

文章编号: 1000-8152(2010)02-0143-04

自适应平方根无迹卡尔曼滤波算法

李 鹏, 宋申民, 陈兴林

(哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 将高斯过程回归融入平方根无迹卡尔曼滤波(SRUKF)算法, 本文提出了一种不确定系统模型协方差自适应调节滤波算法。该算法分为学习和估计两部分: 学习阶段用高斯过程对训练数据进行学习, 得到系统回归模型及噪声协方差; 估计阶段由回归模型代替状态方程和观测方程, 相应的噪声协方差实时自适应调整。该方法克服了传统方法容易受系统动态模型不确定性和噪声协方差不准确限制的问题, 仿真结果验证了算法的有效性。

关键词: 高斯过程回归; 平方根无迹卡尔曼滤波器; 自适应

中图分类号: V249.32 文献标识码: A

Adaptive square-root unscented Kalman filter algorithm

LI Peng, SONG Shen-min, CHEN Xing-lin

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: By combining the classical square root uncentered Kalman filter(SRUKF) with Gaussian process regression, we derive a filter algorithm for an uncertain system model with inaccurate noise covariance. The new algorithm includes a learning stage and an estimation stage. In the first stage, Gaussian process regression is applied to learn the training data to obtain the regression model and the noise covariance of the dynamic system. In the second stage, state equations and observation equations are substituted by their regression models, respectively; the noise covariance is adaptively adjusted by using the Gaussian kernel function real-time. Thus, the problem of uncertain system model and inaccurate noise covariance in the classical filters are solved. Simulation results show the new algorithm is effective.

Key words: Gaussian process regression; square root unscented Kalman filter; adaptive

1 引言(Introduction)

统计信号处理中的非线性滤波基本任务就是要从受噪声污染的观测量中递推地估计出不可观测的系统状态。传统的滤波方法假定动态模型的状态方程和观测方程已知, 在每次获得观测量 y_k 后, 估计状态量 x_k 的条件概率密度 $p(x_k|y_{1:k})$ 。最广泛使用的次优算法是扩展卡尔曼滤波(EKF), 其基本思路是将非线性模型在状态向量的邻域内进行Taylor级数展开, 取其1阶或2阶近似^[1]。无味变换和无味卡尔曼滤波是近年来用于解决该问题的新方法, 它通过一组精确选择的sigma点来匹配随机量的统计特性, 无需进行Jacobian矩阵的计算, 因而易于实现, 在保持相当运算量的同时具有更高的估计精度和更为广泛的适用范围^[2]。虽然上述方法在一定范围内都取得了很大的成功, 然而由于对于系统动态模型和系统噪声协方差的先验知识过度依赖使得在估计性能上受到很大约束。

高斯过程回归^[3](Gaussian process regression, GP)

是一种新兴机器学习技术, 对处理高维数、小样本、非线性等复杂问题具有很好的适应性, 是目前国际上机器学习领域的研究热点。在不牺牲性能的前提下, 与神经网络和支持向量机相比更容易实现, 被成功的应用于状态模型的学习。同时, 高斯过程是一个具有概率意义的核学习机, 能够对被估计的对象提供不确定性估计, 在改进粒子滤波重要性采样函数等方面得到了很好的应用^[4,5]。为此本文提出了融合高斯过程回归的平方根滤波(GP-SRUKF)新方法, 用以克服系统对动态模型和噪声协方差先验知识的过度依赖。将该算法应用于无人飞行器组合导航中, 仿真结果校验了算法的有效性。

2 高斯过程回归(Gaussian process regression)

高斯过程可以由均值 $m(x)$ 和协方差函数 $k(x, x')$ 来表示, 数学表达式为

$$f(x) \sim \text{GP}(m(x), k(x, x')). \quad (1)$$

假设有 n 个观察数据的点集 $D = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$,

$\cdots, (x_n, y_n)\} = D(X, y)$, 其中 $x_i \in \mathbb{R}^d$ 是 d 维输入, $y_i \in \mathbb{R}$ 是相应输出, $X = \{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, $y = \{y_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. 假设目标的观测值被噪声污染, 与真实的输出值满足

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon. \quad (2)$$

其中 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 为噪声干扰. 则

$$y \sim N(0, K(X, X) + \sigma^2 I). \quad (3)$$

式中 $K(X, X)$ 为 $n \times n$ 阶协方差矩阵. 对于新的输入 x_* , GP 给出了目标值 y_* 的数学期望和方差:

$$GP_\mu(x_*, \langle X, y \rangle) = k_*^T [K(X, X) + \sigma_n^2 I]^{-1} y, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} GP_\Sigma(x_*, \langle X, y \rangle) &= \\ k(x_*, x_*) - k_*^T [K(X, X) + \sigma_n^2 I]^{-1} k_*. & \quad (5) \end{aligned}$$

其中: $k_* = (k(x_1, x_*), \dots, k(x_n, x_*))^T$ 为训练样本集与 x_* 之间的协方差矩阵. 基于训练样本的高斯过程实际上是一个求解协方差函数中未知参数的过程, 常用协方差函数

$$\begin{aligned} k(x_p, x_q) &= \\ \sigma_f^2 \exp(-0.5(x_p - x_q)^T W (x_p - x_q)) + \sigma_n^2 \delta_{pq}. & \quad (6) \end{aligned}$$

其中: 超参数 $\theta = [\sigma_f, W, \sigma_n]$ 可通过训练样本的对数似然函数求最大后验分布获得, 采用共轭梯度优化法求超参数最优解^[3].

3 GP-SRUKF算法(GP-SRUKF algorithm)

传统的滤波方法基于确定的系统模型和先验噪声协方差, 然而由于很多情况下无法获得确定的系统模型甚至无法获得系统模型, 导致滤波器性能严重受损或者根本就无法正常工作. 高斯过程回归在处理高维数和非线性复杂问题方面有很好的适应性, 被广泛应用于状态模型的学习. 将高斯过程归融入标准的SRUKF算法, 能够克服传统滤波算法对于系统模型和先验噪声协方差的依赖.

3.1 学习状态方程和观测方程(Learning of state equations and observation equations)

针对多维输出模型, 每一维用一个GP过程来学习. 高斯过程学习状态方程时先求状态方程的数值解, 再令 $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, 则系统动态模型的学习数据 $X' = [\Delta x_1 \ \Delta x_2 \ \dots \ \Delta x_n]$. 高斯过程学习状态方程和观测方程数据模型:

$$D_F = \langle (X, U), X' \rangle, \quad (7)$$

$$D_H = \langle X, y \rangle. \quad (8)$$

用 GP^F 和 GP^H 分别表示 GP 学习所得状态方程和观测方程模型, 则系统动态方程表示如下:

$$x_k = GP_\mu^F((x_{k-1}, u_{k-1}), D_F) + \varepsilon_k, \quad (9)$$

$$y_k = GP_\mu^H(x_k, D_H) + \delta_k. \quad (10)$$

其中: $\varepsilon_k \sim N(0, GP_\Sigma^F(x_{k-1}, u_{k-1}), D_F)$, $\delta_k \sim N(0, GP_\Sigma^H(x_k, D_H))$.

3.2 GP-SRUKF算法(GP-SRUKF algorithm)

GP-SRUKF新方法采用高斯过程回归对训练数据进行学习, 得到状态方程和观测方程的回归模型以及状态噪声和观测噪声的协方差; 估计阶段以经典的SRUKF算法为基础, 系统的状态方程和观测方程用相应的回归模型代替, 状态噪声和观测噪声的协方差由高斯过程实时自适应求取. 算法如下所示:

$$\begin{cases} \hat{x} = E[x_0], \\ S_0 = \text{chol}\{E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]\}. \end{cases} \quad (11)$$

* 建立状态方程的训练数据: D_F ;

* 建立观测方程的训练数据: D_H .

当 $k = 1, 2, \dots, \infty$:

$$\chi_{k-1} = [\hat{x}_{k-1} \ \hat{x}_{k-1} + \gamma \cdot S_{k-1} \ \hat{x}_{k-1} - \gamma \cdot S_{k-1}], \quad (12)$$

$$\chi_{k/k-1}^* = GP_\mu^F((\chi_{k-1}, u_{k-1}), D_F), \quad (13)$$

$$Q_k = GP_\Sigma^F((x_{k-1}, u_{k-1}), D_F), \quad (14)$$

$$\hat{x}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \chi_{i,k/k-1}^*, \quad (15)$$

$$S_{K/K-1} = \text{qr}[\sqrt{W_1^c}(\chi_{1:2n,k/k-1}^* - \hat{x}_{k/k-1}) \sqrt{Q_k}], \quad (16)$$

$$*y_{k/k-1} = GP_\mu^H(\chi_{k/k-1}^*, D_H), \quad (17)$$

$$*R_k = GP_\Sigma^H(\hat{x}_{k/k-1}, D_H), \quad (18)$$

$$\hat{y}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m y_{i,k/k-1}, \quad (19)$$

$$S_{\tilde{y}_k} = \text{qr}\{\sqrt{W_1^{(c)}}(y_{1:2n,k/k-1} - \hat{y}_{k/k-1}) \sqrt{R_k}\}, \quad (20)$$

$$S_{\tilde{y}_k} = \text{qr}\{\sqrt{W_1^{(c)}}(y_{1:2n,k/k-1} - \hat{y}_{k/k-1}) \sqrt{R_k}\}, \quad (21)$$

$$S_{\tilde{y}_k} = \text{cholupdate}\{S_{\tilde{y}_k}, y_{0,k/k-1} - \hat{y}_{k/k-1}, W_0^{(c)}\}, \quad (22)$$

$$K_k = (P_{x_k, y_k} / S_{\tilde{y}_k}^T) S_{\tilde{y}_k}, \quad (23)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(y_k - \hat{y}_{k/k-1}), \quad (24)$$

$$U = K_k S_{\tilde{y}_k}, \quad (25)$$

$$S_K = \text{cholupdate}\{S_{K/K-1}, U, 1\}. \quad (26)$$

4 组合导航误差模型(Error models of integrated navigation)

位置量测差值和速度量测差值是由SINS给出的位置信息和速度信息与GPS接收机接收的相应的位置信息和速度信息分别求差而得.

位置误差和速度误差量测方程:

$$\begin{bmatrix} Z_P(t) \\ Z_V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R+h)\cos L\delta\lambda + N_E \\ (R+h)\delta L + N_N \\ \delta h + N_h \\ \delta V_E + M_E \\ \delta V_N + M_N \\ \delta V_U + M_U \end{bmatrix}. \quad (27)$$

式中: N_E, N_N 和 N_h 分别为GPS接收机沿东向、北向和天向的位置误差; M_E, M_N 和 M_U 分别为GPS接收机的测速误差。

捷联惯导坐标系采用“东北天(ENU)”地理坐标系^[7], 导航信息误差为9维, 即3维平台误差角 $\varphi_E, \varphi_N, \varphi_U$, 3维速度误差 $\delta V_E, \delta V_N, \delta V_U$, 3维位置误差 $\delta\lambda, \delta L, \delta h$ (分别为经度误差、纬度误差及高度误差)。

$$\delta\dot{L} = \frac{\delta V_N}{R+h} - \frac{V_N}{(R+h)^2}\delta h, \quad (28)$$

$$\delta\dot{\lambda} = \frac{V_E + \delta V_E}{R+h} \sec(L + \delta L) - \frac{V_E}{R+h} \sec L, \quad (29)$$

$$\delta\dot{h} = \delta V_U, \quad (30)$$

$$\dot{\psi} = [\varphi](\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) + \delta\omega_{en}^n + \delta\omega_{ie}^n + \varepsilon, \quad (31)$$

$$\delta\dot{V} = [\varphi]f^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta V - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times V + \nabla, \quad (32)$$

其中各参数取值参考文献[8]。

假设陀螺和加速度计的随机误差均为随机常数加上白噪声, 将随机误差从载体坐标系转换到地理坐标系:

$$\nabla = C_b^n \begin{bmatrix} \nabla_X \\ \nabla_Y \\ \nabla_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{ax} \\ W_{ay} \\ W_{az} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$\varepsilon = C_b^m \begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{gx} \\ W_{gy} \\ W_{gz} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

且有

$$\dot{\nabla} = [\dot{\nabla}_X \ \dot{\nabla}_Y \ \dot{\nabla}_Z]^T = 0, \quad (35)$$

$$\dot{\varepsilon} = [\dot{\varepsilon}_X \ \dot{\varepsilon}_Y \ \dot{\varepsilon}_Z]^T = 0. \quad (36)$$

取系统状态为

$$\begin{aligned} X_N &= [\delta\lambda \ \delta L \ \delta h \ \delta V_E \ \delta V_N \ \delta V_U \\ &\quad \varphi_E \ \varphi_N \ \varphi_U \ \nabla_X \ \nabla_Y \ \nabla_Z \\ &\quad \varepsilon_X \ \varepsilon_Y \ \varepsilon_Z]^T. \end{aligned} \quad (37)$$

系统误差模型的观测方程

$$\begin{bmatrix} Z_P \\ Z_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_a & 0_{3 \times 3} & 0_{10 \times 10} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{10 \times 10} \end{bmatrix} X_N + [N_E \ N_N \ N_h \ M_E \ M_N \ M_U]^T. \quad (38)$$

其中:

$$h_a = \text{diag}\{(R+h)\cos L \ (R+h) \ 1\}.$$

5 系统仿真(Simulation)

5.1 选取仿真参数(Choose simulation parameter)

陀螺常值漂移 $0.1^\circ/h$, 白噪声 $0.02^\circ/h$; 加速度计零偏 $5 \times 10^{-4} g$, 白噪声 $1 \times 10^{-4} g$; GPS接收机水平、垂直速度白噪声分别为 $0.1 m/s, 0.2 m/s$, 水平位置、高度白噪声分别为 $10 m, 20 m$ 。初始参数设置为: 位置(维度、经度、高度) $(110^\circ, 0^\circ, 6000 m)$, 速度(东向、北向、天向) $(0, 0, 0)(m/s)$, 姿态角(俯仰、滚转、偏航) $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$, 位置误差 $(20^\circ, 3^\circ, 20 m)$, 速度误差 $(0.5, 0.5, 1.0)(m/s)$, 姿态角误差(俯仰、滚转、偏航) $(1^\circ, 0^\circ, 1^\circ)$ 。飞行轨迹参数跟据参考文献[8]设计。滤波器初值为

$$\hat{X}_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} P_0 = \text{diag}\{ &(0.01)^2 \ (0.01)^2 \ (0.01)^2 \ (0.01)^2 \ (0.1)^2 \\ &\ (0.1)^2 \ (0.1)^2 \ (1)^2 \ (1)^2 \ (1)^2 \ (1)^2 \ (1)^2 \\ &\ (5 \times 10^{-4})^2 \ (5 \times 10^{-4})^2 \ (5 \times 10^{-4})^2 \}. \end{aligned}$$

5.2 仿真飞行(Simulation fly)

根据参考文献[8]设定的飞行轨迹参数进行两次计算机仿真飞行。首次飞行用于采集GP-SRUKF算法中高斯过程回归所需要的学习数据, 在 $720 s$ 飞行时间内取300组数据; 然后重复第一次飞行, 采样频率 $1 Hz$, 对采集到的数据代入GP-SRUKF滤波算法, 估计飞行器位置误差、速度误差和姿态角误差, 仿真结果如图1~图5所示。

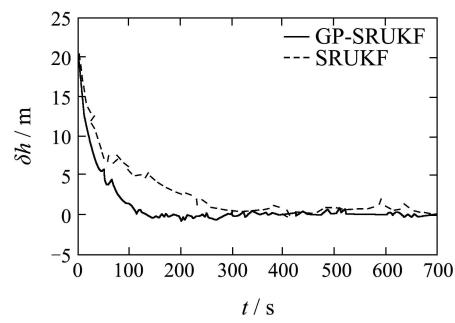


图1 高度方向位置误差

Fig. 1 Position error of height direction

由于采用了GPS和惯性导航的位置速度残差作为观测量, 系统状态中的位置和速度误差状态直接可观测。从图1~图3可见GP-SRUKF和SRUKF方法对维度方向和经度方向位置估计误差基本相当, 但前者的协方差更小; 高度方向位置估计误差GP-SRUKF算法收敛速度比SRUKF要快的多, 精度也要高。由图4可见速度误差估计中两种算法收敛速度和估计精度相当, 但是GP-SRUKF估计的均方误差要小, 这主要由于高斯过程回归在估计过程中可以自适应调节系统噪声协方差; 天向和北向速度曲线跟图4类似。由图5可见俯仰角误差估计方面两种算法

基本相当, GP-SRUKF比SRUKF效果稍好.

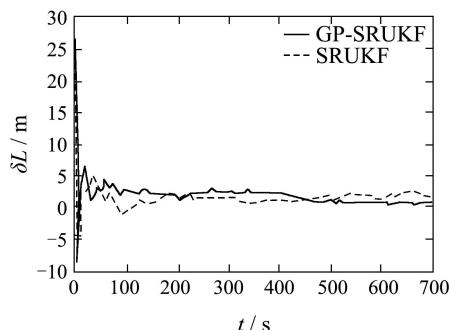


图2 纬度方向位置误差

Fig. 2 Position error of latitude direction

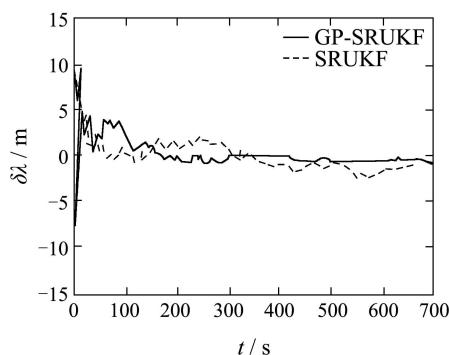


图3 经度方向位置误差

Fig. 3 Position error of longitude direction

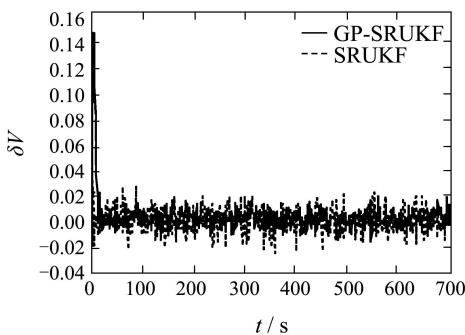


图4 东向速度误差

Fig. 4 Velocity error of east direction

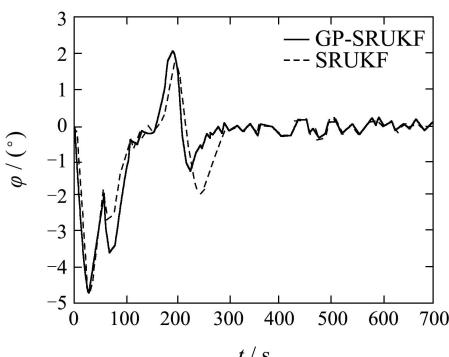


图5 俯仰角误差

Fig. 5 Velocity error of pitch angle

6 结论(Conclusion)

传统的滤波方法基于确定的系统模型和先验噪声协方差,由于很多情况下我们无法获得确切的系统模型甚至无法获得系统模型,导致滤波器性能严重受损或者根本无法工作.本文将高斯过程回归融入平方根UKF滤波,提出了一种非确定系统模型的变协方差GP-SRUKF滤波算法.与传统的滤波方法相比,该算法不需要确定的系统模型,更加灵活;高斯过程回归通过对采样数据的学习得到准确的系统噪声协方差,且在滤波估计过程中实时自适应调整,更符合实际要求;算法的应用范围和估计精度都得到了提高.将该算法应用于无人飞行器SINS/GPS组合导航中,仿真结果校验了算法的有效性.

参考文献(References):

- [1] SIMON H. *Kalman Filtering and Neural Networks*[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2001.
- [2] ERIC W, RUDOLPH M, NELSON A T. Dual estimation and the unscented transformation[J]. *Advances in neural information processing systems*, 2000, 12(1): 666 – 672.
- [3] RASMUSSEN C E, WILLIAMS C K I. *Gaussian Processes for Machine Learning*[M]. Boston: MIT Press, 2005.
- [4] FERRIS B, HAHNEL D, FOX D. Gaussian processes for signal strength-based location estimation[C] // *Proceedings of Robotics: Science and Systems*. USA: Philadelphia, 2006: 207 – 213.
- [5] PLAGENHORN C, FOX D, BURGARD W. Efficient failure detection on mobile robots using Gaussian process proposals[C] // *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence*. INDIA: Hyderabad, 2007: 378 – 384.
- [6] MACKAY D J C. Comparison of approximate methods for handling hyperparameters[J]. *Neural Computation*, 1999, 12(7): 278 – 286.
- [7] DAVID H, TITTERTON, WESTON J L. *Strapdown Inertial Navigation Technology*[M]. Stevenage, IEE, 2004.
- [8] 秦永元, 张洪锐, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998: 323 – 334.
(QIN Yongyuan, ZHANG Hongyue, WANG Shuhua. *Kalman Filter and Integrated Navigation Theory*[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998: 323 – 334.)

作者简介:

李 鹏 (1978—), 男, 博士研究生, 研究方向包括非线性滤波、组合导航、目标跟踪, E-mail: peng_li@hit.edu.cn;

宋申民 (1968—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向包括智能优化控制、卫星编队飞行、卫星轨道机动, E-mail: songsm@hit.edu.cn;

陈兴林 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向包括飞行器控制与仿真、智能机器人、计算机控制, E-mail: chenxl@hit.edu.cn.