DOI: 10.7641/CTA.2013.12111

B样条函数在模糊系统中的应用

谭彦华[1,2], 李洪兴[2†], 马秀娟[1], 陈秀引[1]

(1. 河北工业大学 理学院, 天津 300130; 2. 大连理工大学 电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116024)

摘要: 模糊系统的设计可看成是一类函数逼近问题, 从而可以利用数值逼近的方法来设计模糊系统. 本文将B样条函数引入到模糊系统的设计中, 构造了两类多输入单输出的B样条模糊系统, 并证明了它们均能逼近函数及其导函数. 仿真结果表明, 将两类B样条模糊系统应用到模糊系统建模和模糊控制器设计是可行的, 且在大多数情形下, 第1类B样条模糊系统的性能优于本文提到的其他模糊系统.

关键词: B样条模糊系统; 模糊系统; 泛逼近性; 模糊控制

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

The application of B-spline functions in fuzzy systems

TAN Yan-hua[1,2], LI Hong-xing[2†], MA Xiu-juan[1], CHEN Xiu-yin[1]

(1. School of Sciences, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China;
2. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China)

Abstract: The design of a fuzzy system can be considered as a function approximation problem. Thus, fuzzy systems can be designed by using numerical approximation methods. In this paper, the B-spline function is introduced to design fuzzy systems, and two classes of multiple-input-single-output (MISO) B-spline fuzzy systems (B-FSs) are constructed, both of which can approximate functions and their derivatives simultaneously. Simulation results show that it is feasible to use B-FSs for fuzzy system modeling and fuzzy controller design. In most cases, the first classes of B-FSs outperform the other fuzzy systems mentioned in this paper.

Key words: B-spline fuzzy system; fuzzy system; universal approximation; fuzzy control

1 引言(Introduction)

自Zadeh近50年前引入模糊集的概念以来[1–3], 模糊集及模糊系统的研究取得了长足的进步. 它们已经成功地应用到包括控制工程、定性建模、模式识别、信号处理、信息处理等领域. 笔者注意到, 在几乎所有的应用中, 模糊系统建模都起到了重要的作用. 从数学角度来看, 模糊系统建模本质上就是寻找一个从输入论域到输出论域的映射, 这个映射能够逼近期望的模型(或者函数)到指定的精度[4]. 文献[5–10]和文献[11–13]分别研究了Mamdani模糊系统, Takagi-Sugeno(T–S)模糊系统和布尔模糊系统的泛逼近性. 此外, 在一些应用中, 比如需求系统的弹性非参估计[14–15]、机械手的光滑运动训练[16]、金融中某些混沌系统的动态特性研究和物理中的动态序列预测[17], 不仅需要模糊系统逼近原始函数, 还需要模糊系统能够逼近原始函数的导函数. 因此, 文献[18–21]研究了能够同时逼近函数及其导函数的模糊系统.

由于模糊系统的设计可以看成是一类函数逼近问题[18,22–24], 故本文可以利用数值逼近的方法来设计模糊系统. 文献[25]将Zadeh模糊集推广到$\bar{\mathbb{R}}$模糊集, 并由此构造了Lagrange模糊系统、Hermite模糊系统和Bernstein模糊系统, 它们分别是数值逼近中的Lagrange插值公式、Hermite插值公式和Bernstein多项式与模糊系统构造相结合的产物. 事实上, 样条函数方法是数值逼近中最有效的方法之一, 且样条函数由于其良好的结构特性和逼近能力而被广泛的应用于各个领域[26]. 本文将利用B样条函数来设计模糊系统.

文献[27–28]利用样条函数设计了模糊控制器. 文献[10]给出了利用正规样条函数构造的模糊系统的泛逼近性, 并由此指出模糊系统可达到样条函数的逼近精度. 需要指出的是, 如果要确定某个(3次)样条函数空间中的一个样条函数, 边界条件是必需的. 然而, 对于模糊系统来说, 这样的边界条件不容易得到. 文献[29]利用虚拟语言变量来获得边界条件, 接着利用B样条基函数构造了模糊系统. 文献[30]利用外推的方

收稿日期: 2012−05−18; 收修改稿日期: 2013−07−24.
†通信作者. E-mail: lhxqx@bnu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61074044, 61104038, 61374118); 国家“973”计划项目课题资助项目(2009CB320602).

法得到了边界条件, 并由此构造了一类单输入单输出的B样条模糊系统, 称之为第1类B样条模糊系统. 特别的, 在不考虑边界条件的情形下, 文献[30]构造了另外一类单输入单输出的B样条模糊系统, 称之为第2类B样条模糊系统. 这两类B样条模糊系统均能逼近函数及其导函数.

正如样条函数中许多经典的单变量的理论不能直接推广到多元情形一样, 对B样条模糊系统来说, 从单输入单输出到多输入单输出的情形也有一定的困难. 本文将研究多输入单输出的B样条模糊系统. 事实上, 对于多输入单输出的情形, 欲使得到的模糊系统仍是某一样条函数空间中的函数, 且具有插值性质, 就必须保证构造模糊系统的数据集是插值适定结点组. 本文首先利用一种线性外推的方式对原始数据进行了预处理, 由于外推的数据集是插值适定结点组, 从而保证了构造过程的可行性, 也进而使得多输入单输出的第1类B样条模糊系统(1-B-FS)具有插值性质. 其次, 本文还利用原始数据构造了另外一类多输入单输出B样条模糊系统, 也即第2类B样条模糊系统(2-B-FS). 第2类B样条模糊系统是由模糊推理得到的一类有理样条函数. 本文证明了这两类多输入单输出B样条模糊系统均能够逼近函数及其导函数. 最后, 仿真结果表明, 这两类B样条模糊系统可以应用到模糊系统建模和模糊控制器设计中, 并且在大多数情形下, 第1类B样条模糊系统的性能优于上述提到的其他模糊系统.

2 预备知识(Preliminaries)

这一节, 介绍本文后面将要用到的与三次样条插值、均匀三次B样条函数、多输入单输出模糊系统相关的一些定义和结论, 并给出一些记号.

2.1 三次样条函数(Cubic splines)

定义 1 (三次样条函数空间[31]) 令$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$是$[a, b]$上的一个划分, $\mathscr{P}^2(\pi)$是$[a, b]$上函数的线性空间, 其中的函数在每一个(x_i, x_{i+1})区间上都是3次或者小于3次的多项式. 于是三次样条空间$S^2([a, b], \pi)$可定义为

$$S^2([a, b], \pi) \triangleq \mathscr{P}^2(\pi) \cap C^2[a, b],$$

其中$C^2[a, b]$是$[a, b]$上所有二次连续可微函数的全体.

定理 1 [31] 设s是三次样条空间$S^2([a, b], \pi)$的函数且满足$s(x_i) = f(x_i), 0 \leqslant i \leqslant n$. 如果$f \in C^m[a, b], m = 2, 3, 4$, 则对任意$x \in [x_j, x_{j+1}]$,

$$|(s-f)^{(r)}(x)| \leqslant \varepsilon_{mr} \|f^{(m)}\|_\infty + K_m \beta_r \{2^{1-j} + 2^{1-n+j}\} h,\ 0 \leqslant r \leqslant 2, \tag{1}$$

其中$h = \max(x_i - x_{i-1})$, $(s-f)^{(r)}(x)$是函数$(s-f)(x)$对x的r阶导数, 常数ε_{mr}, β_r和K_m见表1.

表 1 式(1)中的常数

Table 1 The constants of Equation (1)

ε_{mr}	$r=0$	$r=1$	$r=2$
$m=2$	8/9	4	10
$m=3$	71/216	31/27	5
$m=4$	5/384	$(9+\sqrt{3})/216$	5

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$$
$$\beta_0 = \Delta x_j/4, \beta_1 = 1, \beta_2 = 6/\Delta x_j$$
$$R \equiv \max\{|f_0'' - s_0''|, |f_n'' - s_n''|\}$$
$$K_2 \equiv (5/2)\|f^{(2)}\|_\infty + R$$
$$K_3 \equiv \|f^{(3)}\|_\infty h + (1/2)R$$
$$K_4 \equiv (7/24)\|f^{(4)}\|_\infty h^2 + (1/2)R$$

定义 2 (均匀三次B样条函数[32]) 函数

$$\Omega_3(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant 2, \\ \dfrac{1}{2}|x|^3 - x^2 + \dfrac{2}{3}, & |x| \leqslant 1, \\ -\dfrac{1}{6}|x|^3 + x^2 - 2|x| + \dfrac{4}{3}, & 1 < |x| < 2, \end{cases} \tag{2}$$

称为均匀三次B样条函数.

注 1 由文献[32]知, 取$h > 0$, 则

$$\sum_{i=-1}^{n+1} \Omega_3(\frac{x}{h} - i) = 1,\ \forall x \in [0, nh]. \tag{3}$$

事实上, 由式(2)知, $\Omega_3(x)$是有局部支撑性质的函数. 因此

$$\sum_{i=-1}^{2} \Omega_3(\frac{x}{h} - i) = 1,\ \forall x \in [0, h]. \tag{4}$$

2.2 多输入单输出模糊系统(Formulation of MISO fuzzy systems)

假设多输入单输出模糊系统[6–7]$F: U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}$, 其中$U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subset \mathbb{R}^n$是输入空间, $V \subset \mathbb{R}$是输出空间.

模糊规则库包含如下$N = \prod_{j=1}^{n} N_j$条规则:

$R_{i_1 i_2 \cdots i_n}$: If x_1 is $A_{i_1}^1$ and x_2 is $A_{i_2}^2$ and $\cdots$ and x_n is $A_{i_n}^n$, then y is $C_{i_1 i_2 \cdots i_n}$, $i_1 i_2 \cdots i_n \in I$,

其中: $x_j \in U_j (j = 1, 2, \cdots, n)$, $y \in V$为模糊系统的输入和输出变量, U_j上的模糊集$A_{i_j}^j$和V上的模糊集$C_{i_1 i_2 \cdots i_n}$均是由模糊隶属函数定义的语言变量, 指标集

$$I = \{i_1 i_2 \cdots i_n | i_j = 1, 2, \cdots, N_j; j = 1, 2, \cdots, n\}.$$

利用单点模糊化、乘积推理机、中心平均解模糊化, 得到的模糊系统为

$$F(x) = \frac{\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n \in I} \prod\limits_{j=1}^{n} A_{i_j}^j(x_j) y_{i_1 i_2 \cdots i_n}}{\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n \in I} \prod\limits_{j=1}^{n} A_{i_j}^j(x_j)}, \tag{5}$$

其中$y_{i_1 i_2 \cdots i_n}$是$C_{i_1 i_2 \cdots i_n}(y)$在$V$的最大值点.

2.3 记号(Notations)

在模糊推理中, 总结规则和寻找一组输入输出数据是一回事[22], 因此本文不再区分数据和规则. 本文总假设构造双输入单输出模糊系统的数据为

$$\{(x_i, y_j, z_{ij}) | i = 0, 1, \cdots, n, j = 0, 1, \cdots, m\}, \tag{6}$$

其中: $x_0 = a, x_n = b, h_x = \dfrac{b-a}{n}, x_i = x_0 + ih_x, i = 0, 1, \cdots, n, y_0 = c, y_n = d, h_y = \dfrac{d-c}{m}, y_j = y_0 + jh_y, j = 0, 1, \cdots, m.$

3 多输入单输出的第1类B样条模糊系统及其逼近性(The MISO 1-B-FSs and their universal approximation)

与单输入单输出的第1类B样条模糊系统一样, 本文仍然希望多输入单输出的第1类B样条模糊系统是某一样条函数空间中的函数, 且具有插值性质. 然而, 与单输入单输出的情形不同的是, 一元函数插值问题总是适定的, 而多元插值问题却未必适定. 因此, 要想使多输入单输出的第1类B样条模糊系统仍然具有插值性质, 就必须保证构造模糊系统的数据集是插值适定结点组. 于是, 这一节首先利用一种线性外推的方法对数据集进行预处理. 由于外推的数据集是插值适定结点组, 从而保证了构造过程的可行性, 也进而使得多输入单输出的第1类B样条模糊系统具有插值性质且可写成是某一样条函数空间基函数的线性组合的形式. 最后, 通过一个基变换, 并利用文献[31]中的混合函数技巧(the blend function techniques)证明了双输入单输出的第1类B样条模糊系统能够同时逼近函数及其导函数. 为了方便, 这里将可作为某一样条函数空间基函数的均匀三次B样条函数作为模糊系统的隶属函数. 下面讨论两个输入变量情形下的多输入单输出的B样条模糊系统.

令$\pi_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \pi_2 : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d, \pi = \pi_1 \times \pi_2$. 以$\{(x_i, y_j) | i = 0, 1, \cdots, n,\ j = 0, 1, \cdots, m\}$为结点的双三次样条空间$S^2([a, b] \times [c, d],\ \pi_1 \times \pi_2)$的维数是$(n + 3)(m + 3)$. 于是想确定这个空间的一个函数就需要$(n + 3)(m + 3)$个条件. 然而, 数据(6)只有$(n + 1)(m + 1)$个数据点, 也即只能获得$(n + 1)(m + 1)$个条件. 此时, 要得到双三次样条空间$S^2([a, b] \times [c, d], \pi_1 \times \pi_2)$中的函数, 也即一个双输入单输出B样条模糊系统, 必须增加边界条件. 这里, 本文利用一种线性外推方法来增加边界条件. 首先, 沿x轴方向外推两个点$x_{-1} = x_0 - h_x$和$x_{n+1} = x_n + h_x$, 于是给数据(6)增加了$2(m+1)$个数据点$\{(x_{-1}, y_j, z_{-1,j}), (x_{n+1}, y_j, z_{n+1,j}) | j = 0, 1, \cdots, m\}$, 其中$z_{-1,j} = 2f(x_0, y_j) - f(x_1, y_j)$, $z_{n+1,j} = 2f(x_n, y_j) - f(x_{n-1}, y_j)$. 类似的, 沿$y$轴方向外推两个点$y_{-1} = y_0 - h_y$和$y_{m+1} = y_m + h_y$, 此时又增加了$2(n + 3)$个数据点$\{(x_i, y_{-1}, z_{i,-1}), (x_i, y_{m+1}, z_{i,m+1}) | i = -1, 0, \cdots, n + 1\}$, 其中: $z_{i,-1} = 2f(x_i, y_0) - f(x_i, y_1)$, $z_{i,m+1} = 2f(x_i, y_m) - f(x_i, y_{m-1})$. 于是, 就得到具有$(n+1)(m+1) + 2(m+1) + 2(n + 3) = (n + 3)(m + 3)$个数据点, 也即$(n + 3) \cdot (m + 3)$个条件的数据集

$$\begin{aligned}&\{(x_i, y_j) | i = -1, 0, \cdots, n + 1,\\ &j = -1, 0, \cdots, m + 1\}.\end{aligned} \tag{7}$$

令$A_i(x) = \varOmega_3(\dfrac{x - x_i}{h_x}), i = -1, 0, \cdots, n + 1, B_j(y) = \varOmega_3(\dfrac{y - y_j}{h_y}), j = -1, 0, \cdots, m + 1$. 于是可以构造如下$(n + 3)(m + 3)$条模糊规则:

If x is A_i and y is B_j, then z is C_{ij}, $i = -1, 0, \cdots, n + 1, j = -1, 0, \cdots, m + 1$.

文献[22]指出, 模糊系统与后件模糊集C_{ij}的形状无关, 只与其峰点有关. 因此本文只假设u_{ij}是后件模糊集C_{ij}的峰点而不考虑它们的形状. 由式(5)可以得到双输入单输出的第1类B样条模糊系统

$$F_1(x, y) = \frac{\sum\limits_{i=-1}^{n+1}\sum\limits_{j=-1}^{m+1} A_i(x)B_j(y)u_{ij}}{\sum\limits_{i=-1}^{n+1}\sum\limits_{j=-1}^{m+1} A_i(x)B_j(y)}.$$

利用线性外推的方法使得x方向增加了两个点x_{-1}和x_{n+1}, 进而对x方向的论域进行模糊划分时, 就可以增加两个模糊集A_{-1}和A_{n+1}, 从而由公式(3), 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=-1}^{n+1}\sum_{j=-1}^{m+1} A_i(x)B_j(y) = 1,\\ &(x, y) \in [a, b] \times [c, d].\end{aligned}$$

故

$$F_1(x, y) = \sum_{i=-1}^{n+1}\sum_{j=-1}^{m+1} A_i(x)B_j(y)u_{ij} \tag{8}$$

写成了B样条基函数的线性组合的形式. 令$U = (u_{ij})_{n+3,m+3}$, 将外推数据集(7)代入式(8), 解线性方程组

$$\begin{cases}F_1(x_s, y_t) = \sum\limits_{i=-1}^{n+1}\sum\limits_{j=-1}^{m+1} A_i(x_s)B_j(y_t)u_{ij} = z_{st},\\ s = -1, 0, \cdots, n + 1,\ t = -1, 0, \cdots, m + 1,\end{cases} \tag{9}$$

就得到了U, 进而得到了双输入单输出的第1类B样条模糊系统, 显然, 它具有插值性质.

注 2　1) 事实上方程组(9)是否有解取决于外推的数据集(7)是不是一个二元插值适定节点组. 由于本文对原来的输入输出数据采用了线性外推的方法, 故此时得到的数据集(7)不在空间$S^2([a, b] \times [c, d], \pi_1 \times \pi_2)$中任何一条代数曲线上, 因此外推数据集是一个二元插值适定节点组[33]. 于是

线性方程组(9)是可解的, 也即上述构造过程是可行的.

2) 一般来说, 方程组(9)是一个高维的线性方程组. 但是由于B样条函数的性质, 容易知道方程组的系数矩阵是对称正定和稀疏的, 从而可利用Cholesky分解很方便的得到方程组(9)的解.

为了证明第1类B样条模糊系统的泛逼近性, 本文先给出如下的引理.

引理 1 构造函数列$\phi_i(x) \in S^2([a,b],\pi_1)$, $x \in [a,b]$, $i=-1,0,\cdots,n+1$, 使得$\phi_i(x_j)=\delta_{ij}$, $i,j=-1,0,\cdots,n+1$, 则$\{\phi_i(x)|i=-1,0,\cdots,n+1\}$是样条函数空间$S^2([a,b],\pi_1)$的基.

证 略.

定理 2 假设$f \in C^4(\mathscr{U})$, $\mathscr{U}=[a,b]\times[c,d]$, $z_{ij}=f(x_i,y_j)$, $i=0,1,\cdots,n$, $j=0,1,\cdots,m$, $F_1(x,y)$是上面的双输入单输出的第1类B样条模糊系统. 则

$$\max_{(x,y)\in\mathscr{U}} |(F_1-f)^{(r,s)}(x,y)| = \mathrm{O}(h^{2-r}+h^{2-s}+h^{4-(r+s)}), \tag{10}$$

其中:

$$0 \leqslant r+s \leqslant 2,\ h=\max\{h_x,h_y\},$$
$$(F_1-f)^{(r,s)}(x,y)=\frac{\partial^{r+s}(F_1-f)}{\partial x^r \partial y^s}.$$

证 分别取三次样条空间$S^2([a,b],\pi_1)$和$S^2([c,d],\pi_2)$的形如引理1的基

$$\{\phi_i(x)\mid i=-1,0,\cdots,n+1\},$$
$$\{\psi_j(y)\mid j=-1,0,\cdots,m+1\}.$$

注意到

$$\{A_j(x)=\Omega_3(\frac{x-x_j}{h_x})\mid j=-1,0,\cdots,n+1\},$$
$$\{B_j(y)=\Omega_3(\frac{y-y_j}{h_y})\mid j=-1,0,\cdots,m+1\}$$

也分别是三次样条空间$S^2([a,b],\pi_1)$和$S^2([c,d],\pi_2)$的基. 因此,

$$\{A_iB_j|i=-1,0,\cdots,n+1,\ j=-1,0,\cdots,m+1\},$$
$$\{\phi_i\psi_j|i=-1,0,\cdots,n+1,\ j=-1,0,\cdots,m+1\}$$

都是双三次样条空间$S^2([a,b]\times[c,d],\pi)$的基. 于是

$$F_1(x,y)=\sum_{i=-1}^{n+1}\sum_{j=-1}^{m+1}A_i(x)B_j(y)u_{ij}=\sum_{i=-1}^{n+1}\sum_{j=-1}^{m+1}\phi_i(x)\psi_j(y)f(x_i,y_j),$$

其中:

$$f(x_{-1},y_j)=2f(x_0,y_j)-f(x_1,y_j),$$
$$f(x_{n+1},y_j)=2f(x_n,y_j)-f(x_{n-1},y_j),$$
$$j=0,1,\cdots,m,$$
$$f(x_i,y_{-1})=2f(x_i,y_0)-f(x_i,y_1),$$
$$f(x_i,y_{m+1})=2f(x_i,y_m)-f(x_i,y_{m-1}),$$
$$i=-1,0,\cdots,n+1.$$

令

$$f(x_{-1},y)=2f(x_0,y)-f(x_1,y),$$
$$f(x_{n+1},y)=2f(x_n,y)-f(x_{n-1},y),$$
$$f(x,y_{-1})=2f(x,y_0)-f(x,y_1),$$
$$f(x,y_{m+1})=2f(x,y_m)-f(x,y_{m-1}).$$

于是可以定义如下两个函数:

$$\varPhi_{\mathrm{f}}(x,y)=\sum_{i=-1}^{n+1}f(x_i,y)\phi_i(x), \tag{11}$$

$$\varPsi_{\mathrm{f}}(x,y)=\sum_{j=-1}^{m+1}f(x,y_j)\psi_j(y). \tag{12}$$

它们满足

$$\varPhi_{\mathrm{f}}(x_p,y)=\sum_{i=-1}^{n+1}f(x_i,y)\phi_i(x_p)=f(x_p,y),$$
$$p=-1,0,\cdots,n+1,$$
$$\varPsi_{\mathrm{f}}(x,y_q)=\sum_{j=-1}^{m+1}f(x,y_j)\psi_j(y_q)=f(x,y_q),$$
$$q=-1,0,\cdots,m+1.$$

将F_1-f写成如下两项:

$$F_1-f=\varPsi_{\mathrm{f}}-f+F_1-\varPsi_{\mathrm{f}}. \tag{13}$$

注意到对任意固定的x^*,

$$\varPsi_{\mathrm{f}}^{(r,0)}(x^*,y)=\sum_{j=-1}^{m+1}f^{(r,0)}(x^*,y_j)\psi_j(y),$$

且$\varPsi_{\mathrm{f}}^{(r,0)}(x^*,y_j)=f^{(r,0)}(x^*,y_j)$, $j=0,1,\cdots,m$, 从而$\varPsi_{\mathrm{f}}^{(r,0)}(x^*,y)\in S^2([c,d],\pi_2)$是满足定理1条件的三次样条函数, 因此, 对任意$y\in[y_j,\ y_{j+1}]$, $j=0,1,\cdots,m-1$,

$$|(\varPsi_{\mathrm{f}}-f)^{(r,s)}(x^*,y)| \leqslant \varepsilon_{m-r,s}\max_{y_0\leqslant y\leqslant y_m}|f^{(r,m-r)}(x^*,y)|h_y^{m-r-s}+K'_{m-r}\beta_s\{2^{1-j}+2^{1-m+j}\}h_y,$$

其中将定理1的K_{m-r}中的f用$f^{(r,0)}$代替就可得到K'_{m-r}.

下面考虑式(13)中的第2项:

$$(F_1-\varPsi_{\mathrm{f}})(x,y)=\sum_{j=-1}^{m+1}(\sum_{i=-1}^{n+1}f(x_i,y_j)\phi_i(x)-f(x,y_j))\psi_j(y)=\sum_{j=-1}^{m+1}R(x,y_j)\psi_j(y), \tag{14}$$

其中$R(x,y)=\sum\limits_{i=-1}^{n+1}f(x_i,y)\phi_i(x)-f(x,y)$. 容易验

证

$$R(x,y_{-1})=2R(x,y_0)-R(x,y_1),$$
$$R(x,y_{m+1})=2R(x,y_m)-R(x,y_{m-1}).$$

因此

$$F_1-\Psi_{\rm f}=\Psi_{\rm R}=(\Psi_{\rm R}-R)+R. \tag{15}$$

下面寻找上式右边两项的界.

对任意固定的$y=y^*$, $f^{(0,s)}(x,y^*)$作为x的函数具有$m-s$阶连续导数. 将$f^{(0,s)}(x,y^*)$视为定理1中的函数f, 对任意$x\in[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,1,\cdots,n-1$, 有

$$\begin{aligned}&|R^{(r,s)}(x,y^*)|\leqslant\\&\varepsilon_{m-s,r}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_n}|f^{(m-s,s)}(x,y^*)|h_x^{m-r-s}+\\&K''_{m-s}\beta_r\{2^{1-i}+2^{1-n+i}\}h_x,\end{aligned} \tag{16}$$

其中将定理1的K_{m-s}中的f用$f^{(0,s)}$代替就可得到K''_{m-s}.

笔者注意到当$0\leqslant r\leqslant m-2$时, $R^{(r,0)}\in C^{(0,2)}[\mathscr{U}]$, 因此对任意固定的$x=x^*$, 对任意$y\in[y_j,y_{j+1}]$, $j=0,1,\cdots,m-1$, 由定理1, 有

$$\begin{aligned}&|(\Psi_{\rm R}-R)^{(r,s)}(x^*,y)|\leqslant\\&\varepsilon_{2s}\max_{y_0\leqslant y\leqslant y_m}|R^{(r,2)}(x^*,y)|h_y^{2-s}+\\&K_2'''\beta_s\{2^{1-j}+2^{1-m+j}\}h_y,\end{aligned} \tag{17}$$

其中将定理1的K_2中的f用$R^{(r,0)}$代替就可得到K_2'''.

由定理1, $\beta_r=\mathrm{O}(h^{1-r})$, $r=0,1,2$, 从而由式(14)(16)–(17)得到式(10), 定理得证. 证毕.

4 多输入单输出第2类B样条模糊系统及其逼近性(The MISO 2-B-FSs and their universal approximation)

在第3节, 通过预处理原始数据得到了多输入单输出的第1类B样条模糊系统. 自然地, 本文可以直接利用原始数据来构造模糊系统. 下面, 本文将利用原始数据构造多输入单输出的第2类B样条模糊系统并研究它的泛逼近性.

与多输入单输出第1类B样条模糊系统类似, 本文只考虑两个输入变量的情形. 令

$$A_i(x)=\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}),\ i=0,\cdots,n,$$
$$B_j(y)=\Omega_3(\frac{y-y_j}{h_y}),\ j=0,\cdots,m.$$

于是可以得到$(n+1)(m+1)$条模糊规则如下:

If x is A_i and y is B_j, then z is C_{ij}, $i=0,\cdots,n$, $j=0,\cdots,m$.

如上所述, 本文只假设z_{ij}是C_{ij}的峰点, 而不考虑它们的形状. 由式(5), 本文有双输入单输出的第2类B样条模糊系统

$$F_2(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\frac{A_i(x)B_j(y)}{\sum\limits_{s=0}^{n}\sum\limits_{t=0}^{m}A_s(x)B_t(y)})z_{ij}. \tag{18}$$

下面将证明双输入单输出的第2类B样条模糊系统能够以二阶精度逼近函数及其导函数.

引理 2 对任意$x\in[0,1]$,

$$\Omega_3(x+1)-\Omega_3(x-1)-2\Omega_3(x-2)=-x, \tag{19}$$

$$\Omega_3(x+1)+\Omega_3(x-1)+4\Omega_3(x-2)=x^2+\frac{1}{3}, \tag{20}$$

$$\Omega_3(x+1)-\Omega_3(x-1)-8\Omega_3(x-2)=-x^3-x, \tag{21}$$

$$\Omega_3(x+1)+\Omega_3(x-1)+16\Omega_3(x-2)=2x^3+x^2+1/3, \tag{22}$$

$$\Omega_3(x+1)-\Omega_3(x-1)-32\Omega_3(x-2)=-5x^3-x. \tag{23}$$

证 经过简单的演算即可得到上述结论, 故此处略去证明.

定理 3 设$\mathscr{U}_0\triangleq[a+h_x,b-h_x]\times[c+h_y,d-h_y]$, $z_{ij}=f(x_i,y_j)$, $i=0,1,\cdots,n$, $j=0,1,\cdots,m$, $f\in C^4(\mathscr{U})$, $F_2(x,y)$为上述双输入单输出的第2类B样条模糊系统. 对任意$(x,y)\in\mathscr{U}_0$,

$$(F_2-f)^{(r,s)}(x,y)=\mathrm{O}(h^2),\ 0\leqslant r+s\leqslant 2,$$

其中$h=\max\{h_x,h_y\}$.

证 本文只详细证明对任意$(x,y)\in\mathscr{U}_0$, $(F_2-f)^{(r,0)}(x,y)=\mathrm{O}(h^2)$, $r=0,1$, 其他公式的证明是类似的. 对任意$(x,y)\in[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$, $i=1,\cdots,n-2$, $j=1,\cdots,m-2$, 由B样条函数的局部支撑性, 可得

$$F_2(x,y)=\sum_{s=i-1}^{i+2}\sum_{t=j-1}^{j+2}\{\frac{A_s(x)B_t(y)}{\sum\limits_{s=i-1}^{i+2}\sum\limits_{t=j-1}^{j+2}A_s(x)B_t(y)}\}z_{st}. \tag{24}$$

由式(4), 容易知道

$$\begin{cases}\sum\limits_{s=i-1}^{i+2}A_s(x)=1,\ x\in[x_i,x_{i+1}],\\ \sum\limits_{t=j-1}^{j+2}B_t(y)=1,\ y\in[y_j,y_{j+1}].\end{cases} \tag{25}$$

于是式(24)可以写成

$$F_2(x,y)=\sum_{s=i-1}^{i+2}\sum_{t=j-1}^{j+2}A_s(x)B_t(y)f(x_s,y_t).$$

利用泰勒公式, 将$f(x_s,y_t)$, $s=i-1,i,i+1,i+2$, $t=j-1,j,j+1,j+2$以及$f(x,y)$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$在$(x_i,y_j)$处展开如下:

$$f(x_s,y_t)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!(k-l)!}(x_s-x_i)^l(y_t-y_j)^{k-l}\cdot\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial x^l\partial y^{k-l}}+\mathrm{O}(h^{m+1}),\ s=i-1,i,i+1,i+2,\ t=j-1,j,j+1,j+2,\tag{26}$$

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!(k-l)!}(x-x_i)^l(y-y_j)^{k-l}\cdot\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial x^l\partial y^{k-l}}+\mathrm{O}(h^{m+1}),\tag{27}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!(k-l)!}(x-x_i)^l(y-y_j)^{k-l}\cdot\frac{\partial^{k+1} f_{ij}}{\partial x^{l+1}\partial y^{k-l}}+\mathrm{O}(h^{m}),\tag{28}$$

其中: $\frac{\partial^\alpha f_{ij}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}=\frac{\partial^\alpha f(x_i,y_j)}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}$, α,α_1,α_2为非负整数, $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$.

于是

$$\begin{aligned}&F_2(x,y)-f(x,y)=\\&\sum_{s=i-1}^{i+2}\sum_{t=j-1}^{j+2}A_s(x)B_t(y)f(x_s,y_t)-f(x,y)=\\&\sum_{s=i-1}^{i+2}\sum_{t=j-1}^{j+2}A_s(x)B_t(y)(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!(k-l)!}(x_s-x_i)^l(y_t-y_j)^{k-l}\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial x^l\partial y^{k-l}})-\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!(k-l)!}\cdot\\&(x-x_i)^l(y-y_j)^{k-l}\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial x^l\partial y^{k-l}}+\mathrm{O}(h^{m+1})=\\&\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!(k-l)!}\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial x^l\partial y^{k-l}}(\sum_{s=i-1}^{i+2}A_s(x)(x_s-x_i)^l\cdot\sum_{t=j-1}^{j+2}B_t(y)(y_t-y_j)^{k-l}-(x-x_i)^l(y-y_j)^{k-l})+\\&\mathrm{O}(h^{m+1}).\end{aligned}\tag{29}$$

由式(25)知, $\sum_{s=i-1}^{i+2}A_s(x)(x_s-x_i)^0=1$, 此处规定$0^0=1$.

由$x\in[x_i,x_{i+1}]$知, $\frac{x-x_i}{h_x}\in[0,1]$, 又由引理2中式(19)–(22)知

$$\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}+1)-\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}-1)-2\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}-2)=-\frac{x-x_i}{h_x},$$

$$\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}+1)+\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}-1)+4\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}-2)=(\frac{x-x_i}{h_x})^2+\frac{1}{3},$$

$$\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}+1)-\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}-1)-8\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}-2)=-(\frac{x-x_i}{h_x})^3-\frac{x-x_i}{h_x},$$

$$\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}+1)+\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}-1)+16\Omega_3(\frac{x-x_i}{h_x}-2)=2(\frac{x-x_i}{h_x})^3+(\frac{x-x_i}{h_x})^2+\frac{1}{3},$$

也即

$$A_{i-1}(x)-A_{i+1}(x)-2A_{i+2}(x)=-\frac{x-x_i}{h_x},\tag{30}$$

$$A_{i-1}(x)+A_{i+1}(x)+4A_{i+2}(x)=\frac{(x-x_i)^2}{h_x^2}+\frac{1}{3},\tag{31}$$

$$A_{i-1}(x)-A_{i+1}(x)-8A_{i+2}(x)=-(\frac{x-x_i}{h_x})^3-\frac{x-x_i}{h_x},\tag{32}$$

$$A_{i-1}(x)+A_{i+1}(x)+16A_{i+2}(x)=2(\frac{x-x_i}{h_x})^3+(\frac{x-x_i}{h_x})^2+\frac{1}{3},\tag{33}$$

因此

$$\sum_{s=i-1}^{i+2}A_s(x)(x_s-x_i)=x-x_i,$$

$$\sum_{s=i-1}^{i+2}A_s(x)(x_s-x_i)^2=(x-x_i)^2+\frac{1}{3}h_x^2.$$

同理可得

$$\sum_{t=j-1}^{j+2}B_t(y)(y_t-y_j)^{k-l}=\begin{cases}1, & k-l=0,\\ y-y_j, & k-l=1,\\ (y-y_j)^2+\frac{1}{3}h_y^2, & k-l=2.\end{cases}\tag{34}$$

于是

$$\sum_{s=i-1}^{i+2}A_s(x)(x_s-x_i)^l\sum_{t=j-1}^{j+2}B_t(y)(y_t-y_j)^{k-l}-(x-x_i)^l(y-y_j)^{k-l}=$$
$$\begin{cases}1-1=0, & k=0,\ l=0,\\ (x-x_i)-(x-x_i)=0, & k=1,\ l=1,\\ (y-y_j)-(y-y_j)=0, & k=1,\ l=0,\\ (x-x_i)^2+\frac{1}{3}h_x^2-(x-x_i)^2=\frac{h_x^2}{3}, & k=2,\ l=2,\\ (x-x_i)(y-y_j)-\\(x-x_i)(y-y_j)=0, & k=2,\ l=2,\\ (y-y_j)^2+\frac{1}{3}h_y^2-(y-y_j)^2=\frac{h_y^2}{3}, & k=2,\ l=0.\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}&F_2(x,y)-f(x,y)=\\&\frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial^2 x}h_x^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial^2 y}h_y^2+\mathrm{O}(h^3)=\\&\mathrm{O}(h^2),\ (x,y)\in[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}].\end{aligned}\tag{35}$$

故对任意$(x,y)\in\mathscr{U}_0$, $(F_2-f)(x,y)=\mathrm{O}(h^2)$.

下面证明对任意$(x,y)\in\mathscr{U}_0$, $(F_2-f)^{(1,0)}(x,y)=\mathrm{O}(h^2)$. 由式(28)可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=&\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!(k-l)!}(x-x_i)^l(y-y_j)^{k-l}\cdot\\&\frac{\partial^{k+1}f_{ij}}{\partial x^{l+1}\partial y^{k-l}}+\mathrm{O}(h^m)=\\&\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{(l-1)!(k-l)!}(x-x_i)^{l-1}\cdot\\&(y-y_j)^{k-l}\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial x^l\partial y^{k-l}}+\mathrm{O}(h^m).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\\&\sum_{s=i-1}^{i+2}\sum_{t=j-1}^{j+2}A'_s(x)B_t(y)f(x_s,y_t)-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\\&\sum_{s=i-1}^{i+2}\sum_{t=j-1}^{j+2}A'_s(x)B_t(y)(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!(k-l)!}\cdot\\&(x_s-x_i)^l(y_t-y_j)^{k-l}\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial x^l\partial y^{k-l}})-\\&\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{(l-1)!(k-l)!}(x-x_i)^{l-1}(y-y_j)^{k-l}\cdot\\&\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial x^l\partial y^{k-l}}+\mathrm{O}(h^m)=\\&\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{(k-l)!}\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial x^l\partial y^{k-l}}(\frac{1}{l!}\sum_{s=i-1}^{i+2}A'_s(x)(x_s-x_i)^l\cdot\\&\sum_{t=j-1}^{j+2}B_t(y)(y_t-y_j)^{k-l}-\frac{1}{(l-1)!}(x-x_i)^{l-1}\cdot\\&(y-y_j)^{k-l})+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial y^k}(\sum_{s=i-1}^{i+2}A'_s(x)(x_s-x_i)^0\cdot\\&\sum_{t=j-1}^{j+2}B_t(y)(y_t-y_j)^{k-0})+\mathrm{O}(h^m).\end{aligned}\tag{36}$$

由式(25)知, $\sum_{s=i-1}^{i+2}A'_s(x)(x_s-x_i)^0=0$, 从而

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f_{ij}}{\partial y^k}(\sum_{s=i-1}^{i+2}A'_s(x)(x_s-x_i)^0\cdot\\&\sum_{t=j-1}^{j+2}B_t(y)(y_t-y_j)^{k-0})=0.\end{aligned}$$

由式(30)–(32)可知

$$\sum_{s=i-1}^{i+2}A'_s(x)(x_s-x_i)^l=\begin{cases}1, & l=1,\\2(x-x_i), & l=2,\\3(x-x_i)^2+h_x^2, & l=3.\end{cases}$$

再由式(34), 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l!}\sum_{s=i-1}^{i+2}A'_s(x)(x_s-x_i)^l\sum_{t=j-1}^{j+2}B_t(y)(y_t-y_j)^{k-l}-\\&\frac{1}{(l-1)!}(x-x_i)^{l-1}(y-y_j)^{k-l}=\\&\begin{cases}1-1=0, & k=1,\ l=1,\\\frac{1}{2!}2(x-x_i)-(x-x_i)=0, & k=2,\ l=2,\\(y-y_j)-(y-y_j)=0, & k=2,\ l=1,\\\frac{1}{3!}(3(x-x_i)^2+h_x^2)-\\\frac{1}{2!}(x-x_i)^2=\frac{h_x^2}{6}, & k=3,\ l=3,\\\frac{1}{2!}2(x-x_i)(y-y_j)-\\(x-x_i)(y-y_j)=0, & k=3,\ l=2,\\(y-y_j)^2+\frac{1}{3}h_y^2-(y-y_j)^2=\frac{h_y^2}{3}, & k=3,\ l=1.\end{cases}\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\\&\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_{ij}}{\partial x^3}h_x^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_{ij}}{\partial y^3}h_y^2+\mathrm{O}(h^3)=\mathrm{O}(h^2),\end{aligned}$$

故对任意$(x,y)\in\mathscr{U}_0$, $(F_2-f)^{(1,0)}(x,y)=\mathrm{O}(h^2)$.

证毕.

注 3　双输入单输出的第2类B样条模糊系统是利用模糊推理方法得到的一类有理样条函数, 除去边界区间后, 它能以二阶精度逼近函数及其导函数. 需要指出的是, 由于第2类B样条模糊系统是有理样条形式, 因此其计算难度要大于第1类B样条模糊系统, 这将影响它在实际应用中的效果.

5　仿真结果(Simulation results)

为了验证本文提出的两类B样条模糊系统的性能, 本文将把它们应用到模糊系统建模和模糊控制器的设计中. 特别的, 从仿真数据看, 在文献[23,34–35]中所有的隶属函数(包括三角波隶属函数)构造的模糊系统中, 以sinc函数作为隶属函数的模糊系统(sinc模糊系统)具有几乎最好的逼近能力, 故建议工程师在实践中检验sinc模糊系统的性能. 因此, 在下面的仿真中, 本文比较了sinc模糊系统和两类B样条模糊系统的性能.

5.1　逼近函数(Approximation of function)

这一节, 本文将比较sinc模糊系统和两类B样条模糊系统对如下目标函数[35]的逼近效果:

$$\begin{aligned}g_1(x_1,x_2)=&3x_1(x_1-1)(x_1-1.9)(x_1+\\&0.7)(x_1+1.8)\sin x_2,\end{aligned}$$

$(x_1,x_2)\in[-2,2]\times[-2,2]$,

$$g_2(x_1,x_2)=10\frac{\sin(10x_1^2+5x_2^2-6x_2)}{10x_1^2+5x_2^2-6x_2},$$

$(x_1,x_2)\in[-2,2]\times[-2,2]$,

$$g_3(x_1,x_2)=\frac{x_1x_2(x_1+2.5)}{1+x_1^2+x_2^2},$$

$$(x_1,x_2)\in[-2,2]\times[-2,2],$$

$$g_4(x_1,x_2)=8(\sin(4x_1+0.1)+\sin(14x_1)+\sin(11x_1-0.2)+\sin(17x_1+0.3))\sin(10x_2^2+5x_2+1),$$

$$(x_1,x_2)\in[-1,1]\times[-1,1].$$

令$n=m=21$. 于是得到了等距分割的数据$\{(x_i,y_j,z_{ij})|i=0,1,\cdots,n,\ j=0,1,\cdots,m\}$, 其中$g(x_i,y_j)=z_{ij}$. 本文均匀的采样101 × 101个点来得到每个目标函数的实验数据并利用实验数据的最大逼近误差作为评价指标. 对于sinc模糊系统, 取$\sigma_n=n^{\frac{-1}{2(1+0.05)}}$, $\sigma_m=m^{\frac{-1}{2(1+0.05)}}$[23]. 表2展示了最大逼近误差的仿真结果. 显然对于大多数目标函数, B样条模糊系统的逼近能力优于sinc模糊系统.

表 2 sinc模糊系统和B样条模糊系统的最大逼近误差

Table 2 The maximum approximation error of the sinc-FSs, the 1-B-FSs and 2-B-FSs

	sinc-FS	1-B-FS	2-B-FS	逼近区域
g_1	12.1477	**0.4112**	3.7472	$[-2,2]\times[-2,2]$
g_2	7.0467	9.2286	**5.1681**	$[-2,2]\times[-2,2]$
g_3	0.1218	0.0909	**0.0304**	$[-2,2]\times[-2,2]$
g_4	27.0897	**12.3992**	23.6991	$[-1,1]\times[-1,1]$

5.2 模糊推理建模(Modelling based on fuzzy inference)

文献[36]为模糊控制系统提出了一种基于模糊推理的建模方法, 该方法根据模糊系统的插值机理将关于被控对象(实际的动态系统)的模糊推理规则库转换为一类变系数非线性微分方程(组)——HX方程, 从而得到这一系统的数学模型. 文献[37]从理论上证明了HX方程对动态系统具有良好的逼近性能. 本文注意到文献[36–37]中只应用三角波模糊系统构造了HX方程, 由于B样条模糊系统的光滑性明显优于三角波模糊系统, 故本文将利用B样条模糊系统构造HX方程. 为了比较, 本文还利用sinc模糊系统构造了HX方程.

下面, 本文选择一个以Van Der Pol方程为真实模型的系统. Van Der Pol方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=\mu(1-x_1^2(t))x_2(t)-x_1(t),\end{cases}\tag{37}$$

其中置$\mu=1$. 仿真的操作指的是, 根据系统的必要信息建立HX方程, 然后比较在同样初值条件下, 利用三角波模糊系统、sinc模糊系统和B样条模糊系统构造的HX的解对模型(37)解的靠近程度. 仿真的步骤如下:

Step 1 确定变量x_1和x_2的论域. 通过求解方程(37), 可以得到x_1和x_2的最值: $x_{1,\min}=\min\{x_1(t)\}$, $x_{1,\max}=\max\{x_1(t)\}$, $x_{2,\min}=\min\{x_2(t)\}$, $x_{2,\max}=\max\{x_2(t)\}$. 为了有一定的误差容度, 将这些最值扩展, 得到论域$X_1=[a_1,b_1]$和$X_2=[a_2,b_2]$, 其中:

$$a_1=x_{1,\min}-0.1|x_{1,\min}|,\ b_1=x_{1,\max}+0.1|x_{1,\max}|,$$
$$a_2=x_{2,\min}-0.1|x_{2,\min}|,\ b_2=x_{2,\max}+0.1|x_{2,\max}|.$$

Step 2 计算峰点. 给定两个自然数$p>1$, $q>1$, 令$h_1=(b_1-a_1)/(p-1)$, $h_2=(b_2-a_2)/(q-1)$. 计算X_1和X_2的等距节点$x_{1i}=a_1+(i-1)h_1$, $i=1,2,\cdots,p$, $x_{2j}=a_2+(j-1)h_2$, $j=1,2,\cdots,q$. 由方程(37), 计算$\dot{x}_2$的峰点如下: $\dot{x}_{2ij}=(1-x_{1i}^2)x_{2j}-x_{1i}$, $i=1,2,\cdots,p$, $j=1,2,\cdots,q$. 由文献[36]可知道构造HX方程的数据为

$$\{(x_{1i},x_{2j},\dot{x}_{2ij})\}.\tag{38}$$

Step 3 建立HX方程. 利用数据(38), 设计三角波模糊系统、sinc模糊系统和两类B样条模糊系统. 相应的HX方程如下:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=F(x_1(t),x_2(t)).\end{cases}\tag{39}$$

当$F(\cdot)$分别取为三角波模糊系统、sinc模糊系统和两类B样条模糊系统时, 就得到了式(39)相应的HX方程, 分别称为三角波HX方程(tri-HX方程)、sinc-HX方程、第1类和第2类B样条HX方程(1-B-HX和2-B-HX方程).

取$T=20$ s, 初值$(x_1(0),\ x_2(0))=(2,0)$. 对于sinc模糊系统取$\sigma_{x_1}=((\log\ p)/p)^{(1/2(1+0.05))}$, $\sigma_{x_2}=((\log\ q)/q)^{(1/2(1+0.05))}$. 图1–6展示了如下两种情形的仿真结果:

Case 1 $p=6$, $q=6$;

Case 2 $p=12$, $q=12$.

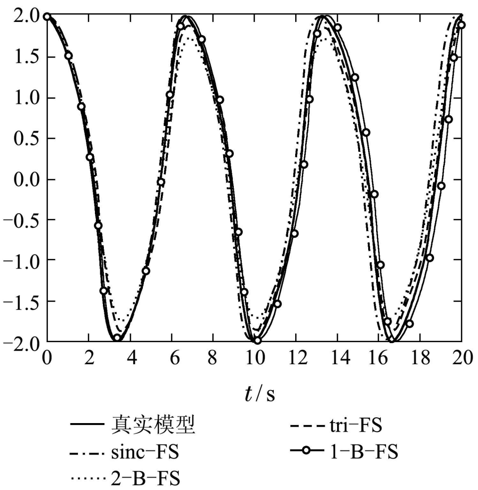

图 1 状态$x_1(t)$在$p=q=6$时的仿真曲线

Fig. 1 Simulation curves of state $x_1(t)$ when $p=q=6$

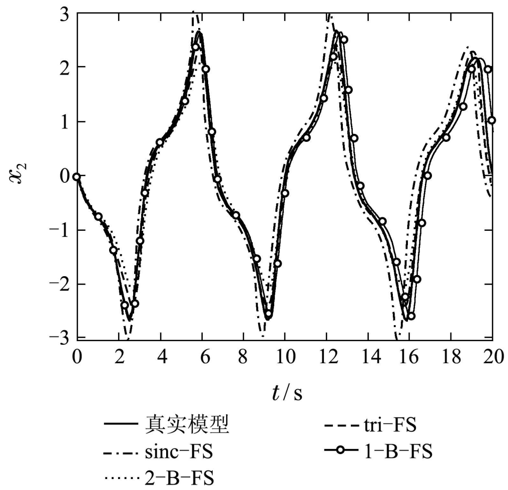

图 2 状态$x_2(t)$在$p=q=6$时的仿真曲线

Fig. 2 Simulation curves of state $x_2(t)$ when $p=q=6$

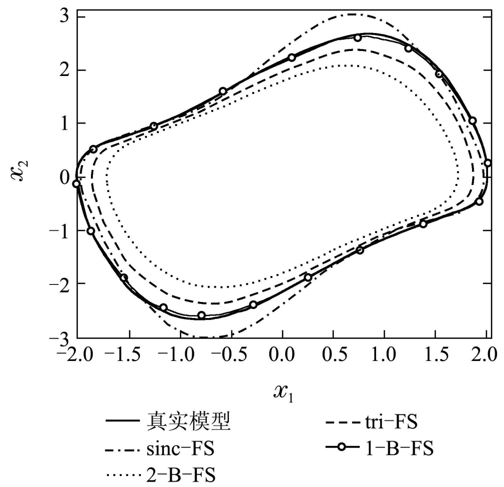

图 3 $p=q=6$时相平面的仿真曲线

Fig. 3 Simulation curves of phase plane $(x_1(t), x_2(t))$ when $p=q=6$

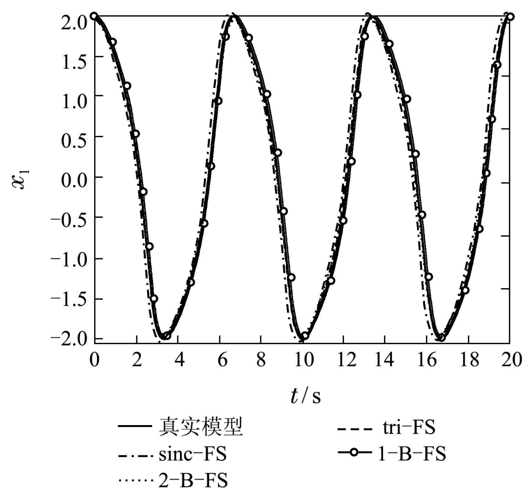

图 4 状态 $x_1(t)$在$p=q=12$时的仿真曲线

Fig. 4 Simulation curves of state $x_1(t)$ when $p=q=12$

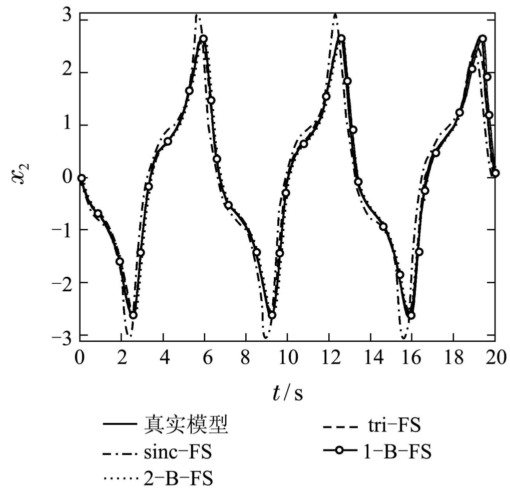

图 5 状态 $x_2(t)$在$p=q=12$时的仿真曲线

Fig. 5 Simulation curves of state $x_2(t)$ when $p=q=12$

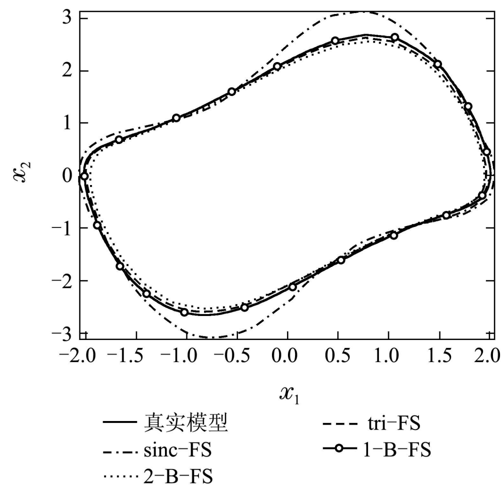

图 6 $p=q=12$时相平面的仿真曲线

Fig. 6 Simulation curves of phase plane $(x_1(t), x_2(t))$ when $p=q=12$

从图1–6可以看出:

1) 对于1-B-HX方程, 无论是在Case 1还是Case 2, 它的解与真实模型的解都很靠近. 特别的, 当$p=q=12$时, 1-B-HX方程的解与真实模型的解几乎重合在一起, 说明1-B-HX方程对真实模型的逼近程度很高;

2) 对于2-B-HX方程, p, q越大, 它的解与真实模型的解越靠近. 然而, 不管Case 1还是Case 2, 2-B-HX方程的解与真实模型解的靠近程度都不如1-B-HX方程;

3) 对于sinc-HX方程, 随着p, q的增大, sinc-HX方程的解也逐渐的靠近真实模型解. 在Case 1和Case 2, sinc-HX方程的解与真实模型解的靠近程度都不如两类B样条HX方程;

4) 对于tri-HX方程, p, q越大, 它的解与真实模型的解越靠近. tri-HX方程的解对真实模型解的靠近程度优于2-B-HX方程, sinc-HX方程, 不如1-B-HX方程.

综上, 上述模糊系统在模糊推理建模中, 按性能从好到坏依次是第1类B样条模糊系统、三角波模糊系

统, 第2类B样条模糊系统, sinc模糊系统.

5.3 变论域自适应模糊控制器(Variable universe adaptive fuzzy controllers)

模糊控制器是闭环的模糊系统, 而自适应模糊控制器是一类带有自适应或者训练算法的模糊控制器[38–42]. 特别的, 李洪兴教授等提出了变论域的思想[43–45], 并利用变论域自适应模糊控制器分别在2001年和2002年实现了四级倒立摆的仿真[46]和实物实验. 为了检验B样条模糊系统的性能, 本文将把B样条模糊系统应用到二级倒立摆的变论域自适应模糊控制器中. 另外, 本文也将sinc模糊系统应用到同样的控制器中, 并比较了它们的控制效果.

二级倒立摆主要由小车、摆1、摆2组成, 它们之间自由链接, 规定顺时针方向的转角和力矩均为正, 并约定以下记号: u为外界作用力, x为小车位移, θ_i为摆杆与铅锤线方向的夹角, O_i, G_i分别为摆杆i的链接点与质心的位置, m_0为小车的质量, m_i为摆杆i的质量, J_i为摆杆i绕其质心G_i的转动惯量, l_i为O_i到摆杆i的质心G_i的距离, f_0为小车与导轨间的滑动摩擦系数, L_i为摆杆i的长度, f_i为摆杆绕O_i的转动摩擦阻力矩系数($i=1,2$). 二级倒立摆的数学模型为

$$H_1\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix}=H_2\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u\\ a_1 g\sin\theta_1\\ a_2 g\sin\theta_2\end{pmatrix},\quad(40)$$

其中:

$$H_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a_1\cos\theta_1 & b_1 & a_2L_1\cos(\theta_2-\theta_1)\\ a_2\cos\theta_2 & a_2L_1\cos(\theta_2-\theta_1) & b_2\end{pmatrix},$$

$$a_1=m_1l_1+m_2L_1,\ a_2=m_2l_2,$$

$$b_1=J_1+m_2L_1^2, b_2=J_2.$$

$$H_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -f_1-f_2 & a_2L_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_1)+f_2\\ 0 & -a_2L_1\dot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1)+f_2 & -f_2\end{pmatrix},$$

对于二级倒立摆系统, 控制的目标是通过对小车施加作用力u, 使得摆1、摆2的转角θ_1, θ_2趋于零, 同时, 小车要移动到指定位置$x_{\rm d}$处. 在仿真实验中, 二级倒立摆系统中诸参数分别取为: $m_1=0.373\,\mathrm{kg}$, $m_2=0.088\,\mathrm{kg}$, $L_1=0.397\,\mathrm{m}$, $l_1=0.31815\,\mathrm{m}$, $L_2=0.345\,\mathrm{m}$, $l_2=0.15205\,\mathrm{m}$, $J_1=0.044048\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, $J_2=0.00297947\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, $f_1=0\,\mathrm{N\cdot s\cdot m}$, $f_2=0\,\mathrm{N\cdot s\cdot m}$, $\mathrm{g}=9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

取系统的状态变量$z=(x,\theta_1,\theta_2,\dot{x},\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2)^{\mathrm T}$, 利用文献[46]中的方法为二级倒立摆设计变论域自适应模糊控制器

$$u=\|k\|_2\beta(t)F\big(\frac{e}{\alpha(e)},\frac{ec}{\alpha(ec)}\big),\quad(41)$$

其中k是由LQR方法获得的状态反馈矩阵,

$$\beta(t)=\int_0^t 5(e+ec)F\big(\frac{e}{\alpha(e)},\frac{ec}{\alpha(ec)}\big)\|k\|_2\mathrm{d}t+1,$$

$F(\cdot)$是一个双输入单输出的模糊系统,

$$e\triangleq\frac{k(1)z(1)+k(2)z(2)+k(3)z(3)}{\|k\|_2},$$

$$ec\triangleq\frac{k(4)z(4)+k(5)z(5)+k(6)z(6)}{\|k\|_2}$$

分别称为综合误差和综合误差变化率, $\alpha(e)$, $\alpha(ec)$是它们的伸缩因子.

取综合误差$e(t)$和综合误差变化率$ec(t)$的初始论域及模糊系统$F(\cdot)$的输出论域均为$[-1,1]$. 取$e(t)$的模糊划分为A_1=NB, A_2 = NM, A_3 = NS, A_4 = ZO, A_5 = PS, A_6 = PM, A_7 = PB, $ec(t)$的模糊划分为B_1 = NB, B_2 = NM, B_3 = NS, B_4 = ZO, B_5 = PS, B_6 = PM, B_7 = PB. 其中: NB为负大, NM为负中, NS为负小, ZO为零, PS为正小, PM为正中, PB为正大. 基于综合误差$e(t)$和综合误差变化率$ec(t)$的控制规则见表3[46].

表 3 模糊控制规则

Table 3 Fuzzy control rules

ec	e						
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
B_1	– 0.8333	– 0.8333	– 0.6333	– 0.5	– 0.3333	– 0.1667	0
B_2	– 0.8333	– 0.6333	– 0.5	– 0.3333	– 0.1667	0	0.1667
B_3	– 0.6333	– 0.5	– 0.3333	– 0.1667	0	0.1667	0.3333
B_4	– 0.5	– 0.3333	– 0.1667	0	0.1667	0.3333	0.5
B_5	– 0.3333	– 0.1667	0	0.1667	0.3333	0.5	0.6333
B_6	– 0.1667	0	0.1667	0.3333	0.5	0.6333	0.8333
B_7	0	0.1667	0.3333	0.5	0.6333	0.8333	0.8333

于是, 构造模糊系统$F(\cdot)$的输入输出数据为

$$\{(x_i, y_j, z_{ij}) | i = 1, 2, \cdots, 7, j = 1, 2, \cdots, 7\}, \tag{42}$$

其中: $(x_1, x_2, \cdots, x_7) = (-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_7) = (-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$, 表3中的数据构成矩阵$(z_{ij})_{7\times 7}$. 由数据(42)可以构造三角波模糊系统, sinc模糊系统及两类B样条模糊系统.

取$Q = \mathrm{diag}([1, 1, 1, 1, 1, 1])$, $R = 0.1$, 本文利用MATLAB求得LQR方法的状态反馈矩阵k. 取$\alpha(e) = 1$, $\alpha(ec) = 1$, 对于sinc模糊系统, 取$\sigma_x = \sigma_y = ((\log 7)/7)^{(1/2(1+0.05))}$. 将式(41)中的$F(\cdot)$用三角波模糊系统、sinc模糊系统、两类B样条模糊系统代替, 就得到相应的模糊控制器, 分别记为$u_{\text{tri-FS}}$, $u_{\text{sinc-FS}}$, $u_{\text{1-B-FS}}$ 和$u_{\text{2-B-FS}}$. 取状态初值$z_0 = (0, 0.08, -0.08, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $T = 100\,\mathrm{s}$, $x_{\mathrm{d}} = 0.1$. 表4给出控制器$u_{\text{tri-FS}}$, $u_{\text{sinc-FS}}$, $u_{\text{1-B-FS}}$和$u_{\text{2-B-FS}}$对应的控制系统的性能指标, 其中调整时间是指系统到达并保持在稳态值2%范围内需要的时间, $\int u^2 \mathrm{d}t$表示消耗的能量. 由表4容易看出:

1) $u_{\text{tri-FS}}$, $u_{\text{1-B-FS}}$和$u_{\text{2-B-FS}}$的控制性能均优于$u_{\text{sinc-FS}}$. 特别的, 前三者的能量消耗远低于后者;

2) $u_{\text{tri-FS}}$, $u_{\text{1-B-FS}}$和$u_{\text{2-B-FS}}$的控制性能差别不大.

表 4　三角波模糊系统、sinc模糊系统和两类B样条模糊系统相应的控制系统的性能指标

Table 4　Performance index of control systems by tri-FS, sinc-FS, 1-B-FS and 2-B-FS

state	index	tri-FS	1-B-FS	2-B-FS	sinc-FS
x		0	0	0	0
θ_1	稳态误差	0	0	0	0
θ_2		0	0	0	0
x		0.4531	0.4486	0.4531	0.5686
θ_1	超调量	0.2785	0.2819	0.2785	0.5258
θ_2		0.1452	0.1460	0.1452	0.2465
x		4.2998	4.2796	4.2975	5.2235
θ_1	调整时间	1.5741	1.5364	1.5735	2.1402
θ_2		1.5741	1.5364	1.5735	2.1402
	$\int u^2 \mathrm{d}t$	32.2231	33.1562	32.2266	266.3583

注 4　为了比较利用sinc模糊系统和三角波模糊系统以及两类B样条模糊系统的控制器的控制性能, 本文选了较小的状态初值$z_0 = (0, 0.08, -0.08, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 若状态初值过大, 利用sinc模糊系统的控制器就不能实现二级倒立摆的稳定控制. 比如, 若取$z_0 = (0, 0.3, -0.3, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 利用sinc模糊系统的控制器已经不能实现倒立摆的稳定控制, 而利用三角波模糊系统和两类B样条模糊系统的控制器仍可以实现倒立摆的稳定和定位控制.

6　结论(Conclusion)

本文利用数值逼近中的B样条函数方法设计了两类B样条模糊系统, 证明了它们能够逼近函数及其导函数. 其中, 利用一种线性外推的方法对原始数据进行合适的预处理本文得到了第1类B样条模糊系统, 这里线性外推的方法保证了设计第1类B样条模糊系统的过程是可行的, 而直接利用数据设计了第2类B样条模糊系统. 从逼近能力来看, 两类B样条模糊系统的逼近能力均优于sinc模糊系统; 从模糊推理建模的效果来看, 性能最好的是第1类B样条模糊系统; 而从控制器的控制效果来看, 两类B样条模糊系统的性能与三角波模糊系统性能差别不大, 均优于sinc模糊系统.

一般来说, B样条是计算几何中用来定义曲线和曲面的. 由于第1类B样条模糊系统是B样条函数的线性组合, 第2类B样条模糊系统是一类有理样条函数, 也即它们都是用B样条定义的. 由此本文建立了模糊系统与计算几何中曲线曲面之间的联系. 于是可以利用计算几何中调整曲线曲面的方法来调整模糊系统, 这将是笔者进一步的工作.

参考文献(References):

[1] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I [J]. *Information Sciences*, 1975, 8(3): 199 – 249.

[2] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—II [J]. *Information Sciences*, 1975, 8(4): 301 – 357.

[3] ZADEH L A. The concept of a linguistic variableand its application to approximate reasoning—III [J]. *Information Sciences*, 1975, 9(1): 43 – 80.

[4] WANG D G, SONG W Y, LI H X. Analysis and design of time-variant fuzzy systems based on dynamic fuzzy inference [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 60(3): 464 – 489.

[5] ZENG X J, SIGNH M G. Approximation theory of fuzzy systems—SISO case [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1994, 2(2): 162 – 176.

[6] ZENG X J, SIGNH M G. Approximation theory of fuzzy systems—MIMO case [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1995, 3(2): 219 – 235.

[7] ZENG X J, SIGNH M G. Approximation properties of fuzzy systems generated by the min inference [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 1996, 26(1): 187 – 193.

[8] LIU P Y, LI H X. Analysis for $Lp(\mu)$-norm approximation capability of generalized Mamdani fuzzy systems [J]. *Information Science*, 2001, 138(1/2/3/4): 195 – 210.

[9] ZENG X J, SIGNH M G. A relationship between membership functions and approximation accuracy in fuzzy systems [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 1996, 26(1): 176 – 180.

[10] ZENG X J, SIGNH M G. Approximation accuracy analysis of fuzzy systems as function approximators [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 44 – 63.

[11] ZENG K, ZHANG N Y, XU W L. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(6) : 773 – 780.

[12] YING H. General SISO Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1998, 6(4): 582 – 587.

[13] YING H. Sufficient conditions on uniform approximation of multivariate functions by general Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 1998, 28(4): 515 – 520.

[14] ELBADAWI I, GALLANT A R, SOUZA G. An elasticity can be estimated consistently without a priory knowledge of functional form [J]. *Econometrica*, 1983, 51(6): 1731 – 1751.

[15] ANDREWS D K. Asymptotic normality of series estimators for nonparametric and semiparametric regression models [J]. *Econometrica*, 1991, 59(2): 307 – 345.

[16] JORDAN M I. Generic constraints on underspecified target trajectories [C] //*International Joint Conference on Neural Networks*. Washinton DC: IEEE, 1989, 1: 217 – 225.

[17] ECKMANN J P, OLIFFSON KAMPHORST S, RUELLE D, et al. Lyapunov exponents from time series [J]. *Physical Review A*, 1986, 34: 4971 – 4979.

[18] MENCATTINI A, SALMERI M, SALSANO A. Sufficient conditions to impose derivative constraints on MISO Takagi-Sugeno fuzzy logic systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, 13(4): 454 – 467.

[19] KREINOVICH V, NGUYEN H T, YAM Y. Fuzzy systems are universal approximators for a smooth function and its derivatives [J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2000, 15(6): 565 – 574.

[20] LANDAJO M, RIO M J, PEREZ R. A note on smooth approximation capabilities of fuzzy systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2001, 9(2): 229 – 237.

[21] HASSINE R, KARRAY F, ALIMI A M, et al. Approximation properties of fuzzy systems for smooth functions and their first-order derivative [J]. *IEEE Transactions Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2003, 33(2): 160 – 168.

[22] LI H X. Interpolation mechanism of fuzzy control [J]. *Science in China (Series E: Technological Sciences)*, 1998, 41(3): 313 – 320.

[23] LUO Q, YANG W Q, YI D Y. Kernel shapes of fuzzy sets in fuzzy systems for function approximation [J]. *Information Sciences*, 2008, 178(3): 836 – 857.

[24] LONG Z Q, LIANG X M, YANG L R. Some approximation properties of adaptive fuzzy systems with variable universe of discourse [J]. *Information Sciences*, 2010, 180(16): 2991 – 3005.

[25] LI H X, YUAN X H, WANG J Y, et al. The normal numbers of the fuzzy systems and their classes [J]. *Science China (Information Sciences)*, 2010, 53(11): 2215 – 2229.

[26] SCHUMAKER L L. *Spline Functions: Basic Theroy* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[27] BROWN M, HARRIS C J. A nonlinear adaptive controller: a comparison between fuzzy logic control and neural control [J]. *IMA Journal Mathematical Control Information*, 1991, 8(3): 239 – 265.

[28] 杨文光, 赵海良. 基于样条插值的模糊控制算法 [J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(3): 152 – 157.
(YANG Wenguang, ZHAO Hailiang. Fuzzy control algorithm based on spline interpolation [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2009, 23(3): 152 – 157.)

[29] ZHANG J W, ALOIS K. Constructing fuzzy contrllers with B-splines models-principles and applications [J]. *International Joural of Intelligent Systems*, 1998, 13(2/3): 257 – 285.

[30] 谭彦华, 李洪兴, 许吉祥. 两类B样条模糊系统及其应用 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(11): 1651 – 1657.
(TAN Yanhua, LI Hongxing, XU Jixiang. Two classes of B-spline fuzzy systems and their applications [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(11): 1651 – 1657.)

[31] HALL C A. Natural cubic and bicubic spline interpolation [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1973, 10(6): 1055 – 1060.

[32] 李岳生, 齐东旭. 样条函数方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.
(LI Yuesheng, QI Dongxu. *Spline Function Methods* [M]. Beijing: Science Press, 1979.)

[33] 梁学章, 李强. 多元逼近 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
(LIANG Xuezhang, LI Qiang. *Multivariate Approximation* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2005.)

[34] MITAIM S, KOSKO B. What is the best shape for a fuzzy set in function approximation? [C] //*Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. New Orleans, Louisiana: IEEE, 1996, 2: 1237 – 1243.

[35] MITAIM S, KOSKO B. The shape of fuzzy sets in adaptive function approximation [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2001, 9(4): 637 – 656.

[36] LI H X, WANG J Y, MIAO Z H. Modelling on fuzzy control systems [J]. *Science in China (Series A: Mathematics)*, 2002, 45(12): 1506 – 1517.

[37] 李洪兴, 宋雯彦, 袁学海, 等. 基于fuzzy推理的时变系统建模 [J]. 系统科学与数学, 2009, 29(8): 1109 – 1128.
(LI Hongxing, SONG Wenyan, YUAN Xuehai, et al. Time-varying system modeling method based on fuzzy inference [J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2009, 29(8): 1109 – 1128.)

[38] WANG L X. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1993, 1(2): 146 – 155.

[39] TONG S C, LI Y M. Observer-based fuzzy adaptive control for strict-feedback nonlinear systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2009, 160(12): 1749 – 1764.

[40] WANG T, TONG S C, LI Y M. Robust adaptive fuzzy control for nonlinear system with dynamic uncertainties based on backstepping [J]. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2009, 5(9): 2675 – 2688.

[41] TONG S C, LIU C L, LI Y M. Fuzzy-adaptive decentralized output-feedback control for large-scale nonlinear systems with dynamical uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(5): 845 – 861.

[42] TONG S C, LI Y M, FENG G, et al. Observer-based adaptive fuzzy backstepping dynamic surface control for a class of MIMO nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2011, 41(4): 1124 – 1135.

[43] 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功 [J] . 模糊系统与数学, 1995, 9(4): 1 – 14.
(LI Hongxing. To see the success of fuzzy logic from mathematical essence of fuzzy control [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1995, 9(4): 1 – 14.)

[44] LI H X, MIAO Z H, LEE E S. Variable universe stable adaptive fuzzy control of a nonlinear system [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2002, 44(5/6): 799 – 815.

[45] LI H X. Adptive fuzzy controllers based on variable universe [J]. *Science China (Series E)*, 1999, 42(1): 10 – 20.

[46] LI H X, MIAO Z H , WANG J Y. Variable universe adaptive fuzzy control on the quadruple inverted pendulum [J]. *Science in China (Series E)*, 2002, 45(2): 213 – 224.

作者简介:

谭彦华 (1980–), 女, 博士, 目前研究方向为模糊系统建模及模糊控制, E-mail: tanyh@hebut.edu.cn;

李洪兴 (1953–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制、变论域自适应控制、不确定性系统的统一理论和微分方程逼近论等, E-mail: lhxqx@bnu.edu.cn;

马秀娟 (1972–), 女, 博士, 目前研究方向为算子代数, E-mail: mxjsusan@hebut.edu.cn;

陈秀引 (1975–), 女, 硕士, 目前研究方向为应用概率统计, E-mail: xy_chen@hebut.edu.cn.