第 30 卷第 7 期
2013 年 7 月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol. 30 No. 7
Jul. 2013

DOI: 10.7641/CTA.2013.12173

基于强传递性的线性时不变系统同时稳定化的充分条件

于天秋[1,2†], 刘世伟[3]

(1. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024; 2. 黑龙江大学 数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080;

3. 哈尔滨建成集团有限公司, 黑龙江 哈尔滨 150030)

摘要: 本文考虑了离散线性时不变系统的同时稳定化问题. 基于强传递性的方法, 本文利用互素因子分解法建立了同时存在多个稳定控制器的充分条件. 此外, 在这个条件下, 本文提出了同时稳定3个系统的控制器的设计方法. 最后, 给出了一个例子验证结果的有效性.

关键词: 同时稳定; 线性时不变系统; 互素因子分解; 强传递性; 控制器

中图分类号: O177.1　　**文献标识码**: A

Sufficient condition for simultaneous stabilization of linear time-invariant systems using strong transitivity approach

YU Tian-qiu[1,2†], LIU Shi-wei[3]

(1. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;
2. School of Mathematical Sciences, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China;
3. Harbin Jiancheng Group Co., LTD, Harbin Heilongjiang 150030, China)

Abstract: The problem of the simultaneous stabilization of linear, time-invariant, discrete-time systems is addressed. Using the strong transitivity approach, we establish sufficient condition for the existence of simultaneously stabilizing controllers based on the coprime factorization. Additionally, this paper presents a new methodology for the design of simultaneously stabilizing controllers for three plants that satisfy a sufficient condition. Finally, a simple example is presented to show the effectiveness of the result.

Key words: simultaneous stabilization; time-invariant linear systems; coprime factorizations; strong transitivity; controllers

1 引言(Introduction)

同时稳定化问题是寻找一个控制器来稳定多个系统, 它在鲁棒控制领域中有着广泛的应用. 这一问题最初是由Saeks和Murray [1], Vidyasagar和Viswanadham [2]提出的. 这个问题提出之后立即受到人们的关注. 在接下来的几十年里, 在各种框架下关于同时稳定化问题的求解出现了大量的研究工作 [3–9]. 两个线性系统可同时稳定化当且仅当某一构造的系统是强稳定化的(参见文献[1–2]). 一个系统是强稳定化的等价于系统的每对不稳定的实零点之间存在偶数个不稳定的实极点 [10], 这样两个系统的同时稳定化问题也就完全解决了. 当考虑3个及3个以上系统的同时稳定化时, 问题就复杂得多. 在文献[11]中, Vidyasagar证明了k个系统是同时稳定化的当且仅当构造的$k-1$个系统是强同时稳定化的(控制器是稳定的). Blondel等人 [12]证明了k个线性系统是同时稳定化的当且仅当相关的$k-2$个系统是双稳定化的(双稳定化即控制器及它的逆都是稳定的). 关于同时稳定化问题的求解, 人们从不同角度出发, 获得了一些研究成果 [13–15]. 尽管多年来, 人们已经给出了不少关于3个及3个以上系统同时稳定的充分条件或必要条件, 但到目前为止, 仍无法找到同两个系统类似的易于判定的充分必要条件. 事实上, Blondel和Gevers在文献[16]中已通过具体的例子明确论证3个系统的同时稳定问题不是有理可决定的. 随着H_∞控制理论的发展, 以色列数学家Feintuch开启了Hilbert空间中套代数结构框架下线性时变系统的控制理论. 在开创性工作中 [17–18], Feintuch和Djouadi在套代数框架下发展了时变系统的内部稳定及鲁棒稳定理论. 随后这一领域得到了迅速的发展, 并且在这个框架下有关系统同时稳定化问题的研究, 产生了一些重要的研究工作(具体可参见文献[17, 19–20]).

收稿日期: 2012–07–20; 收修改稿日期: 2013–04–12.
†通信作者. Tel.: tianqiuyu08@mails.jlu.edu.cn; +86 15546165609.
基金项目: 黑龙江省教育委员会基金资助项目(12521406); 国家自然科学基金委专项基金数学天元基金资助项目(11226121).

最近, 在套代数框架下文献[21]从传递性的角度探讨了3个系统同时稳定化的问题. 特别地, 作者给出了某类系统同时稳定化的充分必要条件. 基于这些结果, 文献[22]建立了同时稳定3个线性时变系统的控制器的参数化表示.

本文主要从强传递性这一新的角度去探讨3个线性时不变系统的同时稳定化问题, 确切地说, 对给定的3个时不变线性系统L_0, L_1, L_2, 如果L_0, L_1是同时稳定化的, 且L_1, L_2是同时稳定化的, 那么在什么条件下可以找到一个控制器C同时稳定L_0, L_1, L_2呢? 基于上述问题, 本文利用互素因子分解的语言给出了3个线性时不变系统同时稳定化的充分条件. 特别地, 提出了同时稳定3个系统的控制器的设计方法.

2　预备知识(Preliminaries)

在本节中, 首先回顾一些基本的概念和结果[17].

设$\mathcal{H}$是复无穷维Hilbert序列空间

$$\ell^2 = \{(x_0, x_1, x_2, \cdots) : x_i \in \mathbb{C},\ \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\},$$

其中$|\cdot|$表示$\mathbb{C}$上标准的Euclidean范数, 内积定义为$(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i \bar{y}_i$. 令$P_n(n \geqslant 0)$是从$\mathcal{H}$到它的$n+1$维子空间$N_n = \{(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots) : x_i \in \mathbb{C}\}$上的标准截断射影. 对于每个$0 \leqslant n < \infty$以及$x \in \mathcal{H}$, 定义半范数$\|x\|_n = \|P_n x\|$. 易见, 半范数族$\{\|\cdot\|_n : 0 \leqslant n < \infty\}$定义了$\mathcal{H}$上的一个拓扑, 称之为预解拓扑[17]. 本文称$\mathcal{H}$在这个预解拓扑下的完备化空间为$\mathcal{H}$的延拓空间, 记为$\mathcal{H}_{\mathrm{e}}$. 易知, $\mathcal{H}_{\mathrm{e}} = \{(x_0, x_1, \cdots) : x_i \in \mathbb{C}\}$. 称$\mathcal{H}_{\mathrm{e}}$上的一个线性变换$T$为一个因果线性系统(或线性系统), 如果对每个$0 \leqslant n < \infty$有$P_n T = P_n T P_n$, 且在预解拓扑下是连续的. 如果$T$限制在$\mathcal{H}$上是有界算子, 那么称系统$T$是稳定的. 本文将所有稳定线性系统构成的代数记为$\mathcal{S}$, 这个代数是含单位元的弱闭Banach代数. 事实上, 代数$\mathcal{S}$是等同于套代数$\tau(\mathcal{N}) := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : P_n A = P_n A P_n, n \geqslant 0\}$, 其中$\mathcal{N}$是一个离散套(参见文献[17,23]). 本文记$\mathcal{L}$表示$\mathcal{H}_{\mathrm{e}}$上全体线性系统构成的代数. 则每个线性系统$L$在基底下的矩阵都可表示为一个无穷维下三角矩阵(不一定是有界的). 若L是下三角的Toeplitz阵(不一定是有界的), 则称L是一个线性时不变系统. 此时记$\mathcal{J}$为所有线性时不变系统构成的代数. 易见$\mathcal{J} \cap \mathcal{S} = H^{\infty}$. 对给定的$L, C \in \mathcal{L}$, 考虑图1的标准反馈配置.

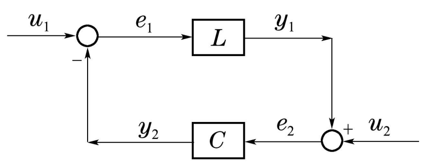

图 1　标准反馈配置

Fig. 1　Standard feedback configuration

在图1中: L表示一个线性系统, C是控制器. u_1, u_2为外部输入, e_1, e_2分别表示对系统和控制器的输入. 这个反馈图的闭环系统方程为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & C \\ L & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

称系统是适定的, 如果内部输入$e = [e_1\ \ e_2]^{\mathrm{T}}$可以表示为外部输入$u = [u_1\ \ u_2]^{\mathrm{T}}$的一个因果函数, 这就等价要求$\begin{bmatrix} I & C \\ L & -I \end{bmatrix}$是可逆的, 这个逆形式上容易计算出, 可以由下面的矩阵给出:

$$H(L, C) = \begin{bmatrix} (I + CL)^{-1} & C(I + LC)^{-1} \\ L(I + CL)^{-1} & -(I + LC)^{-1} \end{bmatrix}.$$

令$\mathcal{D}(L) = \{u \in \mathcal{H} : Lu \in \mathcal{H}\}$, $\mathcal{D}(C) = \{u \in \mathcal{H} : Cu \in \mathcal{H}\}$, 那么$\begin{bmatrix} I & C \\ L & -I \end{bmatrix}$就可以看作是从$\mathcal{D}(L) \oplus \mathcal{D}(C)$到$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$的一个线性变换.

定义 1　如果$H(L, C)$的4个元素都在$\mathcal{S}$中, 那么称闭环系统$\{L, C\}$是稳定的. 称系统L是可稳定化的, 如果存在$C \in \mathcal{L}$使得闭环系统$\{L, C\}$是稳定的.

系统L的图形定义为$G(L) = \{[x\ \ Lx]^{\mathrm{T}} : x \in \mathcal{D}(L)\}$. 为了进一步地刻画可稳定化系统, 下面介绍系统的强左右表示.

定义 2　参见文献[17]中的定义6.2.1和6.2.3, 称$[M\ \ N]^{\mathrm{T}}$是系统L的一个强右表示, 且$M, N \in \mathcal{S}$, 如果

i) $G(L) = \mathrm{Im}[M\ \ N]^{\mathrm{T}}$;

ii) $[M\ \ N]^{\mathrm{T}}$有一个因果有界的左逆, 即存在$X, Y \in \mathcal{S}$使得$[Y\ \ X][M\ \ N]^{\mathrm{T}} = I$.

系统L有一个强左表示$[-\hat{N}\ \ \hat{M}]$, 其中$\hat{M}, \hat{N} \in \mathcal{S}$, 如果

i) $G(L) = \ker[-\hat{N}\ \ \hat{M}]$;

ii) $[-\hat{N}\ \ \hat{M}]$有一个因果有界的右逆, 即存在$\hat{X}, \hat{Y} \in \mathcal{S}$使得$[-\hat{N}\ \ \hat{M}][-\hat{X}\ \ \hat{Y}]^{\mathrm{T}} = I$.

定理 1　参见文献[17]中的定理6.3.4, 设$M, N \in \mathcal{S}$, 则$[M\ \ N]^{\mathrm{T}}$是$L \in \mathcal{L}$的一个强右表示, 当且仅当

i) 存在$X, Y \in \mathcal{S}$使得$[Y\ \ X][M\ \ N]^{\mathrm{T}} = I$;

ii) M在$\mathcal{L}$中是可逆的.

注 1　L的一个强右表示$[M\ \ N]^{\mathrm{T}}$给出了L的一个右互素因子分解$L = NM^{-1}$. 对偶地, 给出了L的一个左互素因子分解$L = \hat{M}^{-1}\hat{N}$, 其中$[-\hat{N}\ \ \hat{M}]$是L的一个强左表示.

下面的结果就是经典的Youla-Kucera参数化定理[17].

定理 2　一个系统L是可稳定化的当且仅当存在$M, N, X, Y, \hat{M}, \hat{N}, \hat{X}, \hat{Y} \in \mathcal{S}$使得$[M\ \ N]^{\mathrm{T}}$与$[-\hat{N}\ \ \hat{M}]$分别为$L$的强右左表示且满足双Bezout恒等式

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -\hat{N} & \hat{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & -\hat{X} \\ N & \hat{Y} \end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix} M & -\hat{X} \\ N & \hat{Y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y & X \\ -\hat{N} & \hat{M} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{1}$$

C稳定L当且仅当C有一个强右表示$[\hat{Y}-NQ\ \ \hat{X}+MQ]^{\mathrm{T}}$和一个强左表示$[-(X+Q\hat{M})\ \ Y-Q\hat{N}]$, 对某个$Q\in\mathcal{S}$.

3 同时稳定化的强传递性(The strong transitivity in simultaneous stabilization)

本节主要从强传递性的角度去探讨3个线性时不变系统的同时稳定化问题, 即, 如果L_0,L_1是同时稳定化的, 且L_1,L_2是同时稳定化的, 是否存在一个控制器C同时稳定L_0,L_1,L_2呢? 现在给出本文的主要结果.

定理 3 设$L_0,L_1,L_2\in\mathcal{J}$, 且$[M_i\ \ N_i]^{\mathrm{T}}$是$L_i$的一个强右表示, 其中$i=0,2$. 假设$C_0$稳定$L_0,L_1$, 且$C_2$稳定$L_1,L_2$. 如果$N_0M_2-N_2M_0$和
$$I+(L_2-L_1)(L_0-L_2)^{-1}(L_0-L_1)\times$$
$$(I+C_0L_1)^{-1}(C_2-C_0)(I+L_1C_2)^{-1}$$
都在$\mathcal{S}$中可逆, 那么L_0,L_1和L_2是同时稳定的.

为了证明这个主要结果, 本文需要下列引理.

引理 1 参见文献[17]中的定理6.3.5, 假设$[M\ \ N]^{\mathrm{T}}$是$L\in\mathcal{L}$的一个强右表示. 则系统L的任一个强右表示$[\bar{M}\ \ \bar{N}]^{\mathrm{T}}$都有如下形式: $[M\ \ N]^{\mathrm{T}}Z$, 其中$Z\in\mathcal{S}$且在$\mathcal{S}$中可逆.

同样地, 如果$L\in\mathcal{L}$有一个强左表示$[-\hat{N}\ \ \hat{M}]$, 则L的任一个强左表示$[-\bar{N}\ \ \bar{M}]$都可写为$Z[-\hat{N}\ \ \hat{M}]$, 其中$Z\in\mathcal{S}$且在$\mathcal{S}$中可逆.

下面本文给出定理3的证明.

证 根据定理2, L_i可稳定化当且仅当存在M_i, $N_i,X_i,Y_i,\hat{M}_i,\hat{N}_i,\hat{X}_i,\hat{Y}_i\in\mathcal{S}$满足Bezout恒等式(1)对$i=0,1,2$. 而且由于$C_0$稳定$L_0,L_1$, C_2稳定L_1,L_2, 借助定理2可知, C_0有一个强右表示$[\hat{Y}_0-N_0T\ \ \hat{X}_0+M_0T]^{\mathrm{T}}$, 且$C_2$也有一个强右表示$[\hat{Y}_2-N_2D\ \ \hat{X}_2+M_2D]^{\mathrm{T}}$, 其中$T,D\in\mathcal{S}$. 又因$C_0$和$C_2$稳定$L_1$, 所以$C_0$有另一个强右表示$[\hat{Y}_1-N_1Q\ \ \hat{X}_1+M_1Q]^{\mathrm{T}}$, C_2也有另一个强右表示$[\hat{Y}_1-N_1R\ \ \hat{X}_1+M_1R]^{\mathrm{T}}$, 其中$Q,R\in\mathcal{S}$. 由引理1知, 存在稳定且其逆也稳定的$Z_1,Z_2$使得
$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1-N_1Q \\ \hat{X}_1+M_1Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{Y}_0-N_0T \\ \hat{X}_0+M_0T \end{bmatrix}Z_1,$$
$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1-N_1R \\ \hat{X}_1+M_1R \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{Y}_2-N_2D \\ \hat{X}_2+M_2D \end{bmatrix}Z_2,$$
则有
$$(\hat{Y}_0-N_0T)Z_1-N_1(R-Q)=(\hat{Y}_2-N_2D)Z_2,$$
$$(\hat{X}_0+M_0T)Z_1+M_1(R-Q)=(\hat{X}_2+M_2D)Z_2.$$

根据定理2和引理1, L_0,L_1和L_2是同时稳定化的当且仅当存在Q_0,Q_1和$Q_2\in\mathcal{S}$, 和$\bar{Z}_1,\bar{Z}_2\in\mathcal{S}$, 且$\bar{Z}_1,\bar{Z}_2$均在$\mathcal{S}$中可逆, 使得
$$\hat{Y}_0-N_0G_0=(\hat{Y}_1-N_1G_1)\bar{Z}_1=(\hat{Y}_2-N_2G_2)\bar{Z}_2,$$
$$\hat{X}_0+M_0G_0=(\hat{X}_1+M_1G_1)\bar{Z}_1=(\hat{X}_2+M_2G_2)\bar{Z}_2.$$
因此, 若
$$A=(G_0-T)Z_1,\ B=D-G_2,$$
$$Z_3=\bar{Z}_1\bar{Z}_2^{-1}Z_2,\ E=G_1Z_3,$$
则要证明L_0,L_1和L_2是同时稳定, 只须验证存在A, $B,E,Z_3\in\mathcal{S}(Z_3^{-1}\in\mathcal{S})$, 使得
$$\begin{bmatrix} N_0 & N_2 & 0 & 0 \\ M_0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_1 & -\hat{Y}_1 \\ 0 & M_2 & M_1 & \hat{X}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ BZ_2 \\ E \\ Z_3 \end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix} N_1(R-Q) \\ M_1(R-Q) \\ N_1R-\hat{Y}_1 \\ \hat{X}_1+M_1R \end{bmatrix}. \tag{2}$$

注意到, 因为$L_0,L_1,L_2\in\mathcal{J}$, 可知$N_0,N_2,M_0$, M_2是两两交换的. 由$N_0M_2-N_2M_0$在$\mathcal{S}$中可逆, 有
$$\begin{bmatrix} N_0 & N_2 \\ M_0 & M_2 \end{bmatrix}$$
在$M_2(\mathcal{S})$中可逆. 借助定理2, 易见
$$\begin{bmatrix} N_1 & -\hat{Y}_1 \\ M_1 & \hat{X}_1 \end{bmatrix}$$
在$M_2(\mathcal{S})$中可逆. 故
$$\begin{bmatrix} N_0 & N_2 & 0 & 0 \\ M_0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_1 & -\hat{Y}_1 \\ 0 & M_2 & M_1 & \hat{X}_1 \end{bmatrix}$$
在$M_4(\mathcal{S})$中是左可逆的. 为了完成证明, 下面只须验证Z_3在$\mathcal{S}$中是可逆的即可.

不难从等式(2)看到,
$$\begin{bmatrix} E \\ Z_3 \end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix} N_1 & -\hat{Y}_1 \\ M_1 & \hat{X}_1 \end{bmatrix}^{-1}(\begin{bmatrix} N_1R-\hat{Y}_1 \\ \hat{X}_1+M_1R \end{bmatrix}-$$
$$\begin{bmatrix} 0 & N_2 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_0 & N_2 \\ M_0 & M_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} N_1(R-Q) \\ M_1(R-Q) \end{bmatrix}), \tag{3}$$

并且, 容易验证:

$$\begin{bmatrix} N_1 & -\hat{Y}_1 \\ M_1 & \hat{X}_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ -\hat{M}_1 & \hat{N}_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_2 \\ M_0 & M_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathscr{A}^{-1}M_2 & -\mathscr{A}^{-1}N_2 \\ -\mathscr{A}^{-1}M_0 & \mathscr{A}^{-1}N_0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中$N_0M_2 - N_2M_0 = \mathscr{A}$. 将式(4)代入式(3)中得$Z_3 = I+(\hat{M}_1N_2-\hat{N}_1M_2)\mathscr{A}^{-1}(N_0M_1-M_0N_1)(R-Q)$. 注意到

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 - N_1Q \\ \hat{X}_1 + M_1Q \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 - N_1R \\ \hat{X}_1 + M_1R \end{bmatrix}$$

分别为C_0和C_2的强右表示. 因此, 本文推出

$$\begin{cases} Q = (M_1 + C_0N_1)^{-1}(C_0\hat{Y}_1 - \hat{X}_1), \\ R = (Y_1C_2 - X_1)(\hat{M}_1 + \hat{N}_1C_2)^{-1}. \end{cases} \quad (5)$$

利用式(5), 得到

$$Z_3 = I + (L_2 - L_1)(L_0 - L_2)^{-1}(L_0 - L_1)$$
$$(I + C_0L_1)^{-1}(C_2 - C_0)(I + L_1C_2)^{-1}.$$

根据假设条件, 易见Z_3在$\mathcal{S}$中是可逆的. 这样便证得结论.

注 2　文献[21–22]从强传递性的角度探讨了套代数框架下线性时变系统的同时稳定化问题, 并且建立了同时稳定3个线性时变系统的控制器的参数化表示. 特别地, 针对于某类系统得到了同时稳定化的充分必要条件(参见文献[21]中的定理3.2). 这些结果对时不变的情形都是成立的. 在本文定理3中, 本文建立了3个线性时不变系统同时稳定化的一个充分条件. 值得注意的是, 在这个条件中, 本文仅仅需要去求解系统L_0, L_2的右互素因子分解, 而不再需要去计算系统L_1和控制器C_0, C_2的互素因子分解. 因此, 在时不变情形下本文的主要结果在很大程度上简化了文献[21]中的定理3.2.

基于定理3的充分条件, 下面给出同时稳定3个时不变系统的控制器的一个设计方法.

定理 4　设C_0稳定L_0, L_1, C_2稳定L_1, L_2. 定义

$$Q = (M_1 + C_0N_1)^{-1}(C_0\hat{Y}_1 - \hat{X}_1),$$
$$R = (Y_1C_2 - X_1)(\hat{M}_1 + \hat{N}_1C_2)^{-1},$$

那么,

$$C = [\hat{X}_1 + M_1Q + (L_0 - L_2)^{-1}(N_1 - L_2M_1)(R - Q)][\hat{Y}_1 - N_1Q - L_0(L_0 - L_2)^{-1}(N_1 - L_2M_1)(R - Q)]^{-1}, \quad (6)$$

稳定L_0, L_1和L_2.

证　不难从定理3看到, 稳定系统L_0, L_1和L_2 的控制器C有如下形式:

$$C = (\hat{X}_1 + M_1Q + M_0A)(\hat{Y}_1 - N_1Q - N_0A)^{-1}.$$

借助定理3中的等式(2), 本文有

$$\begin{bmatrix} A \\ BZ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 & N_2 \\ M_0 & M_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_1(R-Q) \\ M_1(R-Q) \end{bmatrix}.$$

从式(4)得到:

$$A = (N_0 - L_2M_0)^{-1}(N_1 - L_2M_1)(R - Q).$$

最后, 容易验证表达式(6)稳定L_0, L_1和L_2. 这样便证得结论.

注 3　从定理4易见, 在计算控制器C时, 本文只须去求解系统L_1的互素因子分解, 而不需要去考虑系统L_0, L_2和控制器C_0, C_2的互素因子分解.

3.1　实例(Examples)

本文考虑下列3个线性时不变系统:

$$L_0 = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -4 & 2 & & \\ 8 & -4 & 2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \ L_1 = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ -9 & 3 & & \\ 27 & -9 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -2 & & & \\ -4 & -2 & & \\ -8 & -4 & -2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

易证L_0, L_2分别有一个右互素因子分解$L_0 = N_0M_0^{-1}$和$L_2 = N_2M_2^{-1}$, 其中N_0, N_2, M_0和M_2定义如下: $N_0 = I,\ N_2 = -I$,

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \frac{1}{2} & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ -1 & \frac{1}{2} & & \\ & -1 & \frac{1}{2} & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

容易看出L_1允许一个双互素因子分解$L_1 = N_1M_1^{-1} = \hat{M}_1^{-1}\hat{N}_1$, 其中

$$N_1 = \hat{N}_1 = I, \ \ M_1 = \hat{M}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & \\ 1 & \frac{1}{3} & & \\ & 1 & \frac{1}{3} & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

如果定义

$$C_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ -1 & \frac{1}{2} & & \\ & -1 & \frac{1}{2} & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \ C_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & & \\ -1 & -\frac{1}{2} & & \\ & -1 & -\frac{1}{2} & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

那么

$$M_0+C_0N_0=I,\ M_1+C_0N_1=\frac{5}{6}I,$$
$$\hat{M}_1+\hat{N}_1C_2=-\frac{1}{6}I,\ \hat{M}_2+\hat{N}_2C_2=I.$$

由文献[17]中的定理6.6.2和定理6.6.3知, C_0稳定L_0, L_1, 且C_2稳定L_1, L_2. 易验证

$$N_0M_2-N_2M_0,$$
$$I+(L_2-L_1)(L_0-L_2)^{-1}(L_0-L_1)\times$$
$$(I+C_0L_1)^{-1}(C_2-C_0)(I+L_1C_2)^{-1}$$

在$\mathcal{S}$中都是可逆的. 因此, 由定理3知, L_0, L_1和L_2是同时稳定化的.

下面计算稳定L_0, L_1, L_2的控制器C. 注意到,

$$\hat{Y}_1=-6I,\ \hat{X}_1=-6C_2,\ Y_1=\frac{6}{5}I,\ X_1=\frac{6}{5}C_0.$$

根据定理4, 得到控制器

$$C=(\hat{X}_1+M_1Q+M_0A)(\hat{Y}_1-N_1Q-N_0A)^{-1}=$$
$$-\frac{29}{22}I-U,$$

其中

$$U=\begin{bmatrix}0&&&\\1&0&&\\&1&0&\\&&\ddots&\ddots\end{bmatrix}.$$

4 结论(Conclusions)

本文从强传递性这一新的角度, 探讨了线性时不变系统的同时稳定化问题. 本文得到了刻画同时稳定化的一个较为简洁的充分条件, 并且基于这个条件, 建立了同时稳定系统的控制器的一个设计方法.

参考文献(References):

[1] SAEKS R, MURRAY J. Fractional representation algebric geometry, and the simultaneous stabilization problem [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, 27(4): 895 – 903.

[2] VIDYASAGAR M, VISWANADHAM N. Algebraic design techniques for reliable stabilization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, 27(5): 1085 – 1095.

[3] BLONDEL V. *Simultaneous Stabilization of Linear Systems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[4] GHOSH B K. Transcendental and interpolation methods in simultaneous stabilization and simultaneous partial pole placement problems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1986, 24 (6): 1091 – 1109.

[5] GUAN Q, WANG L, XIA B, et al. Solution to the generalized champagne problem on simultaneous stabilization of linear systems [J]. *Science in China Series*, 2007, 50(5): 719 – 731.

[6] HE G, WANG L, YU W. French champagne and Belgian chocolate problems in simultaneous stabilization of linear systems [C] //*Proceedings of the 16th IFAC World Congress*. Seoul, Korea: Elsevier Science Ltd, 2006, 17: 1105 – 1110.

[7] HIROSHI I, RIXAT A, SATORU T. Doubly coprime representation of linear systems and its application to simultaneous stabilization [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2003, 20(1): 21 – 35.

[8] HO-MOCK-QAI B. Simultaneous stabilization of LTI systems by means of nonlinear time-varying feedback [C] //*Proceedings of American Control Conference*. Albuquerque, NM: IEEE, 1997: 3145 – 3149.

[9] SAVKIN A V, PETERSEN I R. A method for simultaneous strong stabilization of linear time-varying systems [J]. *International Journal of Systems Science*, 2000, 31(6): 685 – 689.

[10] YOULA D, BONGIORNO J, LU C. Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants [J]. *Automatica*, 1974, 10(2): 159 – 173.

[11] VIDYASAGAR M. *Control System Synthesis: A Factorization Approach* [M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1985.

[12] BLONDEL V, GEVERS M, MORTINI R, RUPP R. Simutaneous stablization of three or more systems: conditions on the real axis do not suffice [J]. *SIAM Journal Control Optimization*, 1994, 32(2): 572 – 590.

[13] FONTE C, ZASADZINSKI M, BERNIER-KAZANTSEV C, et al. On the simultaneous stabilization of three or more plants [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1101 – 1107.

[14] KHARGONEKAR P, POOLLA K, TANNENBAUM A. Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 30(11): 1088 – 1096.

[15] WANG S, FAIRMAN F W. On the simultaneous stabilization of three plants [J]. *International Journal of Control*, 1994, 59(4): 1095 – 1106.

[16] BLONDEL V, GEVERS M. Simultaneous stabilization of three linear systems is rationally undecidable [J]. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1993, 6(2): 135 – 145.

[17] FEINTUCH A. *Robust Control Theory in Hilbert Space* [M]. New York: Springer, 1998.

[18] DJOUADI S M. Optimal robust disturbance attenuation for continuous time-varying systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(3): 1181 – 1193.

[19] LU Y F, XU X P. The stabilization problem for discrete time-varying linear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(11): 936 – 939.

[20] LU Y F, XU X P. Simultaneous stabilization for a family of plants [J]. *Journal of Mathematical Research & Exposition*, 2008, 28(3): 529 – 534.

[21] YU T Q. The transitivity in simultaneous stabilization [J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(1): 1 – 6.

[22] YU T Q, YAN H. Simultaneous controller design for time- varying linear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(12): 1032 – 1037.

[23] DAVIDSON K R. Nest algebras [M] //*Pitman Research Notes in Mathematics Series*, London: Longman Scientific and Technical, 1988, 191.

作者简介:

于天秋 (1982–), 女, 博士研究生, 讲师, 目前研究方向为算子理论、Hilbert空间中的鲁棒控制, E-mail: tianqiuyu08@mails.jlu.edu.cn;

刘世伟 (1981–), 男, 硕士研究生, 工程师, 目前研究方向为鲁棒控制理论、线性系统理论, E-mail: 37860799@qq.com.