

一种改进的三级倒立摆变论域模糊控制器设计

陈富国¹, 邓冠男², 谭彦华^{1,3}

(1. 大连理工大学 电子与信息工程学院, 辽宁 大连 116024;

2. 北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875; 3. 河北工业大学 理学院, 天津 300130)

摘要: 在传统变论域模糊控制系统中, 论域随着输入的变化实时改变, 论域的反复调整降低了控制的实时性, 同时伸缩因子的函数结构和参数也不易确定. 基于上述问题本文设计了基于改进型变论域算法的三级倒立摆模糊控制器: 首先提出了相对变论域控制思想, 然后采用模糊逻辑推理器构造了伸缩因子, 实时调整输入变量, 从而相对性地改变论域大小, 避免了传统伸缩因子的函数结构和参数不易确定的问题, 并根据系统闭环响应曲线设计了控制器输出调整因子. 最后采用极点配置方法对状态变量进行综合, 避免了规则爆炸问题. 三级倒立摆的仿真结果表明了该方法具有较好的控制效果.

关键词: 倒立摆系统; 变论域; 模糊控制; 伸缩因子; 极点配置

中图分类号: TP273.2 **文献标识码:** A

The design of improved variable universe fuzzy controller of triple inverted pendulum

CHEN Fu-guo¹, DENG Guan-nan², TAN Yan-hua^{1,3}

(1. School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;

2. School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

3. School of Sciences, Heibei University of Technology, Tianjin 300130, China)

Abstract: In traditional variable universe fuzzy control system, the universe changes with the values of input variables; this damages the response rapidity. What's more, it is difficulty to select the function models for the expansion-contraction factors and their parameters. To deal with the above problems, a fuzzy controller of triple inverted pendulum based on a new variable universe algorithm is designed. First, the idea of comparatively variable fuzzy control is presented. Second, the expansion-contraction factor is constructed based on the fuzzy logic inference rule list, and the output tuning factor is designed based on the closed-loop response curve. Finally, pole assignment method is employed to integrate the states into two variables to avoid the rules explosion problem. The simulation results show, compared with the traditional variable universe fuzzy control, the proposed controller improve the response speed and control precision of the inverted pendulum system.

Key words: inverted pendulum; variable universe; fuzzy control; expansion-contraction factor; pole assignment

1 引言(Introduction)

倒立摆系统的研究开始于19世纪50年代, 它是一个典型的非线性、高阶次、多变量、强耦合和绝对不稳定系统. 许多抽象的控制概念, 如系统的稳定性、可控性、系统的收敛速度和抗干扰能力都可以通过倒立摆直观地表现出来. 随着现代控制理论的发展, 倒立摆的研究对于火箭飞行控制和机器人控制等现代高科技的研究具有重要的实践意义. 目前比较常见的倒立摆稳定控制方法有线性控制, 如LQR, LQY等; 智能控制, 如变论域自适应模糊控制^[1,2], 遗传算法, 预测控制等.

模糊控制是近年来发展起来的一种智能控制技术, 在许多领域得到了成功应用, 由于模糊控制器本质上是一种插值器^[3], 因此传统的模糊控制只适合于粗糙的控制场合^[4], 对于高精度的控制问题, 传统模糊控制的效果并不理想. 要想取得较好的控制效果, 必须增加规则数目, 而这对于依赖专家知识的规则来讲是困难的. 李洪兴教授在文献[1]中首次提出了变论域模糊控制器的基本结构和一些相关算法. 所谓变论域模糊控制器, 就是选取合适的论域伸缩因子, 以论域之变应误差之变, 使得实际的控制规则大幅度减少. 实践证明, 这种控制器可以取得较高的

控制精度.但是论域的实时改变导致计算量增加,削弱了控制的实时性.伸缩因子对论域变化起着十分重要的作用,然而伸缩因子的函数结构的选择和参数确定依赖于经验^[5],目前没有统一的确定方法.本文提出了一种基于改进型变论域算法的模糊控制器设计方法,该方法首先提出相对变论域思想:选择合适的伸缩因子实时调整输入变量,从而相对性实时改变论域大小,避免传统变论域中论域反复重新调整对系统实时性实现能力的削弱;其次采用模糊逻辑推理器构造了伸缩因子,避免了传统伸缩因子函数模型和参数的不易确定的问题.直线三级倒立摆的仿真结果表明了文中方法具有较好的控制性能.

2 系统的数学模型(System mathematical model)

三级倒立摆主要由小车、摆1、摆2、摆3组成,它们之间自由链接.小车可以在水平导轨上左右平移,摆杆可以在铅垂平面内运动,将其置于坐标系后如图1所示.

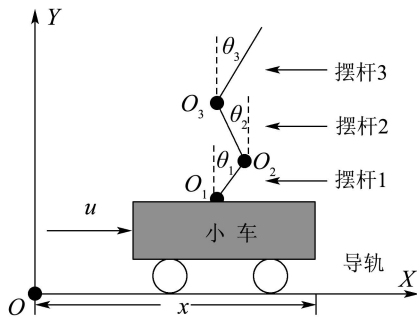


图1 三级倒立摆简化模型

Fig. 1 A simplified model of the triple inverted pendulum

规定顺时针方向的转角和力矩均为正.此外,约定以下记号: u 为外界作用力, x 为小车位移, $\theta_i (i = 1, 2, 3)$ 为摆 i 与铅垂线方向的夹角, O_i 分别为摆 i 的链接点位置, M_0 为小车的质量, M_i 为摆 i 的质量, J_i 为摆 i 绕其质心的转动惯量, l_i 为 O_i 到摆 i 的质心的距离, L_i 为摆 i 的长度, f_0 为小车与导轨间的滑动摩擦系数, f_i 为摆 i 绕 O_i 转动摩擦阻力矩系数.

表1 三级倒立摆系统实验参数

Table 1 Experimental parameters of system

参数	参数值	参数	参数值
M_0	1.32 kg	J_1	0.0022 kg·m ²
M_1	0.15 kg	J_2	0.0050 kg·m ²
M_2	0.22 kg	J_3	0.0032 kg·m ²
M_3	0.18 kg	f_0	22.9 N·S/m
l_1	0.20 m	f_1	0.0071 N·S/m
l_2	0.30 m	f_2	0.0026 N·S/m
l_3	0.24 m	f_3	0.0026 N·S/m

采用GLIP-2003型三级倒立摆系统,利用拉格朗日方程并带入参数得到系统的状态空间表达式为^[2,7]

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \\ Y(t) = CX(t) + Du(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:

$$X(t) = [x, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} O_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -4.675 & 0.561 & 0.296 \\ 0 & 34.808 & -47.641 & -2.703 \\ 0 & -41.672 & 127.280 & -9.894 \\ 0 & 8.410 & -97.569 & 63.166 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -16.809 & 0.017 & -0.006 & -0.003 \\ 57.098 & -0.563 & 0.330 & -0.072 \\ -62.143 & 0.981 & -0.660 & 0.330 \\ 6.440 & -0.535 & 0.517 & -0.764 \end{bmatrix},$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8.631 \ -22.149 \ 25.320 \ -5.112]^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

3 改进型变论域模糊控制器设计(Design of fuzzy controller based on advanced variable universe algorithm)

文献[1]中提出了变论域自适应模糊控制器,即论域随着误差的变化而变化,有利于提高控制精度,实验和实践证明变论域模糊控制器有着优越的控制性能.简要介绍一下变论域自适应模糊控制器的结构,详细介绍请参见文献[1].

设 $X_i = [-E_i, E_i]$, $Y = [-U, U]$ 为输入变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 和输出变量 y 的论域, $\mathcal{A}_i = \{A_{ij}\} (j = 1, 2, \dots, m)$ 和 $\mathcal{B}_j = \{B_j\}$ 分别为论域 X_i 和 Y 的模糊划分,通常 $\mathcal{A}_i$ 和 $\mathcal{B}_j$ 为语言变量,由此可以得到一组模糊推理规则:

If x_1 is A_{1j} , $\dots$, and x_n is A_{nj} , then y is B_j . (2)

设 x_{ij} 为 A_{ij} 的峰点, y_j 为 $B_j (j = 1, \dots, m)$ 的峰点,根据文献[3]的结论,基于规则(2)的模糊控制器可以由 n 元插值函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n A_{ij}(x_{ij}) y_j. \quad (3)$$

所谓变论域就是论域随着 x_i, y 的变化而变化,即

$$X_i(x_i) = [-\alpha_i(x_i)E_i, \alpha_i(x_i)E_i],$$

$$Y(y) = [-\beta(y)U, \beta(y)U],$$

其中 $\alpha_i(x_i), \beta(y)$ 分别为论域 X_i, Y 的伸缩因子. 文献[1]中给出了构造的伸缩因子所具有的性质, 并给出了 $\alpha_i(x_i), \beta(y)$ 的一个具体表达式.

误差的实时变化导致论域的实时改变, 这增加了时间开销不利于实时性实现. 根据模糊控制的插值机理可知模糊控制器本质上是一种插值器, 其逼近精度取决于插值点数^[8,10]. 本文采用相对变论域方法: 即在输入输出论域及隶属函数的模糊划分不变的情况下, 通过伸缩因子实时改变输入变量的范围, 保证插值点数不变, 从而相对性地改变论域的大小, 即当误差变大时, 使伸缩因子变小, 从而论域相对变大, 使控制器起到“粗调”作用; 当误差变小时, 使伸缩因子变大, 从而论域相对性变小, 使控制器起到“细调”作用.

3.1 输入伸缩因子设计(Design of input contraction-expansion factor)

伸缩因子的选择是变论域模糊控制器设计中的重要环节, 一般采用带有参数的函数结构, 然后基于经验或系统特性确定参数, 但是伸缩因子的函数结构目前没有统一的形式. 本文采用基于模糊逻辑推理器构造伸缩因子, 实现对输入变量值的实时调整, 从而间接实现论域的伸缩变化, 保证控制精度. 输入变量的隶属函数和论域划分形式均采用如图2所示的结构, 伸缩因子的倒数的隶属函数和论域划分结构采用图3所示的结构.

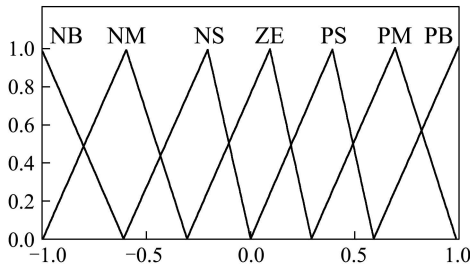


图 2 e 和 ec 隶属函数及论域划分
Fig. 2 Universe partition and memberships of e and ec

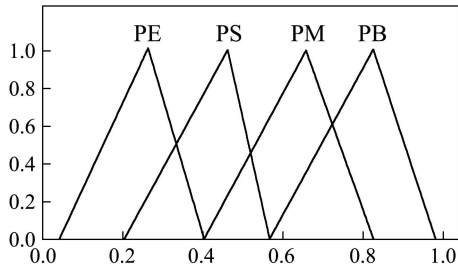


图 3 $\alpha(e, ec)$ 的隶属函数及论域划分
Fig. 3 Universe partition and membership of $\alpha(e, ec)$

伸缩因子的模糊推理器设计利用MATLAB的fuzzy工具箱, 控制器输入为误差 e 及其变化率 ec , 输

出为伸缩因子. 根据偏差 e 经因子 $\alpha(x)$ 后, 落在原始论域中的点要与文献[1]中的偏差 e 落在收缩后的论域中的点所对应的模糊子集及其隶属函数相符的原则可知: 当偏差 e 较大时, 应该使其在原始论域上进行“粗调”控制, 使其尽快进入稳定区域, 此时相当于偏差与论域都不变, 则偏差 e 的系数应该为1; 当偏差 e 接近稳定区域后, 论域应当随着偏差的减少而不断收缩, 此时的论域相对于偏差收缩了, 如果保持论域不变, 又要保持变论域的控制效果, 则应当相应的加大偏差, 则不变的论域相对于变大后的偏差 e 来说收缩了, 因此, 此时偏差 e 的作用系数 $\alpha(x)$ 应该大于1. 也就是说, 随着偏差 e 的不断减少, $\alpha(x)$ 从1开始不断增加. 基于模糊逻辑的伸缩因子模糊推理规则表如表2所示.

表 2 伸缩因子模糊规则表

Table 2 Fuzzy rule of contraction-expansion factor

EC	E						
	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
NB	PB	PM	PM	PS	PM	PM	PB
NS	PB	PM	PS	PS	PS	PM	PB
NM	PM	PS	PS	PE	PS	PS	PM
ZE	PM	PS	PE	PE	PE	PS	PM
PS	PM	PM	PS	PE	PS	PM	PM
PM	PB	PM	PS	PS	PS	PM	PB
PB	PB	PB	PM	PS	PM	PB	PB

3.2 输出调整因子设计(Design of tuning factor)

由理想闭环响应曲线可知, 当误差增大时, 系统易产生超调, 应该使控制器输出增益增大, 以尽快减小超调; 当误差减小时, 可以使控制量适当减小, 以节约控制能量. 经过权衡, 本文选择输出调整因子 $\gamma(E) = \sqrt{1 - e^{-k|E|}}$, 在整个控制过程中实时调整控制器输出量. 其中 k 为待设计参数, 这里取 $k = 0.8$, 设系统模糊控制器输出为 $y_1(E, EC)$, 则系统最终控制量为

$$y(E, EC) = \gamma(E)y_1(E, EC).$$
 (4)

3.3 状态信息综合(States integrated)

三级倒立摆是一个典型的多变量系统. 本文采用极点配置方法来降低控制器输入的维数, 使它们综合为误差 E 和误差变化率 EC :

$$E = [k_1, k_2, k_3, k_4][x, \theta_1, \theta_2, \theta_3]^T,$$
 (5)

$$EC = [k_5, k_6, k_7, k_8][x, \theta_1, \theta_2, \theta_3]^T.$$
 (6)

这里 $k_1, k_2, \dots, k_8$ 为综合误差系数. 采用状态极点配置方法取得的状态反馈矩阵作为综合误差系数.

为此, 设系统期望极点为

$$[-2+i, -2-i, -8+i, -8-i, -9+2i, \\ -9-2i, -11+3i, -11-3i].$$

利用极点配置理论可以得到系统的状态反馈矩阵:

$$K = [-5.6, 856.4, -955.1, -1256.4, \\ 598.5, 127.1, -123.9, -162.1].$$

这里取

$$[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8] = \frac{K}{\|K\|_2},$$

此处 $\|K\|_2 = 1908.0$.

4 系统仿真结果及对比分析(Simulation results and contrastive analysis)

设基于文献[1,2]的变论域模糊控制器的伸缩因子如文献[2]中所示的形式, 这里取 $\lambda = 0.5$, $k = 10$, $K_1 = p_i = 5$, 并记基于上述参数的变论域控制方法为传统算法; 记本文设计的基于改进型变论域的模糊控制方法为改进算法. 设三级倒立摆的初始状态为: $[-0.1, \pi/100, -\pi/100, \pi/200]$. 仿真结果如图4~图7所示.

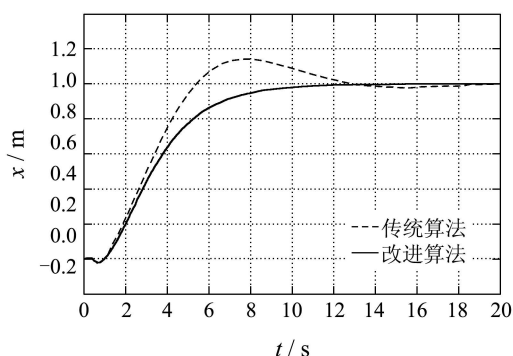


图4 小车位移曲线

Fig. 4 Response curve of displacement

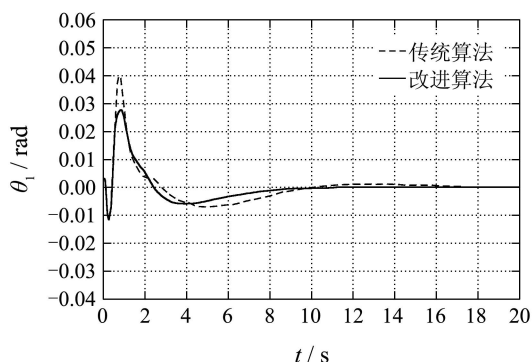


图5 摆角1曲线

Fig. 5 Response curve of rod 1

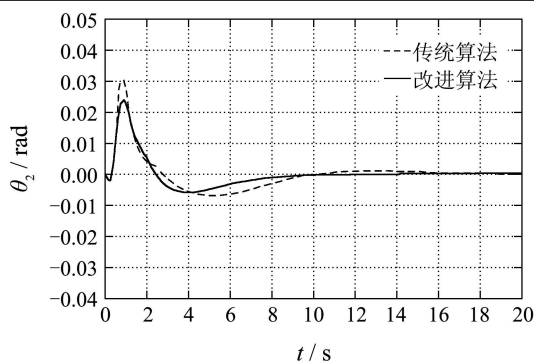


图6 摆角2曲线

Fig. 6 Response curve of rod 2

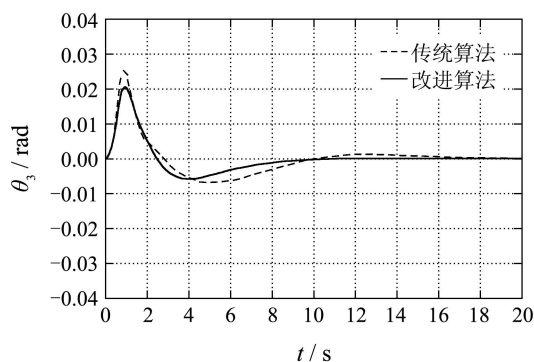


图7 摆角3曲线

Fig. 7 Response curve of rod 3

仿真结果表明, 相对于传统基于函数结构伸缩因子的算法, 采用改进算法不但有效提高了响应速度, 缩短了稳定时间, 而且还减小了超调量, 由图4可以看出小车位移基本没有超调. 具体精度对比如表3所示($t = 14$ s).

表3 两种算法的精度比较

Table 3 The precisions of two algorithms

比较对象	传统算法	改进算法
x/m	0.9972	1.0023
θ_1/rad	0.00094	-0.00008
θ_2/rad	0.00072	0.00021
θ_3/rad	0.00052	0.000032

5 结论(Conclusion)

本文设计了基于改进型变论域算法的三级倒立摆模糊控制器. 首先提出了相对变论域控制思想, 相对改变论域变化范围的同时, 提高了系统响应速度, 实质上也起到了对控制规则进行了优化的作用. 其次采用模糊逻辑构造了伸缩因子推理器, 实时调整输入变量, 该方法避免了传统变论域算法中伸缩因子函数结构和参数不易确定的问题, 然后搭建了三级倒立摆仿真平台, 仿真结果表明了该方法具有较好的控制精度和响应速度.

参考文献(References):

- [1] 李洪兴. 变论域自适应模糊控制器[J]. 中国科学(E辑), 1999, 29(1): 32–42.
(LI Hongxing. Adaptive fuzzy controller based on variable universe[J]. *Science in China (Series E)*, 1999, 29(1): 32–42.)
- [2] 李洪兴, 苗志宏, 王加银. 四级倒立摆的变论域自适应模糊控制[J]. 中国科学(E辑), 2002, 32(1): 65–75.
(LI Hongxing, MIAO Zhihong, WANG Jiayin. Variable universe adaptive fuzzy control on the quadruple inverted pendulum[J]. *Science in China (Series E)*, 2002, 32(1): 65–75.)
- [3] LI H X. Interpolation mechanism of fuzzy control[J]. *Science in China (Series E)*, 1998, 141(3): 312–320.
- [4] LI H X, MIAO Z H. Variable universe stable adaptive fuzzy control of a nonlinear system[J]. *Science in China (Series E)*, 2002, 32(2): 211–223.
- [5] 王立新. 自适应模糊系统与控制—设计与稳定性分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.
(WANG Lixin. *Adaptive Fuzzy System and Control-Design and Stability Analysis*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2002.)
- [6] 朱丽业, 方园, 吴惕华. 模糊自适应控制算法的新方案[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(2): 289–293.
(ZHU Liye, FANG Yuan, WU Tihua. New scheme of adaptive fuzzy control[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(2): 289–293.)
- [7] 宋军烈, 肖军. 倒立摆系统的Lagrange方程建模与模糊控制[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2002, 23(4): 333–337.
(SONG Junlie, XIAO Jun. Lagrange modeling and fuzzy control of inverted pendulum system[J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2002, 23(4): 333–337.)
- [8] 岳士弘, 张绍杰, 李平. 变论域自适应模糊控制器失真率的计算[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(5): 807–809.
(YUE Shihong, ZHANG Shaojie, LI Ping. Computation of distortion ratio of adaptive fuzzy controller based on variable universe[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(5): 807–809.)
- [9] 王银河, 戴冠中. 一类非线性不确定系统的模糊自适应控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(2): 271–274.
(WANG Yinhe, DAI Guanzhong. Adaptive fuzzy control for a class of nonlinear uncertain systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(2): 271–274.)
- [10] 李洪兴. Fuzzy控制的本质与一类高精度Fuzzy控制器的设计[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(6): 868–876.
(LI Hongxing. Essence of fuzzy control in mathematics and design on a class of high-accuracy fuzzy controller[J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(6): 868–876.)

作者简介:

陈富国 (1983—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为模糊控制理论及应用, E-mail: zhuye500@163.com;

邓冠男 (1979—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为模糊系统建模与模糊控制, E-mail: ddgnl@163.com;

谭彦华 (1980—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为模糊逻辑与模糊控制, E-mail: tanyh@hebut.edu.cn.