第 40 卷第 9 期
2023 年 9 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 40 No. 9
Sep. 2023

具有有界时滞的脉冲随机泛函微分系统的有限时间稳定

王国庆, 姚凤麒†

(安徽工业大学 电气与信息工程学院, 安徽 马鞍山 243032)

摘要: 本文研究了具有有界时滞的脉冲随机泛函微分系统的有限时间稳定和有限时间渐近稳定问题. 基于Lyapunov函数、Razumikhin技巧以及平均脉冲区间条件, 本文建立了关于该系统有限时间稳定和有限时间渐近稳定的相关性准则. 最后, 给出例子说明结论的有效性.

关键词: 有限时间稳定; 有限时间渐近稳定; 脉冲随机泛函微分系统; Lyapunov函数; 有界时滞; Razumikhin技巧

引用格式: 王国庆, 姚凤麒. 具有有界时滞的脉冲随机泛函微分系统的有限时间稳定. 控制理论与应用, 2023, 40(9): 1569 – 1575

DOI: 10.7641/CTA.2022.20204

Finite-time stability of impulsive stochastic functional differential systems with bounded delays

WANG Guo-qing, YAO Feng-qi†

(School of Electrical and Information Engineering, Anhui University of Technology, Maanshan Anhui 243032, China)

Abstract: This paper is concerned with the finite-time stability and finite-time contractive stability analysis of impulsive stochastic functional differential systems with bounded delays. Based on the Lyapunov functions, Razumikhin techniques and average dwell time approach some finite-time stability and finite-time contractive stability criteria are derived for the related systems. Finally, examples are given to illustrate the efficiency and usefulness of the conclusion.

Key words: finite-time stability; finite-time contractive stability; impulsive stochastic functional differential systems; Lyapunov functions; bounded delays; Razumikhin techniques

Citation: WANG Guoqing, YAO Fengqi. Finite-time stability of impulsive stochastic functional differential systems with bounded delays. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(9): 1569 – 1575

1 引言

众所周知, 随机扰动和时滞现象广泛存在于实际工程系统中, 包括随机时滞微分系统在内的随机泛函微分系统在电力系统分析以及控制工程领域中有着非常深刻的影响[1]. 因此, 近年来该系统的稳定性研究引起了众多研究者的关注, 并在此趋势下诞生了一系列新的研究成果[2–5]. 另一方面, 脉冲效应也是影响系统稳定性的干扰因素之一, 它会使系统状态在某一时刻突然变化或者重置. 脉冲可分为3种类型, 分别为输入干扰型脉冲、中立型脉冲和稳定型脉冲[6].

脉冲与时滞的引入将使随机泛函微分系统的研究更加复杂. 最近, 在对该系统的稳定性研究方面有许多新的进展[7–14]. 在这些文章中, 研究者们都利用了Lyapunov-Like函数法与Itô公式相结合, 求解李亚普诺夫函数的导数, 然后进行系统稳定的研究. 在这其中, 文献[7–9]应用Razumikhin技巧建立了脉冲随机泛函微分系统的p阶矩指数稳定的条件, 其优点是不要求Lyapunov函数的导数恒为负定, 减少了一些保守性. 参考文献[10, 13]主要是对具有无限时滞系统的稳定性进行研究. Yao等人[11]利用比较原理得到了脉冲随机泛函微分系统的p阶矩指数稳定性定理. 在参考文献[15]中作者提出了平均脉冲区间的概念, 其允许脉冲发生的频率在不同区间内是不同的. 显然, 这个概念在描述非均匀分布脉冲的频率方面具有优势. 基于这一优势, 该条件从提出起就受到了许多研究人员的广泛关注[9–12, 16–18].

然而, 上述这些研究主要是讨论随机脉冲泛函微分系统的p阶矩指数稳定, 而很少有对该系统的有限

收稿日期: 2022−03−22; 录用日期: 2022−11−16.
†通信作者. E-mail: yaofengqi_ahut@163.com; Tel.: +86 13865558412.
本文责任编委: 王卓.
安徽教育厅高校自然科学研究项目(KJ2019A0047)资助.
Supported by the Natural Science Research Projects for Universities of Anhui Education Department (KJ2019A0047).

时间稳定进行研究. 有限时间稳定的概念是由俄罗斯研究者Kamenkov[19]在大约70年前首次提出的, 并且在20世纪60年代和70 年代也有少量提及[20]. 有限时间稳定不同于Lyapunov稳定, 它要求系统状态在有限的时间内收敛到一个固定的范围. 近年来, 各种类型系统的有限时间稳定理论得到广泛研究, 如非线性系统[2,21–22]、神经网络[16]、随机系统[17,23]等. Weiss和Infante在文献[24]中基于有限时间稳定提出了有限时间渐近稳定这一新概念, 其要求系统的状态在满足有限时间稳定的前提下收敛到一个小于初始值的阈值内. 随着两个概念的提出, 研究者们在这一方向上进行了更深入的研究与拓展. 在文献[25]中, 作者利用Lyapunov-Razumikhin法建立了时滞系统的有限时间稳定以及有限时间渐近稳定的相关准则, 并将结论应用于一类线性时变系统. 而含有脉冲的随机时滞系统的有限时间稳定问题一直是研究的热门话题之一[26–28]. 文献[18]利用平均脉冲区间条件和多重Lyapunov-like函数建立了非线性脉冲随机时滞系统的均方有限时间稳定. 但很少有研究者提及如何建立脉冲随机泛函微分系统的有限时间稳定和有限时间渐近稳定这类问题, 这促使本文接下来的工作.

本文将利用Lyapunov-Razumikhin法和平均驻留时间的概念研究具有有界时滞的脉冲随机泛函微分系统的有限时间稳定和有限时间渐近稳定问题. 文章的结构如下: 首先, 第2节将介绍相关系统的概念, 符号的含义和定理中将使用的基本定义; 第3节将介绍主要结论及其证明过程; 在第4节中, 将给出具体数值的例子来验证本文的结论; 最后, 第5节会对文章进行总结.

2 准备知识

在本文中除非另有说明, 否则将采用以下符号. 令$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant0},P)$为完备概率空间, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant0}$满足右连续并且$\mathcal{F}_0$包含所有$P$的空集. 令$w(t)=(w_1(t)\ \cdots\ w_m(t))^{\mathrm{T}}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant0},P)$上的$m$维布朗运动. $\mathrm{E}[\cdot]$是关于概率测度的期望算子. $\mathbb{R},\mathbb{R}_+,\mathbb{N}$分别代表实数、非负实数和正整数. $\mathbb{R}^n$记为欧几里得范数$|\cdot|$的n维实数空间. $\mathbb{R}^{n\times m}$是$n\times m$实矩阵. 对于$\tau>0$, 用$C^{1,2}([t_0-\tau,+\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}_+)$表示定义在$[t_0-\tau,+\infty)\times\mathbb{R}^n$上所有非负实值函数$V(t,x)$的族, 其对$t$有一次偏导, 对$x$有二次偏导. 若$a,b$为常数, 则$a\vee b=\max\{a,b\}$; $a\wedge b=\min\{a,b\}$; $\mathrm{mod}(a,b)$表示a除以b取余. 若A是一个向量或矩阵, 则A^{T}表示其转置.

若$\tau>0, PC([-\tau,0];\mathbb{R}^n)=\{\varphi:[-\tau,0]\to\mathbb{R}^n|\varphi(t)$, 在$[-\tau,0]$上所有但至多有限个点存在$\varphi(t^-)$且$\varphi(t^-)=\varphi(t)\}$, 式中$\varphi(t^-),\varphi(t^+)$分别表示函数$\varphi(t)$在$t$处的左右极限. 另外其范数定义为$\|\varphi\|_\tau=\sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant0}|\varphi(s)|$.

若$p>0,t\geqslant0$, 用$PC^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$表示所有有界且$\mathcal{F}_t$可测的族, $PC([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$值随机变量$\varphi=\{\varphi(\theta):-\tau\leqslant\theta\leqslant0\}$使得$\mathrm{E}\|\varphi\|^p<\infty$. $PC^p_{\mathcal{F}_{t_0}}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$为所有$\mathcal{F}_{t_0}$可测有界$PC([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$值函数.

考虑以下脉冲随机泛函微分系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=f(t,x_t)\mathrm{d}t+g(t,x_t)\mathrm{d}w(t), & t\neq t_k,\ t\geqslant t_0,\\ x(t_k)=I_k(t_k,x(t_k^-)), & k\in\mathbb{N},\\ x_{t_0}(\theta)=\phi(\theta), & \theta\in[-\tau,0],\end{cases}\tag{1}$$

式中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$是系统状态. $\phi\in PC^p_{\mathcal{F}_{t_0}}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$是初始条件. $x_t=x(t+s)\in PC^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$. $f:\mathbb{R}_+\times PC^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$; $g:\mathbb{R}_+\times PC^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^{n\times m}$为Borel可测的. $I_k(t_k,x(t_k^-)):\mathbb{R}_+\times PC^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$表示为$x$在$t_k$时刻的脉冲扰动. 脉冲序列$\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$是满足$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_k\cdots$的瞬时时刻, 并且有$\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$.

假设$f(t,\varphi)$和$g(t,\varphi)$在$t\in[t_0,+\infty)$内是连续的, $\varphi\in PC^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$满足局部Lipschitz条件, 则系统(1)存在唯一解, 记为$x(t;t_0,\phi)$. 当$t\geqslant t_0$且$k\in\mathbb{N}$时, $f(t,0)\equiv0, g(t,0)\equiv0, I_k(t_k,0)\equiv0$表示系统(1)的平凡解为$x(t)\equiv0$.

定义 1 如果存在正常数T,c_1,c_2满足$c_1<c_2$, 并且有$\mathrm{E}\|\phi\|^p<c_1$使得

$$\mathrm{E}[|x(t)|^p]<c_2,\ \forall t\in[t_0,T],$$

则称系统(1)是关于(c_1,c_2,T)的p阶矩有限时间稳定.

定义 2 如果存在正常数T,c_1,c_2,η,σ满足$\eta<c_1<c_2,\sigma<T$, 并且有$\mathrm{E}\|\phi\|^p<c_1$使得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[|x(t)|^p]<c_2,\ \forall t\in[t_0,T],\\&\mathrm{E}[|x(t)|^p]<\eta,\ \ \forall t\in[T-\sigma,T],\end{aligned}$$

则称系统(1)是关于(c_1,c_2,η,σ,T)的p阶矩有限时间渐近稳定.

定义 3 若存在正整数N_0, 和正常数T_{a}, 满足

$$\frac{t-s}{T_{\mathrm{a}}}-N_0\leqslant N(t,s)\leqslant\frac{t-s}{T_{\mathrm{a}}}+N_0,\ \forall t\geqslant s\geqslant0,$$

则表明脉冲序列$\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的平均脉冲区间等于T_{a}, 其中$N(t,s)$表示脉冲序列$\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$在区间$(s,t]$上的脉冲次数.

注 1 相较于文献[21–22,25,27]的有限时间稳定分析, 本文综合考虑了脉冲、时滞以及随机噪声的影响, 使得所研究的系统(1)更具有一般性.

注 2 区别于Lyapunov稳定, 满足有限时间稳定的系统可能不会满足Lyapunov稳定, 反之亦然. 定义1描述了一个系统从给定的初始状态开始运动, 并且其状态变量在有限时间内不超过指定的阈值. 有限时间渐近稳定在满足有限时间

稳定的前提下, 还需要在到达终止时刻之前将状态变量收缩到小于初始状态的范围内.

3 主要结果

在本节中, 将利用Lyapunov-Razumikhin法建立脉冲随机泛函微分系统(1)的有限时间稳定和有限时间渐近稳定的相关准则.

定理 1 令$c_1, c_2, \eta, \sigma, T, \alpha_1, \alpha_2, p, \beta$为正常数, $\gamma \in \mathbb{R}$, 其中$\eta < c_1 < c_2, \sigma < T$. 假设脉冲序列$\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的平均脉冲间隔是$T_{\rm a}$以及存在函数$V \in C^{1,2} \times ([t_0-\tau, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$和可积实值函数$\varGamma(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$使得

i) $\alpha_1|x|^p \leqslant V(t,x) \leqslant \alpha_2|x|^p, x \in \mathbb{R}^n$;

ii) $\mathrm{E}\mathcal{L}V(t,\varphi(0)) < \varGamma(t)\mathrm{E}V(t,\varphi(0)), t \in [t_0, T]$, $t \neq t_k, k \in \mathbb{N}_+$, 且$\varphi \in PC^b_{\mathcal{F}_t}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$满足

$$\mathrm{E}V(t+s, \varphi(s)) \leqslant \psi(t,s)\mathrm{E}V(t,\varphi(0)),$$

$s \in [-\tau, 0]$, 其中

$$\psi(t,s) = (\beta \vee \beta^{-1})^{N_0}\mathrm{e}^{-\int_{(t+s)\vee t_0}^{t}(\varGamma(u)+\frac{\ln\beta}{T_{\rm a}})\mathrm{d}u};$$

iii) $\mathrm{E}V(t_k, x(t_k)) \leqslant \beta \mathrm{E}V(t_k^-, x(t_k^-)), t=t_k,\ k \in \mathbb{N}$;

iv) $\int_{t_0}^{t}\varGamma(u)\mathrm{d}u \leqslant \gamma,\ t \in [t_0, T]$;

v) 若$\beta < 1$时, 满足$\beta^{-N_0}\mathrm{e}^{\gamma}\alpha_2 c_1 < \alpha_1 c_2$; 若$\beta \geqslant 1$时, 满足$\beta^{\frac{T-t_0}{T_{\rm a}}+N_0}\mathrm{e}^{\gamma}\alpha_2 c_1 < \alpha_1 c_2$.

则称系统(1)是关于(c_1, c_2, T)的p阶矩有限时间稳定. 此外, 如果存在常数$\bar\gamma < 0$使得

vi) $\int_{t_0}^{t}\varGamma(u)\mathrm{d}u \leqslant \bar\gamma,\ t \in [T-\sigma, T]$;

vii) 若$\beta < 1$时, 满足$\beta^{-N_0}\mathrm{e}^{\bar\gamma}\alpha_2 c_1 < \alpha_1 \eta$; 若$\beta \geqslant 1$时, 满足$\beta^{\frac{T-t_0}{T_{\rm a}}+N_0}\mathrm{e}^{\bar\gamma}\alpha_2 c_1 < \alpha_1 \eta$.

则称系统(1)是关于$(c_1, c_2, \eta, \sigma, T)$的$p$阶矩有限时间渐近稳定.

注 3 与文献[17]相比, 本文综合考虑了镇定型与反镇定型两种脉冲对系统的稳定性影响.

证 令$x(t; t_0, \phi)$表示系统(1)在(t_0, ϕ)处的解, 简写为$x(t;t_0,\phi) = x(t)$. 令$V(t,x) = V(t)$, 且

$$\mathrm{E}V_0 = \mathrm{E}[\sup_{s\in[-\tau,0]} V(t_0+s)],$$

$\mathrm{E}V(t)$在$t \in [t_0, T]$内是一个连续函数. 首先对于$\forall t \in [t_l, t_{l+1}), l = 0, 1, \cdots$, 需验证

$$\beta^{-N(t,t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\varGamma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t) \leqslant \mathrm{E}V_0,\ t \in [t_0, T], \tag{2}$$

在区间$t \in [t_0-\tau, T]$内定义

$$\varOmega_\varepsilon(t) = \beta^{-N(t,t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t\vee t_0}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t),$$

其中ε是足够小的正数. 因此, 证明式(2)只需证明

$$\varOmega_\varepsilon(t) \leqslant \mathrm{E}V_0,\ t \in [t_0, T], \tag{3}$$

下面, 将使用数学归纳法对式(3)进行证明.

步骤 1 首先将证明式(3)在$t \in [t_0, t_1)$时成立. 若$t \in [t_0, t_1)$时, 由于$N(t, t_0) = 0$, 式(3)可以写成

$$\varOmega_\varepsilon(t) = \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t) \leqslant \mathrm{E}V_0,\ t \in [t_0, t_1), \tag{4}$$

由$\varOmega_\varepsilon(t)$的定义有

$$\varOmega_\varepsilon(t) = \mathrm{E}V(t) \leqslant \mathrm{E}V_0,\ t \in [t_0-\tau, t_0],$$

如果式(4)不成立, 则存在$t \in [t_0, t_1)$使得

$$\varOmega_\varepsilon(t) = \mathrm{E}V(t) > \mathrm{E}V_0,$$

定义$t^* = \inf\{t \in [t_0, t_1): \varOmega_\varepsilon(t) > \mathrm{E}V_0\}$. 由函数连续性可以看出

$$\varOmega_\varepsilon(t^*) = \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t^*}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t^*) = \mathrm{E}V_0, \tag{5}$$

$$\varOmega_\varepsilon(t) = \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t\vee t_0}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t) \leqslant \mathrm{E}V_0,\quad t \in [t_0-\tau, t^*], \tag{6}$$

以及

$$D^+[\varOmega_\varepsilon(t)]|_{t=t^*} > 0, \tag{7}$$

结合式(5)–(6)得出

$$\mathrm{E}V(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\int_{t\vee t_0}^{t^*}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t^*),\ t \in [t_0-\tau, t^*],$$

然后对于$\forall s \in [-\tau, 0]$, 有

$$\mathrm{E}V(t^*+s) \leqslant \mathrm{e}^{-\int_{(t^*+s)\vee t_0}^{t^*}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t^*),$$

令$\varepsilon \to 0$, 则

$$\mathrm{E}V(t^*+s) \leqslant \mathrm{e}^{-\int_{(t^*+s)\vee t_0}^{t^*}\varGamma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t^*),$$

结合条件 ii)可知$\mathrm{E}\mathcal{L}V(t^*) < \varGamma(t^*)\mathrm{E}V(t^*)$. 由Itô公式得到

$$D^+[\varOmega_\varepsilon(t)]|_{t=t^*} = \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t^*}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}[\mathrm{E}\mathcal{L}V(t^*) - (\varGamma(t^*)+\varepsilon)\mathrm{E}V(t^*)] \leqslant -\varepsilon\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t^*}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t^*) < 0,$$

这与式(7)相矛盾, 因此式(3)在$t \in [t_0, t_1)$内成立.

步骤 2 假设式(3)在$t \in [t_l, t_{l+1}), l = 1, 2, \cdots, k-1$内成立, 然后需要证明式(3)在$l = k$时成立, 即

$$\varOmega_\varepsilon(t) = \beta^{-N(t,t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t\vee t_0}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t) \leqslant \mathrm{E}V_0, t \in [t_k, t_{k+1}). \tag{8}$$

结合条件 iii), 有

$$\mathrm{E}V(t_k) \leqslant \beta\mathrm{E}V(t_k^-) \leqslant \beta\cdot\beta^{N(t_k^-,t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_k}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V_0 = \beta^{N(t_k,t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_k}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V_0,$$

这使得

$$\varOmega_\varepsilon(t_k) = \beta^{-N(t_k,t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t_k}(\varGamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t_k) \leqslant \mathrm{E}V_0,$$

由反证法, 如果式(8)不成立, 则存在$t \in [t_k, t_{k+1})$内使得

$$\varOmega_\varepsilon(t) > \mathrm{E}V_0,$$

定义$\bar{t}=\inf\{t\in[t_k,t_{k+1}):\Omega_\varepsilon(t)>\mathrm{E}V_0\}$. 根据函数连续性, 看出

$$\Omega_\varepsilon(\bar{t})=\beta^{-N(\bar{t},t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t})=\mathrm{E}V_0, \tag{9}$$

$$\Omega_\varepsilon(t)=\beta^{-N(t,t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t\vee t_0}(\Gamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t)\leqslant \mathrm{E}V_0, t\in[t_0-\tau,\bar{t}], \tag{10}$$

并且

$$D^+[\Omega_\varepsilon(t)]|_{t=\bar{t}}>0, \tag{11}$$

通过式(9)–(10)得到

$$\beta^{-N(t,t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t\vee t_0}(\Gamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(t)\leqslant \beta^{-N(\bar{t},t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t}),\ t\in[t_0-\tau,\bar{t}],$$

上式等价于

$$\mathrm{E}V(t)\leqslant\beta^{-N(\bar{t},t)}\mathrm{e}^{-\int_{t\vee t_0}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t}),$$

所以

$$\mathrm{E}V(\bar{t}+s)\leqslant \beta^{-N(\bar{t},\bar{t}+s)}\mathrm{e}^{-\int_{(\bar{t}+s)\vee t_0}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t}),\ s\in[-\tau,0]. \tag{12}$$

情形 1 $\bar{t}+s\geqslant t_0$, 则式(12)可以写成

$$\mathrm{E}V(\bar{t}+s)\leqslant\beta^{-N(\bar{t},\bar{t}+s)}\mathrm{e}^{-\int_{\bar{t}+s}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t}), \tag{13}$$

考虑脉冲序列$\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的平均脉冲间隔等于T_{a}, 得到

$$-\frac{s}{T_{\mathrm{a}}}-N_0\leqslant N(\bar{t},\bar{t}+s)\leqslant-\frac{s}{T_{\mathrm{a}}}+N_0,$$

如果$\beta\geqslant1$,

$$\beta^{-N(\bar{t},\bar{t}+s)}\leqslant\beta^{\frac{s}{T_{\mathrm{a}}}+N_0}, \tag{14}$$

如果$0<\beta<1$,

$$\beta^{-N(\bar{t},\bar{t}+s)}\leqslant\beta^{\frac{s}{T_{\mathrm{a}}}-N_0}, \tag{15}$$

因此, 对于$\forall\beta>0$, 由式(14)–(15)可得

$$\beta^{-N(\bar{t},\bar{t}+s)}\leqslant\beta^{\frac{s}{T_{\mathrm{a}}}}\cdot(\beta^{N_0}\vee\beta^{-N_0})= (\beta\wedge\beta^{-1})^{-N_0}\mathrm{e}^{-\int_{\bar{t}+s}^{\bar{t}}\frac{\ln\beta}{T_{\mathrm{a}}}\mathrm{d}u}, \tag{16}$$

将式(16)代入到式(13)得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}V(\bar{t}+s)\leqslant\\&(\beta\wedge\beta^{-1})^{-N_0}\mathrm{e}^{-\int_{\bar{t}+s}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon+\frac{\ln\beta}{T_{\mathrm{a}}})\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t})=\\&(\beta\vee\beta^{-1})^{N_0}\mathrm{e}^{-\int_{(\bar{t}+s)\vee t_0}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon+\frac{\ln\beta}{T_{\mathrm{a}}})\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t}).\end{aligned} \tag{17}$$

情形 2 $t_0-\tau\leqslant\bar{t}+s\leqslant t_0$. 式(12)可以写成

$$\mathrm{E}V(\bar{t}+s)\leqslant\beta^{-N(\bar{t},t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t}), \tag{18}$$

与式(16)类似的, 可以得到

$$\beta^{-N(\bar{t},t_0)}\leqslant\beta^{-\frac{\bar{t}-t_0}{T_{\mathrm{a}}}}\cdot(\beta^{N_0}\vee\beta^{-N_0})= (\beta\wedge\beta^{-1})^{-N_0}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{\bar{t}}\frac{\ln\beta}{T_{\mathrm{a}}}\mathrm{d}u}, \tag{19}$$

将式(19)代入式(18)得出

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}V(\bar{t}+s)\leqslant\\&(\beta\wedge\beta^{-1})^{-N_0}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon+\frac{\ln\beta}{T_{\mathrm{a}}})\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t})=\\&(\beta\vee\beta^{-1})^{N_0}\mathrm{e}^{-\int_{(\bar{t}+s)\vee t_0}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon+\frac{\ln\beta}{T_{\mathrm{a}}})\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t}),\end{aligned} \tag{20}$$

结合式(17)(20), 并且令$\varepsilon\to0$, 则有

$$\mathrm{E}V(\bar{t}+s)\leqslant (\beta\vee\beta^{-1})^{N_0}\mathrm{e}^{-\int_{(t+s)\vee t_0}^{t}(\Gamma(u)+\frac{\ln\beta}{T_{\mathrm{a}}})\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t}),$$

利用条件 ii)有

$$\mathrm{E}\mathcal{L}V(\bar{t})<\Gamma(t)\mathrm{E}V(\bar{t}),$$

由Itô公式得到

$$\begin{aligned}&D^+[\Omega_\varepsilon(t)]|_{t=\bar{t}}=\\&\beta^{-N(\bar{t},t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}[\mathrm{E}\mathcal{L}V(\bar{t})-\\&(\Gamma(\bar{t})+\varepsilon)\mathrm{E}V(\bar{t})]=\\&-\varepsilon\beta^{-N(\bar{t},t_0)}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{\bar{t}}(\Gamma(u)+\varepsilon)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V(\bar{t})<0,\end{aligned}$$

这与式(11)相矛盾. 因此式(8)成立. 即式(3)在$t\in[t_k,t_{k+1})$时都成立. 通过数学归纳, 式(3)在$t\in[t_0,T]$上成立. 所以式(2)成立.

由条件 i)可知

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V_0&=\mathrm{E}[\sup_{s\in[-\tau,0]}V(t_0+s)]\leqslant\\&\alpha_2\mathrm{E}[\sup_{s\in[-\tau,0]}|x(t_0+s)|^p]\leqslant\\&\alpha_2\mathrm{E}[(\sup_{s\in[-\tau,0]}|x(t_0+s)|)^p]=\alpha_2\mathrm{E}\|\phi\|^p,\end{aligned} \tag{21}$$

因此, 如果$\mathrm{E}\|\phi\|^p<c_1$, 则$\mathrm{E}V_0<\alpha_2c_1$. 接下来, 通过条件 iv)和式(2), 得到

$$\alpha_1\mathrm{E}[|x(t)|^p]\leqslant\mathrm{E}V(t)\leqslant\beta^{N(t,t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\Gamma(u)\mathrm{d}u}\mathrm{E}V_0< \beta^{N(t,t_0)}\mathrm{e}^{\gamma}\alpha_2c_1, \tag{22}$$

再由平均脉冲区间的概念可知, 如果$\beta<1$, 有

$$\beta^{N(t,t_0)}\leqslant\beta^{\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{a}}}-N_0}\leqslant\beta^{-N_0},\ t\in[t_0,T], \tag{23}$$

如果$\beta\geqslant1$,

$$\beta^{N(t,t_0)}\leqslant\beta^{\frac{t-t_0}{T_{\mathrm{a}}}+N_0}\leqslant\beta^{\frac{T-t_0}{T_{\mathrm{a}}}+N_0},\ t\in[t_0,T], \tag{24}$$

由式(22)–(24)和条件 v), 得到

$$\mathrm{E}[|x(t)|^p]<c_2,\ t\in[t_0,T], \tag{25}$$

因此, 系统(1)是关于(c_1,c_2,T)的p阶矩有限时间稳定. 根据式(22), 条件 vi)和条件 vii)推导出: 如果$\beta<$

1, 则

$$\alpha_1\mathrm{E}[|x(t)|^p]\leqslant\mathrm{E}V(t)\leqslant\beta^{N(t,t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\Gamma(u)\mathrm{d}u}\alpha_2c_1\leqslant \beta^{-N_0}\mathrm{e}^{\bar\gamma}\alpha_2c_1<\alpha_1\eta,\ t\in[T-\sigma,T];\tag{26}$$

如果$\beta\geqslant 1$, 则

$$\alpha_1\mathrm{E}[|x(t)|^p]\leqslant\beta^{\frac{T-t_0}{T_\mathrm{a}}+N_0}\mathrm{e}^{\bar\gamma}\alpha_2c_1<\alpha_1\eta,\quad t\in[T-\sigma,T],\tag{27}$$

由式(26)–(27)表明

$$\mathrm{E}[|x(t)|^p]<\eta,\ t\in[T-\sigma,T],$$

因此系统(1)是关于(c_1,c_2,η,T,σ)的p阶矩有限时间渐近稳定. 证毕.

注 4 定理1中的条件 ii)是Razumikhin型条件. 条件iii)中利用函数$\psi(t,s)$处理时滞的影响. $\Gamma(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$的取值范围表明Lyapunov函数的导数$\dot V$并非必须满足负定或半负定. 对比文献[27]定理1的条件 ii)要求$D^+V(t,x(t))<0$, 本文结论更具一般性. 此外, 结合本文定理1的条件 iv)和条件v), 若$\alpha_1c_2>\alpha_2c_1$, 即在$[t_0,T]$内可能存在某些时刻使得$\Gamma(\cdot)>0$; 而条件 vi) 和条件 vii) 表明在$[T-\sigma,T]$内必须有$\Gamma(\cdot)<0$成立, 从而保证系统的有限时间渐近稳定.

注 5 定理1中, 当脉冲强度$\beta<1$时, 其对系统的稳定性具有镇定作用, 此时平均脉冲区间T_a内发生的脉冲次数越多, 越利于系统稳定. 而脉冲强度$\beta>1$对系统的稳定性具有反镇定作用. 其对系统有限时间稳定的影响较小. 但对于有限时间渐近稳定而言, 脉冲强度越大会使条件 ii)中构造的函数$\psi(\cdot)$的保守性越高. 另外从$\psi(t,s)$的表达式可知, β取值应接近于1, 以保证系统连续部分增长不会太快.

当系统(1)是不考虑脉冲影响的随机泛函微分系统

$$\mathrm{d}x(t)=f(t,x_t)\mathrm{d}t+g(t,x_t)\mathrm{d}w(t),\tag{28}$$

参照定理1的证明过程, 下面将直接给出该系统有限时间稳定的结论.

推论 1 令$c_1,c_2,\eta,\sigma,T,\alpha_1,\alpha_2,p,\beta$为正常数, $\gamma\in\mathbb{R}$, 其中$\eta<c_1<c_2,\sigma<T$. 另设存在函数$V\in C^{1,2}([t_0-\tau,+\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}_+)$以及可积实值函数$\Gamma(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$使得

i) $\alpha_1|x|^p\leqslant V(t,x)\leqslant\alpha_2|x|^p,\ \forall x\in\mathbb{R}^n$;

ii) $\mathrm{E}\mathcal{L}V(t,\varphi(0))<\Gamma(t)\mathrm{E}V(t,\varphi(0)),\ t\in[t_0,T]$. 且$\varphi\in PC^b_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$满足

$$\mathrm{E}V(t+s,\varphi(s))\leqslant\psi(t,s)\mathrm{E}V(t,\varphi(0)),\ s\in[-\tau,0],$$

其中$\psi(t,s)=\mathrm{e}^{-\int_{(t+s)\vee t_0}^{t}\Gamma(u)\mathrm{d}u}$;

iii) $\int_{t_0}^{t}\Gamma(u)\mathrm{d}u\leqslant\gamma,\ t\in[t_0,T]$;

iv) $\mathrm{e}^{\gamma}\alpha_2c_1<\alpha_1c_2$.

则称系统(28)是关于(c_1,c_2,T)的p阶矩有限时间稳定. 此外, 如果存在常数$\bar\gamma<0$使得

v) $\int_{t_0}^{t}\Gamma(u)\mathrm{d}u\leqslant\bar\gamma,\ t\in[T-\sigma,T]$;

vi) $\mathrm{e}^{\bar\gamma}\alpha_2c_1<\alpha_1\eta$.

则称系统(28)是关于(c_1,c_2,η,σ,T)的p阶矩有限时间渐近稳定.

4 数值例子

例 1 考虑如下一个具有镇定型脉冲的随机时滞系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=((-0.01t-2.5)\cos t^2x(t)+0.01x(t-\\ \qquad\tau(t)))\mathrm{d}t+0.1x(t-\tau(t))\mathrm{d}w(t),\\ \qquad\qquad t\neq t_k,\ t\geqslant t_0,\\ x(t_k)=0.9x(t_k^-),\ t=t_k,\ k=1,2,\cdots,\\ x(t)=0.85,\qquad -\tau\leqslant t\leqslant 0,\end{cases}\tag{29}$$

其中: $\tau(t)=|\sin t|,t\geqslant 0$. 脉冲信号$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$满足文献[15]中给出的以下条件:

$$t_k-t_{k-1}=\begin{cases}\epsilon, & \mathrm{mod}(k,N_0)\neq 0,\\ N_0(T_\mathrm{a}-\epsilon)+\epsilon, & \mathrm{mod}(k,N_0)=0,\end{cases}\tag{30}$$

构建的脉冲区间如图1所示, 其中: $T_\mathrm{a}=0.4,\epsilon=0.2$, $N_0=3$. 取函数$V(t,x)=x^2$, $\alpha_1=\alpha_2=1$, 并且$\Gamma(t)=-0.02t\cos t^2-5\cos t^2+0.013$. 由系统(29)的第2个等式可知$\beta=0.81$. 因此

$$\Gamma(t)+\frac{\ln\beta}{T_\mathrm{a}}=(-0.02t-5)\cos t^2-0.514,$$

假设只考虑系统(29)在区间$[0,\pi]$内的有限时间稳定, 通过计算得到

$$(\beta\vee\beta^{-1})^{N_0}\mathrm{e}^{-\int_{(t+s)\vee t_0}^{t}(\Gamma(u)+\frac{\ln\beta}{T_\mathrm{a}})\mathrm{d}u}=0.81^{-3}\mathrm{e}^{-\int_{t-\sin t}^{t}((-0.02t-5)\cos t^2-0.514)\mathrm{d}u}\geqslant 0.164,\tag{31}$$

即有$\mathrm{E}V(t+s)\leqslant 0.164\mathrm{E}V(t)$. 由Itô公式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\mathcal{L}V(t)\leqslant&(-0.02t-5)\cos t^2\mathrm{E}|x(t)|^2+\\&0.02\mathrm{E}|x(t)|\mathrm{E}|x(t-s)|+\\&0.01\mathrm{E}|x(t-s)|^2\leqslant\\&((-0.02t-5)\cos t^2+0.01)\mathrm{E}|x(t)|^2+\\&0.02\mathrm{E}|x(t-s)|^2\leqslant\\&((-0.02t-5)\cos t^2+0.01)\mathrm{E}|x(t)|^2+\\&0.02\times0.164\mathrm{E}|x(t)|^2=\\&\Gamma(t)\mathrm{E}|x(t)|^2.\end{aligned}$$

推导可得, $t\in[0,\pi]$时

$$\int_{t_0}^{t}\Gamma(u)\mathrm{d}u=\int_{0}^{t}((-0.02t-5)\cos t^2+0.013)\mathrm{d}u\leqslant 0,$$

令$c_1 = 1$, 结合定理1的条件 v)可知

$$\beta^{-N_0}\mathrm{e}^{\gamma}\alpha_2 c_1 = 0.81^{-3}\mathrm{e}^{0} = 1.88,$$

则系统(29)是关于$(1, 1.88, \pi)$的均方有限时间稳定. 取$\sigma = 0.5$, 则有

$$\int_{t_0}^{t}\varGamma(u)\mathrm{d}u = \int_{0}^{t}((-0.02t-5)\cos t^2 + 0.013)\mathrm{d}u \leqslant -2.783,\ t \in [\pi - 0.5, \pi],$$

由定理1的条件 vii)得

$$\beta^{-N_0}\mathrm{e}^{\bar{\gamma}}\alpha_2 c_1 = 0.81^{-3}\mathrm{e}^{-2.783} = 0.12,$$

则系统(29)是关于$(1, 1.88, 0.12, 0.5, \pi)$的均方有限时间渐近稳定. 系统的状态轨迹如图2所示.

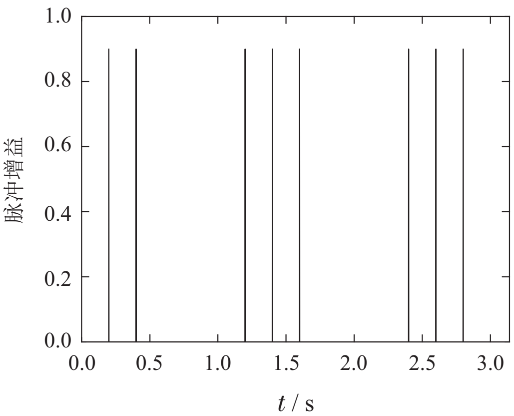

图 1 例1脉冲序列

Fig. 1 Impulse sequence in Example 1

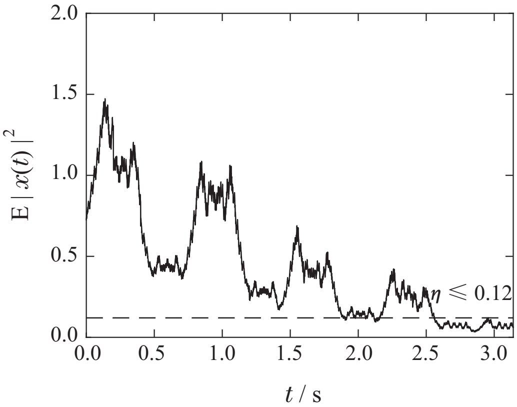

图 2 例1系统均方状态轨迹

Fig. 2 The mean square state trajectory of Example 1

注 6 由文献[9–10, 27]的数值例子可见, 如何构造辅助函数是解决这类问题的关键. 相较于文献[27]例1中直接令其为$H(t) = 1$, 本文例1中先假设出$\varGamma(t)$的最大值求解出式(31)的下确界, 再通过Itô公式以及不等式的放缩估算$\varGamma(t)$. 此方法虽有改进但同样存在一定保守性.

例 2 考虑如下一个具有反镇定型脉冲的随机时滞系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = -1.75x(t-\tau(t))\dfrac{1}{1+x(t)}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-t}x(t-\\ \qquad \tau(t))\mathrm{d}w(t),\ t \neq t_k,\ t \geqslant t_0,\\ x(t_k) = 1.1x(t_k^-), \quad t = t_k, k = 1, 2, \cdots,\\ x(t) = 3.5, \qquad\qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \end{cases} \tag{32}$$

其中$\tau(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. 脉冲信号$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$满足式(30). 令$T_\mathrm{a} = \epsilon = 0.5$, 即$t_k - t_{k-1} = 0.5$. 取$V(t, x) = x^2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, 且显然$\beta = 1.21$. 通过定理1以及仿照例1的证明可以得出$\mathrm{E}|x(t)|^2 < 14, t \in [0, 3]$. 再根据有限时间渐近稳定的条件得到当$\sigma = 1.5$时, 即$t \in [1.5, 3]$, $\mathrm{E}|x(t)|^2 < 6$. 系统在$t \in [0, 3]$内的均方状态轨迹如图3所示. 图4是$t \in [0, 10]$内系统的均方状态轨迹表明系统(32)是有限时间稳定以及有限时间渐近稳定的, 但不满足Lyapunov稳定.

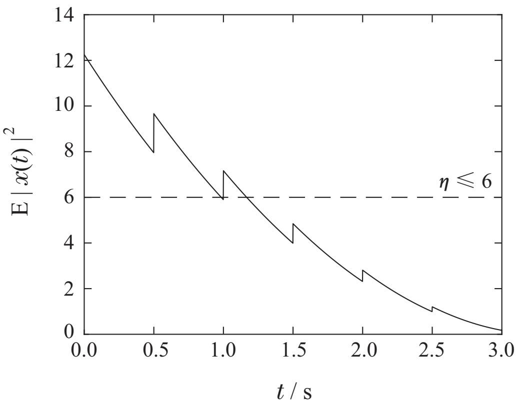

图 3 例2系统$t \in [0, 3]$均方状态轨迹

Fig. 3 The mean square state trajectory on $t \in [0, 3]$ of Example 2

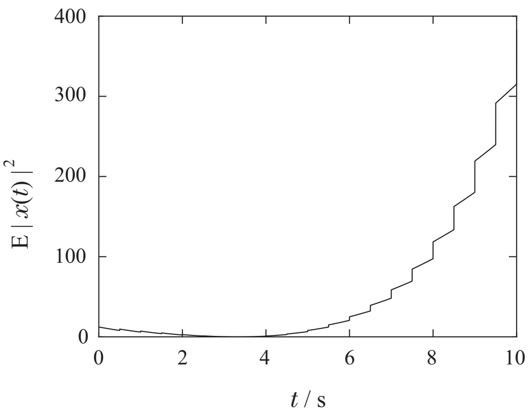

图 4 例2系统$t \in [0, 10]$均方状态轨迹

Fig. 4 The mean square state trajectory on $t \in [0, 10]$ of Example 2

5 结论

本文研究了脉冲随机泛函微分系统的p阶矩有限时间稳定以及有限时间渐近稳定的相关准则. 本文的重点是对时滞项的处理, 即利用Razumikhin型条件, 引入辅助函数来处理时滞的影响. 通过脉冲控制和平

均停留时间方法得到该系统稳定性的充分条件, 并通过数值例子证明了结论的有效性. 由于本文研究的系统时滞是有界的. 因此接下来的研究方向可以是讨论具有无穷时滞的脉冲随机泛函微分系统的有限时间稳定及其渐近稳定问题. 另一方面, 本文研究的是非线性系统的稳定性, 对于研究结果也可以应用于线性系统.

参考文献:

[1] MAO X R. *Stochastic Differential Equations and Applications*. Chichester: Horwood, 1997.

[2] MCHIRI L, BEN M A, BALEANU D, et al. Finite-time stability of linear stochastic fractional-order systems with time delay. *Advances in Difference Equations*, 2021, 2021(1): 345.

[3] YOU S R, HU L J, LU J Q, et al. Stabilization in distribution by delay feedback control for hybrid stochastic differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 67(2): 971 – 977.

[4] MIN H F, XU S Y, ZHANG B Y, et al. Output-feedback control for stochastic nonlinear systems subject to input saturation and time-varying delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(1): 359 – 364.

[5] NGOC P. New criteria for mean square exponential stability of stochastic delay differential equations. *International Journal of Control*, 2021, 94(12): 3474 – 3482.

[6] CHEN W H, ZHENG W X. Global exponential stability of impulsive neural networks with variable delay: An LMI approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2008, 56(6): 1248 – 1259.

[7] CHEN P, DENG F Q, YAO F Q. Exponential stability analysis of impulsive stochastic functional differential systems with delayed impulses. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 19(6): 2104 – 2114.

[8] DING J, WANG L L. Stability of impulsive stochastic functional differential systems with delayed impulses volume. *Mathematica Applicata*, 2015, 28(3): 507 – 516.

[9] HU W, ZHU Q, KARIMI H R. Some improved Razumikhin stability criteria for impulsive stochastic delay differential systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(12): 5207 – 5213.

[10] HU W, ZHU Q X. Stability analysis of impulsive stochastic delayed differential systems with unbounded delays. *Systems Control Letters*, 2020, 136: 104606.

[11] YAO F Q, CAO J D, LI Q, et al. Exponential stability analysis for stochastic delayed differential systems with impulsive effects: Average impulsive interval approach. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(1): 74 – 86.

[12] CAO W P, ZHU Q X. Razumikhin-type theorem for pth exponential stability of impulsive stochastic functional differential equations based on vector Lyapunov function. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2021, 39: 100983.

[13] YANG Z H, ZHU E W, XU Y, et al. Razumikhin-type theorems on exponential stability of stochastic functional differential equations with infinite delay. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2010, 111(2): 219 – 231.

[14] TANG Y, WU X, SHI P, et al. Input-to-state stability for nonlinear systems with stochastic impulses. *Automatica*, 2020, 113: 108766.

[15] LU J Q, DANIEL W, CAO J D. A unified synchronization criterion for impulsive dynamical networks. *Automatica*, 2010, 46(7): 1215 – 1221.

[16] LU Chengtian, YU Sheng, CHENG Pei. Finite-time stability of the impulsive stochastic neural networks with delay. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(1): 190 – 195.
(鲁成甜, 喻圣, 程培. 具有时滞的脉冲随机神经网络的有限时间稳定性. 控制理论与应用, 2020, 37(1): 190 – 195.)

[17] YAO Fengqi, ZHU Xingxing. Finite-time boundedness analysis and H_∞ control for a class of impulsive stochastic systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 291 – 298.
(姚凤麒, 朱行行. 一类脉冲随机系统的有限时间有界性分析与 H_∞控制. 控制理论与应用, 2018, 35(3): 291 – 298.)

[18] ZHU X X, YAO F Q. Finite-time stability and control of impulsive stochastic delayed systems based on average impulsive interval. *The 32nd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation*. Hefei, China: IEEE, 2017: 1140 – 1145.

[19] KAMENKOV G. On stability of motion over a finite interval of time. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics USSR*, 1953, 17(2): 529 – 540.

[20] DORATO P. Short-time stability in linear time-varying systems. *Polytechnic Institute of Brooklyn*. Athens: IEEE, 1961, 4: 83 – 87.

[21] YAN H C, TIAN Y X, LI H Y, et al. Input-output finite-time mean square stabilization of nonlinear semi-Markovian jump systems. *Automatica*, 2019, 104: 82 – 89.

[22] ZHOU B. Finite-time stability analysis and stabilization by bounded linear time-varying feedback. *Automatica*, 2020, 121: 109191.

[23] YU X, YIN J L, KHOO S. New Lyapunov conditions of stochastic finite-time stability and instability of nonlinear time-varying SDEs. *International Journal of Control*, 2021, 94(6): 1674 – 1681.

[24] WEISS L, INFANTE E. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, 12(1): 54 – 59.

[25] LI X D, YANG X Y, SONG S J. Lyapunov conditions for finite-time stability of time-varying time-delay systems. *Automatica*, 2019, 103: 135 – 140.

[26] LIU X Z, ZHANG K X. Synchronization of linear dynamical networks on time scales: Pinning control via delayed impulses. *Automatica*, 2016, 72: 147 – 152.

[27] ZHANG X Y, LI C D. Finite-time stability of nonlinear systems with state-dependent delayed impulses. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102(1): 197 – 210.

[28] LI Z, LI M, XU Y, et al. Finite-time stability and stabilization of semi-Markovian jump systems with time delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(6): 2064 – 2081.

作者简介:

王国庆 硕士研究生, 目前研究方向为随机脉冲系统的稳定与控制, E-mail: wangguoqing342601@163.com;

姚凤麒 博士, 副教授, 目前研究方向为随机混杂系统的稳定性与控制, E-mail: yaofengqi_ahut@163.com.