中可以看出y可以很好地跟踪给定参考信号y_r, 且跟踪误差z_1可由约束$|k_{z1}|$控制, 说明系统具有良好的跟踪性能. 自适应参数θ和控制信号$v(t)$的有界性如图6和图7所示. 虚拟控制信号α_2, 滤波信号ω_2以及它们之间的误差y_2如图8所示. 仿真结果表明, 在实际仿真案例中, 本文所设计的控制器同样满足要求.

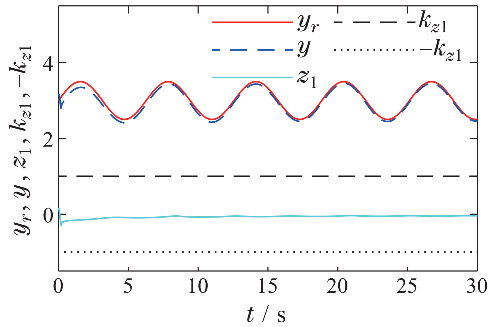

图 5 输出y的跟踪效果和跟踪误差

Fig. 5 The tracking effect and tracking error of output y

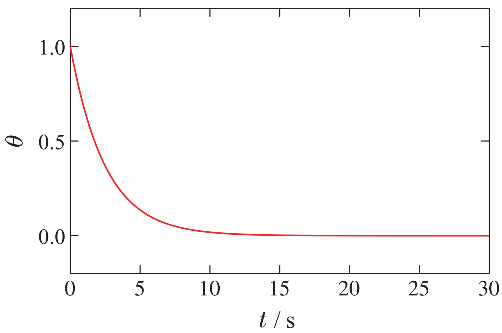

图 6 自适应参数θ轨迹

Fig. 6 The trajectory of adaptive parameter θ

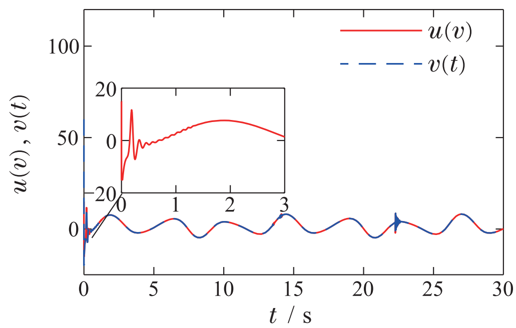

图 7 控制输入v和饱和输入$u(v)$

Fig. 7 Control input v and saturation input $u(v)$

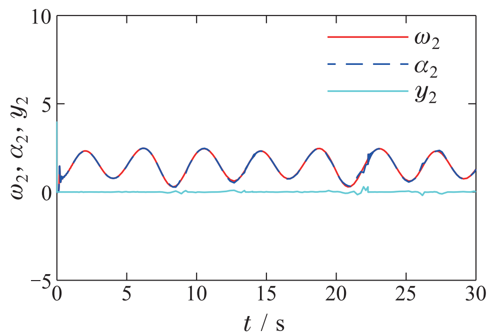

图 8 虚拟信号α_2, 滤波信号ω_2及有界层误差y_2的轨迹

Fig. 8 The trajectories of virtual signal α_2 , filter signal ω_2 and boundary layer error y_2

5 结论

本文研究了具有输出非对称死区和状态含未知控制方向的非严格反馈非线性系统, 设计了自适应神经网络控制器. 针对非对称死区, 采用基于死区逆的光滑逼近模型进行表示, 并将此模型代入控制器的设计中. 针对状态含未知控制方向, 做出限制未知控制方向的假设, 并设计含未知控制方向的虚拟控制信号和实际控制器. 通过Lyapunov稳定性分析证明了闭环系统内所有信号半全局一致最终有界, 且跟踪误差满足约束条件. 仿真结果表明了所设计控制器的有效性.

参考文献:

[1] YANG Qingyun, CHEN Mou. Robust control for near space vehicles with input saturation. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(1): 18 – 28.
(杨青运, 陈谋. 具有输入饱和的近空间飞行器鲁棒控制. 控制理论与应用, 2015, 32(1): 18 – 28.)

[2] AN Hang, XIAN Bin. Attitude reinforcement learning control of an unmanned helicopter with verification. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 516 – 524.
(安航, 鲜斌. 无人直升机的姿态增强学习控制设计与验证. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 516 – 524.)

[3] GAO Y F, SUN X M, WEN C Y, et al. Adaptive tracking control for a class of stochastic uncertain nonlinear systems with input saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(5): 2498 – 2504.

[4] GAO Y F, SUN X M, WEN C Y, et al. Observer-based adaptive NN control for a class of uncertain nonlinear systems with nonsymmetric input saturation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 28(7): 1520 – 1530.

[5] HU Yun'an, GENG Baoliang, ZHAO Yongtao. Prescribed performance backstepping control of strict feedback nonlinear systems. *Control and Decision*, 2014, 29(8): 1509 – 1512.
(胡云安, 耿宝亮, 赵永涛. 严格反馈非线性系统预设性能backstepping控制器设计. 控制与决策, 2014, 29(8): 1509 – 1512.)

[6] CUI Guozeng. *Adaptive neural network control for uncertain nonlinear systems with input constraints*. Nanjing: Nanjing University of Science & Technology, 2016.
(崔国增. 具有输入约束的不确定非线性系统自适应神经网络控制. 南京: 南京理工大学, 2016.)

[7] ZHANG T P, XU H X. Adaptive optimal dynamic surface control of strict feedback nonlinear systems with output constraints. *Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(5): 2059 – 2078.

[8] SUN Guofa, TIAN Yu, WANG Suzhen. Adaptive neural output feedback control for strict feedback nonlinear system. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(3): 375 – 382.
(孙国法, 田宇, 王素珍. 严格反馈非线性系统的自适应神经网络输出反馈控制. 控制理论与应用, 2017, 34(3): 375 – 382.)

[9] YIN S, SHI P, YANG H. Adaptive fuzzy control of strict-feedback nonlinear time-delay systems with unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(8): 1926 – 1938.

[10] GENG Baoliang, HU Yun'an. Prescribed performance adaptive neural backstepping control for nonlinear system with uncertainties and unknown control directions. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(3): 397 – 403.
(耿宝亮, 胡云安. 控制方向未知的不确定系统预设性能自适应神经网络反演控制. 控制理论与应用, 2014, 31(3): 397 – 403.)

[11] SWAROOP D, HEDRICK J K, YIP P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(10): 1893 – 1899.

[12] CHEN M, TAO G, JIANG B. Dynamic surface control using neural networks for a class of uncertain nonlinear systems with input saturation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 26(9): 2086 – 2097.

[13] WANG Lixin, ZHAO Dingxuan, LIU Fucai, et al. ADRC for electro-hydraulic position servo systems based on dead-zone compensation. *China Mechanical Engineering*, 2021, 32(12): 1432 – 1422.
(王立新, 赵丁选, 刘福才, 等. 基于死区补偿的电液位置伺服系统自抗扰控制. 中国机械工程, 2021, 32(12): 1432 – 1442.)

[14] WANG F J, LIU Z, CHEN C L P, et al. Robust adaptive visual tracking control for uncertain robotic systems with unknown dead-zone inputs. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(12): 6255 – 6279.

[15] WANG H, KARIMI H R, LIU P X, et al. Adaptive neural control of nonlinear systems with unknown control directions and input dead-zone. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 48(11): 1897 – 1907.

[16] LIU Z, LAI G Y, ZHANG Y, et al. Adaptive fuzzy tracking control of nonlinear time-delay systems with dead-zone output mechanism based on a novel smooth model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2015, 23(6): 1998 – 2011.

[17] SHI X C, LIM C C, SHI P, et al. Adaptive neural dynamic surface control for nonstrict-feedback systems with output dead zone. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(11): 5200 – 5213.

[18] ZHAO Z H, JIA X L, FU S Z. Adaptive output feedback tracking of nonlinear time-delay systems with uncertain dead-zone input. *Proceedings of the 38th Chinese Control Conference*. Guangzhou: IEEE, 2019: 456 – 461.

[19] ZHANG Chunlei, WANG Lidong, GAO Chuang, et al. Pure feedback nonlinear system control with input saturation and output constraints. *Control Engineering of China*, 2021, 28(3): 531 – 539.
(张春蕾, 王立东, 高闯, 等. 输入饱和及输出受限的纯反馈非线性系统控制. 控制工程, 2021, 28(3): 531 – 539.)

[20] GUO Zijie, BAI Weiwei, ZHOU Qi, et al. Adaptive optimal control for a class of nonlinear systems with dead zone input and prescribed performance. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(11): 2128 – 2136.
(郭子杰, 白伟伟, 周琪, 等. 基于性能指标约束的一类输入死区非线性系统最优控制. 自动化学报, 2019, 45(11): 2128 – 2136.)

[21] MA J J, ZHENG Z, LI P. Adaptive dynamic surface control of a class of nonlinear systems with unknown direction control gains and input saturation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 45(4): 728 – 741.

[22] ZHOU Q, WANG L J, WU C W, et al. Adaptive fuzzy control for nonstrict-feedback systems with input saturation and output constraint. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 47(1): 1 – 12.

[23] WANG H Q, CHEN B, LIU K F, et al. Adaptive neural tracking control for a class of nonstrict-feedback stochastic nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(5): 2947 – 2958.

作者简介:

孙 猛 硕士研究生, 目前研究方向为神经网络自适应控制, E-mail: jousmon@foxmail.com;

杨 洪 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为神经网络自适应控制、动力学系统稳定性分析, E-mail: yanghonghit@163.com.