

# 非高斯环境下基于最大相关熵的平滑估计器设计

马海平<sup>1†</sup>, 刘婷<sup>1</sup>, 孙圣溢<sup>1</sup>, 费敏锐<sup>2</sup>

(1. 绍兴文理学院 电子工程系, 浙江 绍兴 312000; 2. 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200444)

**摘要:** 针对Kalman平滑估计器在非高斯噪声环境下性能衰退问题, 本文提出了一种基于最大相关熵准则作为最优估计标准的平滑估计方法, 将其应用于固定滞后问题的状态估计, 称之为固定滞后最大相关熵平滑估计器 (FLMCS)。首先, 使用矩阵变换, 给出最大相关熵Kalman滤波器的另一种形式; 然后, 以此为基础, 通过引入新的状态变量来增广系统, 并推导出所提平滑估计器的在线迭代方程; 进一步比较平滑前后状态估计误差协方差, 从理论上分析算法性能改进效果; 最后, 通过算例仿真验证所提平滑估计器在非高斯噪声干扰下的有效性和优越性。

**关键词:** 平滑估计; Kalman滤波; 最大相关熵准则; 固定滞后; 非高斯环境

**引用格式:** 马海平, 刘婷, 孙圣溢, 等. 非高斯环境下基于最大相关熵的平滑估计器设计. 控制理论与应用, 2024, 41(5): 941–949

DOI: 10.7641/CTA.2023.20437

## Smoothing estimator based on maximum correntropy in non-Gaussian environment

MA Hai-ping<sup>1†</sup>, LIU Ting<sup>1</sup>, SUN Sheng-yi<sup>1</sup>, FEI Min-rui<sup>2</sup>

(1. Department of Electrical Engineering, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang 312000, China;  
2. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract:** In order to overcome the performance degradation of Kalman smoothing estimator in non-Gaussian environment, this paper proposes a smoothing estimation method based on the maximum correntropy criterion as the optimal standard, for state estimation of fixed-lag problem, which is called fixed-lag maximum correntropy smoothing estimator (FLMCS). First, another form of maximum correntropy Kalman filter is given based on the matrix transform. Then, new state variables are introduced, and online iterative equations of the proposed FLMCS are derived through an augmented system. Furthermore, state estimation error covariances are compared before and after smoothing, and performance improvement of the proposed FLMCS is analyzed theoretically. Finally, the illustrative examples are presented to verify the effectiveness and superiority of the proposed FLMCS in non-Gaussian noise environment.

**Key words:** smoothing estimation; Kalman filter; maximum correntropy criterion; fixed-lag; non-Gaussian environment

**Citation:** MA Haiping, LIU Ting, SUN Shengyi, et al. Smoothing estimator based on maximum correntropy in non-Gaussian environment. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(5): 941–949

## 1 引言

最优估计理论与方法在过去几十年里取得了很重要的成果<sup>[1–3]</sup>, 其相关研究也是该领域经久不衰的热点课题, 根据用途不同, 估计方法分为滤波、预测和平滑3大类<sup>[4]</sup>. 特别是滤波被广为关注, 常见的滤波器包括卡尔曼滤波(Kalman filter, KF)<sup>[5]</sup>、无迹卡尔曼滤波(unscented KF, UKF)<sup>[6]</sup>等, 这些滤波器的设计总是将量测噪声理想化为模型准确已知的高斯白噪声。然

而, 在实际工程中, 还存在着大量非高斯白噪声的估计问题, 这将导致经典滤波器的性能大大降低, 为此, 也提出了很多其它最优滤波器, 包括粒子滤波(particle filter, PF)<sup>[7]</sup>、 $H_\infty$ 滤波<sup>[8]</sup>等, 均取得了较好的效果。近年来, 有关学者提出了一种基于最大相关熵准则(maximum correntropy criterion, MCC)<sup>[9–10]</sup>的最优滤波器, 其核心思想是充分利用量测值的高阶信息, 在KF迭代过程中引入MCC构造核函数, 作为最优估计

收稿日期: 2022–05–25; 录用日期: 2023–03–31.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: Mahp@usx.edu.cn; Tel.: +86 575-88345673.

本文责任编辑: 刘淑君.

国家自然科学基金项目(61640316), 浙江省自然科学基金项目(LY19F030011)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61640316) and the Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (LY19F030011).

的目标函数,通过重新求解其增益矩阵来处理非高斯噪声,称之为最大相关熵 Kalman 滤波器(maximum correntropy KF, MCKF)<sup>[11]</sup>. 与传统的KF相比, MCKF 结合了最大相关熵方法的优点,在非高斯噪声特别是脉冲噪声或者较大异常值环境下,能得到更好的收敛性和更高的精度.

相比于滤波器的设计与应用,平滑估计器的研究成果就相对较少,但事实上平滑估计器作为最优估计方法的一部分,在机器视觉、航空航天等领域有着与滤波器相同的作用,可以提高最优估计的性能,同样是一个值得深入研究的方向.与大多数滤波器一样,现有平滑估计器的设计主要是以高斯噪声环境为背景,对于非高斯噪声情况的研究不多.同时, MCKF 尽管有了很好的扩展和应用<sup>[12-13]</sup>,包括扩展 MCKF<sup>[14]</sup>、分布式 MCKF<sup>[15]</sup>、序贯 MCKF<sup>[16]</sup>、约束 MCKF<sup>[17]</sup>等,但是其在平滑估计器设计上还未涉及.因此,本文将 MCKF 为基础,首次将其推广到固定滞后平滑估计器的设计中,得到适应于非高斯环境的固定滞后最大相关熵平滑估计器(fixed-lag maximum correntropy smoother, FLMCS),并从理论上分析其性能改进效果和计算复杂度.最后,通过算例仿真验证所提出的 FLMCS 的有效性和优越性.

## 2 预备知识

### 2.1 固定滞后平滑估计器

考虑如下线性离散时间系统:

$$\begin{cases} x_k = F_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1}, \\ y_k = H_k x_k + v_k, \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $x_k \in \mathbb{R}^n$  和  $y_k \in \mathbb{R}^m$  分别为系统在  $k$  时刻  $n$  维状态向量和  $m$  维量测向量;  $F_{k-1}$  和  $H_k$  分别为已知的系统状态转移矩阵和量测矩阵;  $w_{k-1}$  和  $v_k$  分别为相互独立且均值为零的过程噪声和量测噪声,其协方差矩阵分别为  $Q_{k-1} = E[w_{k-1} w_{k-1}^T]$  和  $R_k = E[v_k v_k^T]$ , 其中  $E[\cdot]$  表示数学期望运算.

假定直到  $k$  时刻所有的量测信息是  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ , 基于该量测信息对  $x_k$  的估计问题,称为状态滤波;对  $x_{k+j}$ ,  $j > 0$  的估计问题,称为状态预测;对  $x_{k-j}$ ,  $j > 0$  的估计问题,称为状态平滑.

本文主要是设计固定滞后最大相关熵平滑估计器,来解决非高斯环境下的状态平滑问题,其目的是利用  $k$  时刻及之前所有的量测信息来获得  $k-N$  时刻的状态估计  $\hat{x}_{k-N,k}$ , 其中  $N$  为固定滞后步数,即当新的量测值获得时,  $k$  值增加,但是其滞后时间  $N$  是固定的.图1为两步滞后平滑估计器的示意图,其中:  $x_{j-3}$  利用量测值  $y_{j-1}$ , 得到估计值  $\hat{x}_{j-3,j-1}$ ;  $x_{j-2}$  利用量测值  $y_j$ , 得到估计值  $\hat{x}_{j-2,j}$ .

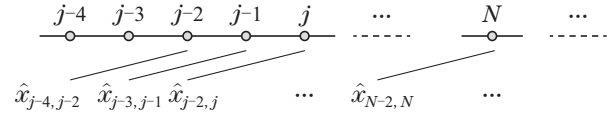


图1 固定滞后平滑估计器示意图

Fig. 1 Fixed-lag smoothing estimator

### 2.2 最大相关熵 Kalman 滤波器

对于式(1)所描述的系统,由文献[11,18]可知,其标准 MCKF 的递推表达式如下:

先验估计为

$$\begin{cases} \hat{x}_k^- = F_{k-1} \hat{x}_{k-1}^+, \\ P_k^- = F_{k-1} P_{k-1}^+ F_{k-1}^T + Q_{k-1}. \end{cases} \quad (2)$$

后验估计为

$$\begin{cases} \hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-), \\ K_k = ((P_k^-)^{-1} + H_k^T C_k R_k^{-1} H_k)^{-1} H_k^T C_k R_k^{-1}, \\ C_k = \text{diag}\{G_\sigma(\|y_{k1} - H_{k1} \hat{x}_k^- \|_{R_{k1}^{-1}}), \dots, \\ G_\sigma(\|y_{km} - H_{km} \hat{x}_k^- \|_{R_{km}^{-1}})\}, \\ P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k (K_k)^T, \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $\hat{x}_k^- \in \mathbb{R}^n$  和  $\hat{x}_k^+ \in \mathbb{R}^n$  分别为状态向量在  $k$  时刻的先验估计和后验估计;  $P_k^-$  和  $P_k^+$  分别为对应的先验估计误差协方差矩阵和后验估计误差协方差矩阵;  $K_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  为 MCKF 增益矩阵;  $C_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$  为最大相关熵增益矩阵;  $G_\sigma(\|\cdot\|) = \exp(-\|\cdot\|_A^2 / 2\sigma^2)$ , 其中:  $\|\cdot\|_A$  表示  $A$  加权二范数;  $\sigma$  为用户定义的核函数带宽;  $H_{kj}$  为矩阵  $H_k$  的第  $j$  行;  $R_{kjj}$  为对角矩阵  $R_k$  的第  $j$  个元素. MCKF 的优点在于当量测值被脉冲噪声或较大异常值干扰时,并不影响其估计和收敛性能.

### 3 最大相关熵平滑估计器

本节首先推导 MCKF 的另一种表达形式,然后,以此为基础,推导本文所提出的 FLMCS 平滑估计器,最后,分析其性能改进和计算复杂度.

#### 3.1 MCKF 的另一种形式

**引理 1** 矩阵逆运算满足<sup>[8]</sup>

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \quad (4)$$

在第1.2小节基础上,重新定义 MCKF 增益矩阵  $L_k$  为

$$\begin{aligned} L_k &= F_k K_k = \\ &F_k ((P_k^-)^{-1} + H_k^T C_k R_k^{-1} H_k)^{-1} H_k^T C_k R_k^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

使用引理1,并令

$$(P_k^-)^{-1} \rightarrow A, \quad H_k^T C_k \rightarrow B, \quad R_k^{-1} \rightarrow C, \quad H_k \rightarrow D. \quad (6)$$

则式(5)能够重新表示为

$$L_k = F_k(P_k^- H_k^T C_k R_k^{-1} - P_k^- H_k^T C_k \times (R_k + H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1} H_k P_k^-) H_k^T C_k R_k^{-1}, \quad (7)$$

使用引理1反操作, 并令

$$R_k \rightarrow A, R_k \rightarrow B, R_k^{-1} \rightarrow C, H_k P_k^- H_k^T C_k \rightarrow D, \quad (8)$$

则式(7)能够简化为

$$L_k = F_k(P_k^- H_k^T C_k R_k^{-1} - P_k^- H_k^T C_k \times (R_k + H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1} H_k P_k^- H_k^T C_k R_k^{-1}) = F_k P_k^- H_k^T C_k (R_k^{-1} - (R_k + H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1} \times H_k P_k^- H_k^T C_k R_k^{-1}) = F_k P_k^- H_k^T C_k (R_k + H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1}. \quad (9)$$

将式(3)中的第1项 $\hat{x}_k^+$ 代入式(2)中的第1项 $\hat{x}_{k+1}^-$ , 得到

$$\hat{x}_{k+1}^- = F_k \hat{x}_k^+ + F_k K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^+) = F_k \hat{x}_k^+ + L_k (y_k - H_k \hat{x}_k^+), \quad (10)$$

进一步将式(3)中的第2项 $K_k$ 代入第4项 $P_k^+$ , 使用引理1合并同类项, 得到

$$P_k^+ = P_k^- - P_k^- H_k^T (R_k + H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1} C_k H_k P_k^-. \quad (11)$$

将式(11)代入到式(2)中的第2项 $P_{k+1}^-$ , 得到

$$P_{k+1}^- = F_k P_k^- (F_k - L_k H_k)^T + Q_k. \quad (12)$$

结合式(7)(9)-(10)(12), 得到MCKF的另一种表达式, 概括为

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1}^- = F_k \hat{x}_k^+ + L_k (y_k - H_k \hat{x}_k^+), \\ L_k = F_k (P_k^- - P_k^- H_k^T C_k (R_k + H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1} \times H_k P_k^-) H_k^T C_k R_k^{-1} = F_k P_k^- H_k^T C_k (R_k + H_k P_k^- H_k^T C_k)^{-1}, \\ C_k = \text{diag}\{G_\sigma(\|y_{k1} - H_{k1} \hat{x}_k^+\|_{R_{k11}^{-1}}), \dots, G_\sigma(\|y_{km} - H_{km} \hat{x}_k^+\|_{R_{kmm}^{-1}})\}, \\ P_{k+1}^- = F_k P_k^- (F_k - L_k H_k)^T + Q_k. \end{cases} \quad (13)$$

**注 1** 对于上面推导得到的另一种MCKF形式, 虽然只是给出了先验状态估计和先验误差协方差, 但本质上与标准MCKF一样, 能够通过变换获得所有的状态估计和误差协方差.

### 3.2 FLMCS的推导

对于 $N$ 步滞后的平滑估计问题, FLMCS的状态估计 $\hat{x}_{k-N,k}$ ,  $k = N, N+1, \dots$ 和对应的估计误差协方差 $\Pi_{k-N}$ 为

$$\begin{cases} \hat{x}_{k-N,k} = E[x_{k-N} | y_1, \dots, y_k], \\ \Pi_{k-N} = E[(x_{k-N} - \hat{x}_{k-N,k})(x_{k-N} - \hat{x}_{k-N,k})^T]. \end{cases} \quad (14)$$

**定义 1** 设置新的状态 $x_{k,m}$ , 令其满足下列状态传递方程 $x_{k,m} = x_{k-m}$ , 即有

$$\begin{cases} x_{k+1,1} = x_k, \\ x_{k+1,2} = x_{k-1} = x_{k,1}, \\ x_{k+1,3} = x_{k-2} = x_{k,2}. \end{cases} \quad (15)$$

接下去, 对于 $k \geq N$ , 可以将式(15)扩充到式(1)中, 得到系统的增广方程为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1,1} \\ \vdots \\ x_{k+1,N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} w_k, \\ y_k = [H_k \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,N+1} \end{bmatrix} + v_k, \end{cases} \quad (16)$$

结合定义1和2, 得到增广系统的状态估计为

$$\begin{cases} E(x_{k+1} | y_1, \dots, y_k) = \hat{x}_{k+1}^- = \hat{x}_{k+1,k}, \\ E(x_{k+1,1} | y_1, \dots, y_k) = E(x_k | y_1, \dots, y_k) = \hat{x}_k^+ = \hat{x}_{k,k}, \\ E(x_{k+1,2} | y_1, \dots, y_k) = E(x_{k-1} | y_1, \dots, y_k) = \hat{x}_{k-1,k}, \\ \vdots \\ E(x_{k+1,N+1} | y_1, \dots, y_k) = \hat{x}_{k-N,k}, \end{cases} \quad (17)$$

从式(17)可以看到, 当用第2.1小节推导得到的MCKF, 来估计增广系统的状态时,  $x_{k+1,N+1}$ 的估计 $\hat{x}_{k-N,k}$ 代表 $k$ 时刻对 $N$ 步滞后状态 $x_{k-N}$ 的平滑值, 这类通过MCKF对 $N$ 步滞后状态的估计, 称之为最大相关熵固定滞后平滑估计.

由上述平滑估计的定义可知, 式(16)中增广系统的状态转移矩阵和量测矩阵即为FLMCS平滑估计器的状态转移矩阵和量测矩阵, 因此, 根据式(13)中的第1项, FLMCS的状态估计更新方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1}^- \\ \hat{x}_{k,k} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-N,k} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_k & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \\ \hat{x}_{k-1,k-1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-(N+1),k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{k,0} \\ L_{k,1} \\ \vdots \\ L_{k,N+1} \end{bmatrix} (y_k - [H_k \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \\ \hat{x}_{k-1,k-1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-(N+1),k-1} \end{bmatrix}), \quad (18)$$

式中:  $L_{k,0}$ 为式(13)中的MCKF增益矩阵;  $L_{k,i}, i > 0$ 为待定的FLMCS增益矩阵, 统一表示为

$$L_k = [L_{k,0} \ L_{k,1} \ \cdots \ L_{k,N+1}]^T, \quad (19)$$

根据式(13)中的第2项,  $L_k$ 具体表示为

$$L_k = \begin{bmatrix} F_k(P_k^{(0,0)} - P_k^{(0,0)} H_k^T C_k \Lambda_k H_k P_k^{(0,0)}) H_k^T \\ (P_k^{(0,0)} - P_k^{(0,0)} H_k^T C_k \Lambda_k H_k P_k^{(0,0)}) H_k^T \\ \vdots \\ (P_k^{(0,N)} - P_k^{(0,N)} H_k^T C_k \Lambda_k H_k P_k^{(0,0)}) H_k^T \end{bmatrix} C_k R_k^{-1}, \quad (20)$$

式中:  $\Lambda_k = (R_k + H_k P_k^{(0,0)} H_k^T C_k)^{-1}$ , 估计误差协方差矩阵  $P_k^{(i,j)}$  定义为

$$P_k^{(i,j)} = E[(x_{k-j} - \hat{x}_{k-j,k-1}) (x_{k-i} - \hat{x}_{k-i,k-1})^T]. \quad (21)$$

其具体推导见附录A.

进一步, 根据式(13)中的第4项, 得到FLMCS估计误差协方差的更新方程为

$$\begin{bmatrix} P_{k+1}^{(0,0)} & \cdots & (P_{k+1}^{(0,N+1)})^T \\ \vdots & & \vdots \\ P_{k+1}^{(0,N+1)} & \cdots & P_{k+1}^{(N+1,N+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k^{(0,0)} & \cdots & (P_k^{(0,N+1)})^T \\ \vdots & & \vdots \\ P_k^{(0,N+1)} & \cdots & P_k^{(N+1,N+1)} \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} F_k^T & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & I & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (L_k)^T \right) + \begin{bmatrix} Q_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

将式(20)代入到上式并展开, 得到FLMCS估计误差协方差矩阵  $\tilde{P}_k$  的第1列为

$$\begin{cases} P_{k+1}^{(0,0)} = F_k P_k^{(0,0)} (F_k - L_{k,0} H_k)^T + Q_k, \\ P_{k+1}^{(0,1)} = P_k^{(0,0)} (F_k - L_{k,0} H_k)^T, \\ \vdots \\ P_{k+1}^{(0,N+1)} = P_k^{(0,N)} (F_k - L_{k,0} H_k)^T, \end{cases} \quad (23)$$

以及估计误差协方差矩阵  $\tilde{P}_k$  的对角元素为

$$\begin{cases} P_{k+1}^{(1,1)} = P_k^{(0,0)} (I - L_{k,1} H_k)^T, \\ P_{k+1}^{(2,2)} = P_k^{(1,1)} - P_k^{(0,1)} H_k^T (L_{k,2})^T, \\ \vdots \\ P_{k+1}^{(N+1,N+1)} = P_k^{(N,N)} - P_k^{(0,N)} H_k^T (L_{k,N+1})^T. \end{cases} \quad (24)$$

综上, 式(16)–(24)给出了  $N$  步滞后FLMCS平滑估计器推导过程, 概括如表1所示.

表1 固定滞后最大相关熵平滑估计器

Table 1 Fixed-lag maximum correntropy smoother

1 初始化参数:
$\hat{x}_0^- = E[x_0], P_0^- = E[(x_0 - \hat{x}_0^-)(x_0 - \hat{x}_0^-)^T];$
2 运行式(13)所描述的MCKF, 得到 $\hat{x}_{k+1}^-, L_k, C_k$ 和 $P_k^-;$
3 令 $\hat{x}_{k+1,k} = \hat{x}_{k+1}^-, L_{k,0} = L_k, P_k^{(0,0)} = P_k^-;$
4 对于 $i = 1, \dots, N + 1$ , 执行如下操作得到平滑估计状态和对应的估计误差协方差:
$C_k = \text{diag}\{G_\sigma(\ y_{k1} - H_{k1} \hat{x}_k^-\ _{R_{k11}^{-1}}), \dots, G_\sigma(\ y_{km} - H_{km} \hat{x}_k^-\ _{R_{kmm}^{-1}})\};$
$L_{k,i} = (P_k^{(0,i-1)} - P_k^{(0,i-1)} H_k^T C_k (R_k + H_k P_k^{(0,0)} H_k^T C_k)^{-1} H_k P_k^{(0,0)}) H_k^T C_k R_k^{-1},$
$P_{k+1}^{(i,i)} = P_k^{(i-1,i-1)} - P_k^{(0,i-1)} H_k^T (L_{k,N+1})^T,$
$P_{k+1}^{(0,i)} = P_k^{(0,i-1)} (F_k - L_{k,0} H_k)^T,$
$\hat{x}_{k+1-i,k} = \hat{x}_{k+2-i,k} + L_{k,i} (y_k - H_k \hat{x}_k^-).$

**注2** 从表1的固定滞后最大相关熵平滑估计器可知, 当迭代结束时, 根据  $k$  时刻及之前的量测信息, 就能获得0到  $N$  步滞后的状态平滑值  $\hat{x}_{k,k}, \dots, \hat{x}_{k-N,k}$  和对应的估计误差协方差  $P_{k+1}^{(1,1)}, \dots, P_{k+1}^{(N+1,N+1)}$ .

### 3.3 FLMCS的性能分析

对于本文提出的FLMCS, 由表1相关熵增益矩阵  $C$  的表达式(25)可知, 核函数带宽  $\sigma$  是影响平滑估计器性能的关键参数. 这是因为  $G_\sigma(\|y_{kj} - H_{kj} \hat{x}_k^-\|_{R_{kjj}^{-1}}) = \exp(-\|y_{kj} - H_{kj} \hat{x}_k^-\|_{\frac{R_{kjj}}{2\sigma^2}})$  中, 当量测值  $y_{kj}$  被脉冲噪声或者较大异常值干扰时, 其新息  $r_{kj} = y_{kj} - H_{kj} \hat{x}_k^-$  增大, 如果此时  $\sigma$  值变小, 将加速  $G_\sigma(\|r_{kj}\|_{R_{kjj}^{-1}})$  快速趋向于0, 表示  $C$  的第  $j$  个元素趋向于0, 从而, 避免该脉冲噪声或较大异常值对FLMCS性能的影响. 因此, 相对来讲,  $\sigma$  值越小, FLMCS平滑估计器对非高斯噪声干扰系统的鲁棒性越好; 另一方面, 当  $\sigma$  值变大, FLMCS性能将更接近Kalman平滑估计器. 这是由于

存在以下定理.

**定理 1** 当相关熵增益矩阵  $C$  中核函数带宽  $\sigma \rightarrow \infty$ , 固定滞后最大相关熵平滑估计器将退化为固定滞后 Kalman 平滑估计器.

**证** 当  $\sigma \rightarrow \infty$ , 由  $C$  的表达式可知,  $C \rightarrow I$ , 将其代入到 FLMCS 平滑估计器迭代公式(26)–(29)中, 即可得到固定滞后 Kalman 平滑估计器. 证毕.

接下来, 讨论 FLMCS 对非高斯平滑估计问题所带来的性能改进. 本文采用估计误差协方差作为性能衡量指标, 由第 3.2 节可知,  $P_k^{(0,0)}$  和  $P_k^{(N+1,N+1)}$  分别为  $k$  时刻的估计误差协方差和  $N$  步滞后平滑估计误差协方差, 则其得到的性能改进可表示为

$$P_k^{(0,0)} - P_k^{(N+1,N+1)} = \sum_{i=1}^N P_k^{(0,N-i)} H_k^T (L_{k,N-i+1})^T + P_k^{(0,N)} H_k^T (L_{k,N+1})^T = \sum_{i=0}^N P_k^{(0,N-i)} H_k^T (L_{k,N-i+1})^T. \quad (30)$$

将式(20)中的  $L_{k,i}$  代入上式, 得到

$$P_k^{(0,0)} - P_k^{(N+1,N+1)} = \sum_{i=0}^N P_k^{(0,N-i)} H_k^T (C_k R_k^{-1} - C_k R_k^{-1} H_k P_k^{(0,0)} H_k^T \times (R_k + C_k H_k P_k^{(0,0)} H_k^T)^{-1} C_k) (P_k^{(0,N-i)} H_k^T)^T. \quad (31)$$

使用引理 1, 并令

$$\begin{cases} R_k C_k^{-1} \rightarrow A, & H_k P_k H_k^T \rightarrow B, \\ R_k^{-1} \rightarrow C, & R_k \rightarrow D, \end{cases} \quad (32)$$

则式(31)可以重新表示为

$$P_k^{(0,0)} - P_k^{(N+1,N+1)} = \sum_{i=0}^N P_k^{(0,N-i)} H_k^T (R_k C_k^{-1} + H_k P_k^{(0,0)} H_k^T)^{-1} \times (P_k^{(0,N-i)} H_k^T)^T. \quad (33)$$

特殊地, 对于时不变系统, 假定平滑估计器在  $k$  时刻已达到稳定, 则有

$$P_k^{(0,0)} = P_k^- = P, \quad P_k^{(0,N-i)} = P^{(0,N-i)}, \quad (34)$$

则式(33)可以简化为

$$P_k^{(0,0)} - P_k^{(N+1,N+1)} = \sum_{i=0}^N P^{(0,N-i)} H^T (R C^{-1} + H P H^T)^{-1} \times (P^{(0,N-i)} H^T)^T. \quad (35)$$

**注 3** 由式(35)可知, 等式右边部分为正定矩阵, 存在  $(P_k^{(0,0)} - P_k^{(N+1,N+1)}) > 0$ , 即  $P_k^{(0,0)} > P_k^{(N+1,N+1)}$ , 表示 FLMCS 平滑估计器的性能总是优于 MCKF. 进一步, 由正定

矩阵之和可知,  $N$  越大, 即平滑滞后步数越多, FLMCS 平滑估计器的性能改进越好.

**注 4** 由式(35)也可知, FLMCS 平滑估计器的性能改进与相关熵增益矩阵  $C$  有关, 由于其包含核函数带宽参数  $\sigma$ , 再次印证了  $\sigma$  是改变平滑估计器性能的关键因子, 进一步, 当  $C = I$  时, 所获得的性能改进等同于固定滞后 Kalman 平滑估计器.

### 3.4 FLMCS 的计算复杂度分析

接下去, 文章分析  $N$  步滞后 FLMCS 平滑估计器的计算复杂度. 根据表 1, 本文所提出的 FLMCS 平滑估计器及比较算法中每个基本表达式的计算复杂度如表 2 所示, 表中 (13- $x$ ) 表示式(13)的第  $x$  项.

表 2 FLMCS 平滑估计器的计算复杂度  
Table 2 Computational complexities of the proposed FLMCS

方程	矩阵运算		
	加法、减法和乘法	除法、求逆和分解	
MCKF	13-1	$2n^2 + 4nm - n$	0
	13-2	$2n^3 + 2m^3 + 4n^2m + 6m^2n - n^2 - m^2 - 4nm$	$O(m^3)$
	13-3	$2nm + m$	$m$
	13-4	$4n^3 + 2n^2m - 2n^2$	0
FLMCS	25	$2nm + m$	$m$
	26	$4m^3 + 10n^2m + 8m^2n - 2m^2 - 7nm$	$O(m^3)$
	27	$4n^2m - nm$	0
	28	$2n^3 + 2n^2m - n^2$	0
	29	$4nm$	0
KS	26	$4n^2m + 4m^2n - 3nm$	$O(m^3)$
	27	$4n^2m - nm$	0
	28	$2n^3 + 2n^2m - n^2$	0
	29	$4nm$	0

根据表 2 可以分别得到最大相关熵 Kalman 滤波器 (MCKF)、FLMCS 平滑估计器和 Kalman 平滑估计器 (Kalman smoother, KS) 的总体计算复杂度. 其中, 第 2.1 节所述另一种形式 MCKF 只涉及式(13-1)到(13-4). 因此, 其总体计算复杂度为

$$S_{MCKF} = 6n^3 + 2m^3 + 6n^2m - n^2 + 6m^2n - m^2 + 2nm - n + 2m + O(m^3). \quad (36)$$

本文所提 FLMCS 平滑估计器是在 MCKF 基础上增加了平滑估计操作, 由于存在  $N$  步滞后, 需对式(25)–(29)执行  $N$  次, 因此, 其计算复杂度高于 MCKF 的计算复杂度, 总体为

$$\begin{aligned}
 S_{\text{FLMCS}} = & (2N + 6)n^3 + (4N + 2)m^3 + \\
 & (16N + 6)n^2m - (N + 1)n^2 + \\
 & (8N + 6)m^2n - (2N + 1)m^2 - \\
 & (2N - 2)nm - n + (2N + 2)m + \\
 & (N + 1)O(m^3). \tag{37}
 \end{aligned}$$

Kalman平滑估计器是FLMCS平滑估计器在 $C = I$ 时的特殊形式,其平滑估计的计算复杂度略有不同,总体为

$$\begin{aligned}
 S_{\text{KS}} = & (2N + 6)n^3 + 2m^3 + (10N + 6)n^2m - \\
 & (N + 1)n^2 + (4N + 6)m^2n - m^2 + \\
 & 2nm - n + 2m + (N + 1)O(m^3). \tag{38}
 \end{aligned}$$

### 4 算例仿真

本节通过两个仿真例子对本文提出的FLMCS平滑估计器的有效性和优越性进行验证.

#### 4.1 例子1

考虑如下线性系统<sup>[11]</sup>:

$$\begin{cases} x_k = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} x_{k-1} + w_{k-1}, \\ y_k = [1 \ 1]x_k + v_k, \end{cases} \tag{39}$$

式中 $\theta = \frac{\pi}{18}$ .过程噪声和量测噪声分别为高斯分布和脉冲非高斯分布,服从

$$\begin{aligned}
 w_{k-1} & \sim N(0, 0.01), \\
 v_k & \sim N(0, 0.01) + \text{outliers}(N, t),
 \end{aligned}$$

其中 $\text{outliers}(N, t)$ 表示在 $t$ 时刻产生服从脉冲分布 $N(1, 100)$ 的散粒噪声,这里 $t$ 取值 $50 \times \text{rand}(1, 10)$ ,即在时刻 $[0, 50]$ 内随机产生10个较大异常值,且系统和估计器的初始状态设置为

$$x_0 = \hat{x}_0^- = [0 \ 1]^T, P_0^- = \text{diag}\{1, 1\}.$$

另外,设置量测时刻为 $k = 100$ ,滞后步数为 $N = 50$ ,并独立运行100次重复实验.表3给出了本文提出的FLMCS平滑估计器、Kalman平滑估计器(KS)、最大相关熵Kalman滤波器(MCKF)和Kalman滤波器(KF)在平滑时刻所获得的估计均方误差(mean square error, MSE).从该表中可以看到FLMCS平滑估计器在核函数带宽 $\sigma = 0.5$ 时,其平滑性能最好,且在相同 $\sigma$ 值下,FLMCS平滑估计器的性能优于最大相关熵Kalman滤波器.进一步得到, $\sigma$ 值越小,FLMCS平滑估计器的性能越好,通过实验发现,当其小到一定值时,平滑性能基本保持不变.相反,当 $\sigma$ 值变大时,性能相对变差,且越来越接近Kalman平滑估计器,可以看出,实验结果与上节所证明的理论结果保持一致.

表3 不同平滑估计器在非高斯噪声下的MSE值

Table 3 MSEs for different smoothing estimators in non-Gaussian noise

平滑器	MSE		滤波器	MSE	
	$x(1)$	$x(2)$		$x(1)$	$x(2)$
KS	2.5310	2.7518	KF	2.8443	3.0562
FLMCS ( $\sigma = 0.1$ )	1.4804	1.5492	MCKF ( $\sigma = 0.1$ )	1.9782	2.1670
FLMCS ( $\sigma = 0.5$ )	1.4775	1.5427	MCKF ( $\sigma = 0.5$ )	1.8517	1.9139
FLMCS ( $\sigma = 1$ )	1.7158	1.8137	MCKF ( $\sigma = 1$ )	2.1289	2.2485
FLMCS ( $\sigma = 3$ )	2.1249	2.2238	MCKF ( $\sigma = 3$ )	2.5014	2.7128
FLMCS ( $\sigma = 5$ )	2.5035	2.7241	MCKF ( $\sigma = 5$ )	2.7956	2.9871
FLMCS ( $\sigma = 10$ )	2.5174	2.7335	MCKF ( $\sigma = 10$ )	2.8224	3.0132

图2给出了本文提出的FLMCS平滑估计器和Kalman平滑估计器在非高斯噪声下的估计误差协方差的迹.从图中可以看到平滑估计器的性能趋势:在一定 $\sigma$ 值范围内( $\sigma = 0.1$ 除外),在相同滞后步数 $N$ 值下,FLMCS平滑估计器的 $\sigma$ 值越小,性能越好;相反,其 $\sigma$ 值越大,越接近Kalman平滑估计器.进一步,在相同 $\sigma$ 值下,滞后步数 $N$ 值越大,意味着更多的量测值用于平滑估计,其性能越好,并趋于稳定,该结果也符合前面讨论的平滑估计本质.

表4给出了FLMCS平滑估计器所获得的性能改进(improvement percent, IP),其计算表达式为

$$\text{IP} = \frac{\text{Tr}(P_k^{(0,0)} - P_k^{(N+1, N+1)})}{\text{Tr}(P_k^{(0,0)})} \times 100\%, \tag{40}$$

式中 $\text{Tr}(\cdot)$ 为状态估计误差协方差的迹.从表中可以看到,与理论预计的结果一致,对于不同的核函数带宽 $\sigma$ ,所得到的性能改进有所不同, $\sigma$ 值越小,性能改进越显著.总体上讲,FLMCS平滑估计器在不同 $\sigma$ 值下所获得性能改进都要优于Kalman平滑估计器.另外,图3给出了FLMCS平滑估计器和Kalman平滑估计器的性能改进过程,进一步证实了上述结论.

#### 4.2 例子2

考虑基本的线性导航问题<sup>[18]</sup>,即

$$\begin{cases} x_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta t \sin \theta \\ \Delta t \cos \theta \end{bmatrix} u_{k-1} + w_{k-1}, \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k, \end{cases} \quad (41)$$

式中:  $\Delta t = 1$  s为离散化采样时间;  $\theta = \frac{\pi}{6}$ 为常数转角;  $u_k$ 为已知的加速度. 状态向量中的前两个元素表示车辆的坐标位置, 后两个元素表示对应的速度, 过程噪声和量测噪声均为带有脉冲函数的混合分布, 其服从

$$w_{k-1} \sim 0.9N(0, 0.01) + 0.1N(0, 1) + \text{outliers}(N, t),$$

$$v_k \sim 0.8N(0, 0.01) + 0.2N(0, 10) + \text{outliers}(N, t),$$

其中 $\text{outliers}(N, t)$ 取值与例1相同, 且系统和估计器的初始状态设置为

$$x_0 = \hat{x}_0^- = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, P_0^- = \text{diag}\{4, 4, 3, 3\}.$$

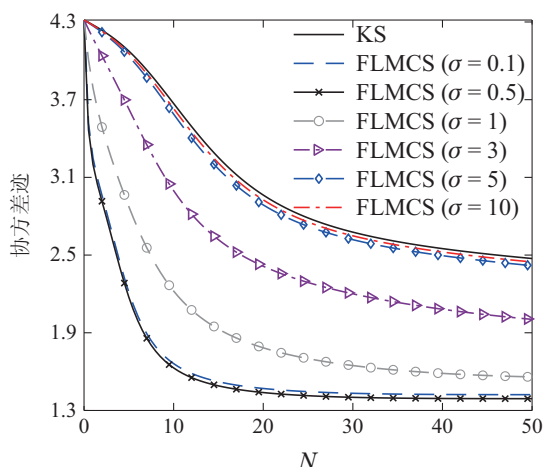


图2 FLMCS平滑估计器在不同 $\sigma$ 值下估计误差协方差的迹  
Fig. 2 The trace of the error covariance for the proposed FLMCS with different kernel bandwidth  $\sigma$

表4 FLMCS平滑估计器所获得的性能改进结果

Table 4 Performance improvement obtained by the proposed FLMCS

平滑器	IP/%
KS	61.12
FLMCS ( $\sigma = 0.1$ )	79.53
FLMCS ( $\sigma = 0.5$ )	80.10
FLMCS ( $\sigma = 1$ )	71.84
FLMCS ( $\sigma = 3$ )	65.79
FLMCS ( $\sigma = 5$ )	62.39
FLMCS ( $\sigma = 10$ )	62.02

同上一个实验, 设置量测时间为 $k = 100$ , 滞后步

数为 $N = 50$ , 并独立运行100次重复实验. 表5给出了本文提出的FLMCS与KS, MCKF和KF在平滑时刻所获得的MSE. 从该表中可以看到, 所获得的结论与上一个实验基本相同, FLMCS在核函数带宽 $\sigma = 0.5$ 时, 其平滑性能最好. 图4则给出了本文提出的FLMCS和KS在非高斯噪声下的估计误差协方差的迹.

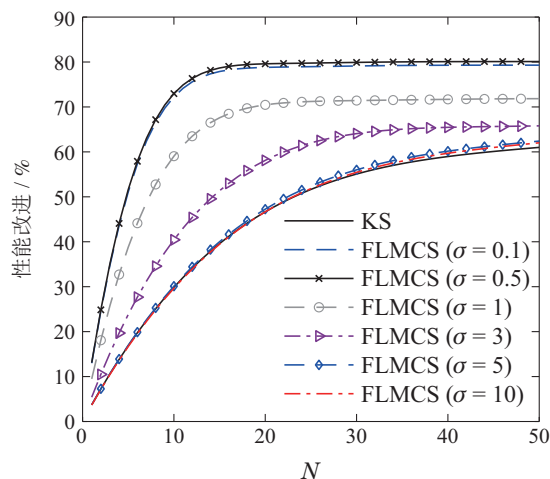


图3 FLMCS平滑估计器在不同 $\sigma$ 值下的性能改进  
Fig. 3 Performance improvement for the proposed FLMCS with different kernel bandwidth  $\sigma$

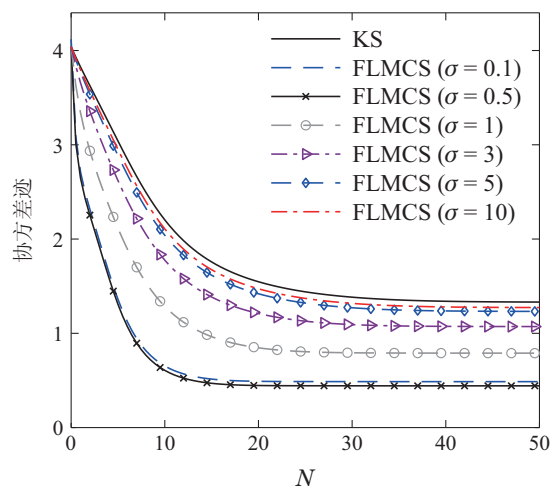


图4 FLMCS平滑估计器在不同 $\sigma$ 值下估计误差协方差的迹  
Fig. 4 The trace of the error covariance for the proposed FLMCS with different kernel bandwidth  $\sigma$

另外, 表6和图5给出了FLMCS平滑估计器在不同 $\sigma$ 值下所获得的性能改进, 与上一实验结果一致, 对于不同的核函数带宽 $\sigma$ , 所获得的性能改进有所不同, 在一定范围内( $\sigma = 0.1$ 除外),  $\sigma$ 值越小, 性能改进越显著, 这也与理论推导的结论基本一致.

### 5 结论

本文主要研究了非高斯噪声环境下的系统状态平滑估计, 提出了一种针对固定滞后问题的最大相关熵平滑估计器. 采用矩阵变换, 首先, 给出了最大相关熵

Kalman滤波的另一种表达形式. 然后, 通过状态扩展, 得到固定滞后平滑估计问题的增广系统, 并以新的最大相关熵Kalman滤波为基础, 推导出固定滞后最大相关熵平滑估计器的迭代方程. 进一步, 通过比较平滑前后状态估计误差协方差的表达式, 分析所提平滑估

计器的性能改进效果, 同时, 比较了其与其它算法的计算复杂度. 最后, 通过算例仿真表明, 在非高斯噪声干扰下, 与Kalman平滑器相比, 所提出的平滑估计器能够更好地抑制脉冲噪声的干扰, 对于在复杂环境下相关状态估计器的设计和应用具有现实指导意义.

表 5 不同平滑估计器在非高斯噪声下的MSE值

Table 5 MSEs for different smoothing estimators in non-Gaussian noise

平滑器	MSE				滤波器	MSE			
	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$		$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$
KS	1.3697	1.4415	0.7501	0.7825	KF	1.6975	1.7842	1.0228	1.0572
FLMCS ( $\sigma = 0.1$ )	0.3789	0.3517	0.1924	0.1416	MCKF ( $\sigma = 0.1$ )	0.8013	0.7518	0.4252	0.5064
FLMCS ( $\sigma = 0.5$ )	0.3702	0.3439	0.1813	0.1363	MCKF ( $\sigma = 0.5$ )	0.7553	0.6575	0.3539	0.3780
FLMCS ( $\sigma = 1$ )	0.5119	0.6776	0.2274	0.2019	MCKF ( $\sigma = 1$ )	0.8865	0.9426	0.5961	0.5553
FLMCS ( $\sigma = 3$ )	1.1458	1.2513	0.6318	0.6426	MCKF ( $\sigma = 3$ )	1.5346	1.6763	0.8867	0.8242
FLMCS ( $\sigma = 5$ )	1.3216	1.4224	0.7375	0.7732	MCKF ( $\sigma = 5$ )	1.6338	1.7174	1.0142	1.0438
FLMCS ( $\sigma = 10$ )	1.3610	1.4310	0.7424	0.7796	MCKF ( $\sigma = 10$ )	1.6913	1.7253	1.0216	1.0517

表 6 FLMCS平滑估计器所获得的性能改进结果

Table 6 Performance improvement obtained by the proposed FLMCS

平滑器	IP/%
KS	58.05
FLMCS ( $\sigma = 0.1$ )	75.87
FLMCS ( $\sigma = 0.5$ )	76.08
FLMCS ( $\sigma = 1$ )	68.64
FLMCS ( $\sigma = 3$ )	62.43
FLMCS ( $\sigma = 5$ )	58.22
FLMCS ( $\sigma = 10$ )	58.12

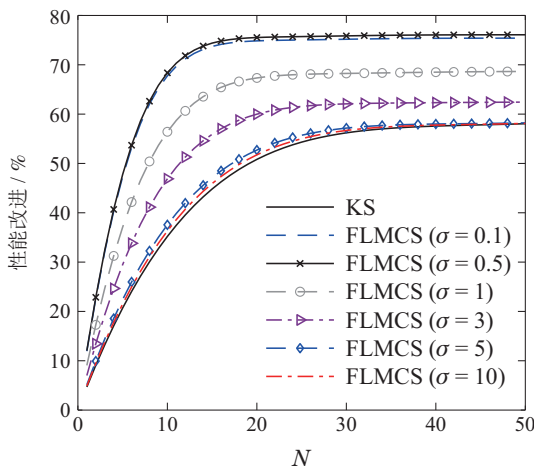


图 5 FLMCS平滑估计器在不同 $\sigma$ 值下的性能改进

Fig. 5 Performance improvement for the proposed FLMCS with different kernel bandwidth  $\sigma$

参考文献:

[1] DUAN Guangren. High-order system approaches II controllability

and full-actuation. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(8): 1571 – 1581. (段广仁. 高阶系统方法: II 能控性与全驱性. *自动化学报*, 2020, 46(8): 1571 – 1581.)

[2] LI Haifen, TAN Yonghong, DONG Ruili, et al. Modified Kalman filtering for Hammerstein systems with dynamic hysteresis. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(4): 767 – 775. (李海芬, 谭永红, 董瑞丽, 等. 动态迟滞Hammerstein系统的改进卡尔曼状态估计. *控制理论与应用*, 2020, 37(4): 767 – 775.)

[3] WANG Ziyun, ZHANG Shuai, ZHAN Yacong, et al. Orthotopic double filtering based state estimation algorithm. *Control and Decision*, 2022, 37(1): 127 – 134. (王子贇, 张帅, 占雅聪, 等. 基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法. *控制与决策*, 2022, 37(1): 127 – 134.)

[4] ZHANG Huanshui, CHAI Tianyou, HE Leliang. A unified algorithm to the optimal filtering, smoothing and prediction for the discrete stochastic linear system. *Control and Decision*, 1997, 12(1): 20 – 24. (张焕水, 柴天佑, 何乐亮. 离散随机线性系统最优滤波、预报和平滑估计的一种统一方法. *控制与决策*, 1997, 12(1): 20 – 24.)

[5] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 1960, 82(1): 35 – 45.

[6] WANG N, FORGER D. The level set Kalman filter for state estimation of continuous-discrete systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 631 – 642.

[7] FISCH A, ECKLEY I, FEAMLEAD P. Innovative and additive outlier robust Kalman filtering with a robust particle filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 47 – 56.

[8] SIMON D. *Optimal State Estimation: Kalman, H-Infinity, and Non-linear Approaches*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2006.

[9] PRINCIPE J C. *Information Theoretic Learning: Renyi's Entropy and Kernel Perspectives*. New York, USA: Springer, 2010.

[10] CHEN B, ZHU Y, HU J, et al. *System Parameter Identification: Information Criteria and Algorithms*. Beijing: Tsinghua Press, 2013.

[11] CHEN B, LIU X, ZHAO H, et al. Maximum correntropy Kalman filter. *Automatica*, 2017, 76: 70 – 77.

[12] FAN X, WANG G, WANG Y. Interacting multiple model based on maximum correntropy Kalman filter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, 2021, 68(8): 3017 – 3021.



- [13] WANG G, ZHANG Y, WANG X. Iterated maximum correntropy unscented Kalman filters for non-Gaussian systems. *Signal Processing*, 2019, 163: 87 – 94.
- [14] LIU X, REN Z, LYU H, et al. Linear and nonlinear regression-based maximum correntropy extended Kalman filtering. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 51(5): 3093 – 3102.
- [15] WANG G, XUE R, WANG J. A distributed maximum correntropy Kalman filter. *Signal Processing*, 2019, 160: 247 – 251.
- [16] KULIKOVA M V. Sequential maximum correntropy Kalman filtering. *Asian Journal of Control*, 2020, 22(1): 25 – 33.
- [17] LIU X, CHEN B, CAO J. Maximum correntropy Kalman filter with state constraints. *IEEE Access*, 2017, 5: 25846 – 25853.
- [18] FAKOORIAN S, MOHAMMADI A, AZIMI V, et al. Robust Kalman-type filter for non-Gaussian noise: Performance analysis with unknown noise covariances. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2019, 141(9): 091011.

## 附录

FLMCS平滑估计器增益矩阵 $L_k$ 的推导过程.

**证** 为得到式(20), 令 $A_k$ 为

$$A_k = (R_k + \tilde{H}_k \tilde{P}_k \tilde{H}_k^T C_k)^{-1} = (R_k + [H_k \ 0 \ \cdots \ 0] \times \begin{bmatrix} P_k^{(0,0)} & \cdots & (P_k^{(0,N+1)})^T \\ \vdots & & \vdots \\ P_k^{(0,N+1)} & \cdots & P_k^{(N+1,N+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} C_k)^{-1} = (R_k + H_k P_k^{(0,0)} H_k^T C_k)^{-1}, \quad (\text{A1})$$

因此, 对于增广系统(16), 式(13)中第2项 $L_k$ 能够重新表示为

$$L_k = \tilde{F}_k (\tilde{P}_k - \tilde{P}_k \tilde{H}_k^T C_k \Lambda_k \tilde{H}_k \tilde{P}_k) \tilde{H}_k^T C_k R_k^{-1}. \quad (\text{A2})$$

式(A1)–(A2)中,  $\tilde{F}_k$ ,  $\tilde{H}_k$ 和 $\tilde{P}_k$ 分别表示增广系统的状态转移矩阵、量测矩阵和估计误差协方差矩阵.

进一步令 $\Delta_k$ 为

$$\Delta_k = \tilde{P}_k - \tilde{P}_k \tilde{H}_k^T C_k \Lambda_k \tilde{H}_k \tilde{P}_k = \begin{bmatrix} P_k^{(0,0)} & \cdots & (P_k^{(0,N+1)})^T \\ \vdots & & \vdots \\ P_k^{(0,N+1)} & \cdots & P_k^{(N+1,N+1)} \end{bmatrix} -$$

$$\left( \begin{bmatrix} P_k^{(0,0)} & \cdots & (P_k^{(0,N+1)})^T \\ \vdots & & \vdots \\ P_k^{(0,N+1)} & \cdots & P_k^{(N+1,N+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \times C_k \Lambda_k [H_k \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} P_k^{(0,0)} & \cdots & (P_k^{(0,N+1)})^T \\ \vdots & & \vdots \\ P_k^{(0,N+1)} & \cdots & P_k^{(N+1,N+1)} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} W_{0,0} & \cdots & W_{0,N+1} \\ \vdots & & \vdots \\ W_{N+1,0} & \cdots & W_{N+1,N+1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A3})$$

其中:

$$W_{0,0} = P_k^{(0,0)} - P_k^{(0,0)} H_k^T C_k \Lambda_k H_k P_k^{(0,0)}, \\ W_{0,N+1} = (P_k^{(0,N+1)})^T - P_k^{(0,0)} H_k^T C_k \Lambda_k H_k (P_k^{(0,N+1)})^T, \\ W_{N+1,0} = P_k^{(0,N+1)} - P_k^{(0,N+1)} H_k^T C_k \Lambda_k H_k P_k^{(0,0)}, \\ W_{N+1,N+1} = P_k^{(N+1,N+1)} - P_k^{(0,N+1)} H_k^T C_k \Lambda_k H_k (P_k^{(0,N+1)})^T,$$

则式(A2)可以简化为

$$L_k = \tilde{F}_k \Delta_k \tilde{H}_k^T C_k R_k^{-1}, \quad (\text{A4})$$

将对应的矩阵代入式(A4)展开, 即可得到

$$L_k = \begin{bmatrix} F_k (P_k^{(0,0)} - P_k^{(0,0)} H_k^T C_k \Lambda_k H_k P_k^{(0,0)}) \\ (P_k^{(0,0)} - P_k^{(0,0)} H_k^T C_k \Lambda_k H_k P_k^{(0,0)}) \\ \vdots \\ (P_k^{(0,N)} - P_k^{(0,N)} H_k^T C_k \Lambda_k H_k P_k^{(0,0)}) \end{bmatrix} H_k^T C_k R_k^{-1}. \quad (\text{A5})$$

证毕.

## 作者简介:

**马海平** 博士, 教授, 从事智能信息处理与控制、智能优化算法与智能制造等研究, E-mail: mahp@usx.edu.cn;

**刘婷** 硕士研究生, 从事最优控制、信息安全研究, E-mail: tingliu010@163.com;

**孙圣溢** 硕士研究生, 从事信号处理与控制、网络安全研究, E-mail: 1592731541@qq.com;

**费敏锐** 博士, 教授, 从事网络控制、仪器仪表检测等研究, E-mail: mrfei@staff.shu.edu.cn.