

具有边界切换反馈控制的波方程网络及其稳定性分析

肖琦[†], 许跟起

(天津大学理学院, 天津 300072)

摘要: 本文主要就具有两种不同切换反馈控制的网络系统进行探讨. 该系统是由波方程所描述的二叉树结构, 其中, 系统的一端固定, 另外两端分别施加弹性反馈控制 $\alpha(t)u_{2t}(x, t), \beta(t)u_{3t}(x, t)$, 并且 $\alpha(t), \beta(t)$ 都是以 $2T$ 为周期的Heaviside型函数. 考虑两种情况下闭环系统的稳定性: 一种是两个切换控制同时开同时关的情况, 一种是两个控制器不同时开关的情况, 即在任意的时间段只有一个控制器在工作. 本文利用达朗贝尔方法给出闭环系统的具体的解的表达式, 然后通过迭代方法对产生的迭代矩阵进行谱分析, 由此得到系统的解的性质, 从而得到了系统的指数稳定性和衰减速率.

关键词: 波方程; 切换反馈控制; 达朗贝尔公式; 指数稳定性; 衰减速率

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Stability analysis of networks of wave equations with boundary switch feedback controls

XIAO Qi[†], XU Gen-qi

(College of Science and Technology, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: We consider the system with two different kinds of switch controls. The system is described by the wave equations with the structure of binary tree, of which one end is fixed and the other two ends are damped by the velocities feedback controls $\alpha(t)u_{2t}(x, t), \beta(t)u_{3t}(x, t)$ respectively, where the $\alpha(t), \beta(t)$ are both Heaviside-type functions of periodic $2T$. According to two different cases, we analyze the stability of the closed-loop system. The first one is that the two controls are on-off simulatively, the other case is that there is only one controller working at anytime. Using the D'Alembert formula, we get the explicit expression of the solution for the closed loop system. And then, we analyze the spectrum of the iterate matrices, from which we obtained the properties of the solution. Finally, we get the exponential stability and the decay rate.

Key words: wave equation; switch feedback control; D'Alembert formula; exponential stability; decay rate

1 引言(Introduction)

对于由常微方程描述的具有时变反馈控制的系统的镇定性已经得到很好的研究, 并且也得到了大量优秀的成果^[1-4], 其中, 最经典的问题就是有开关阻尼的振荡器^[1]:

$$\begin{cases} u'' + a(t)u' + u = 0, \\ u(0) = u_0, u'(0) = v_0. \end{cases} \quad (1)$$

如果“阻尼足够活跃”的话, 系统的能量趋于0. 结果显示, 如果 $a(t)$ 在某些区间上是常数且 $\sum_n |I_n|^3 = \infty$, 那么系统的能量是趋于0的, 并且3是最优指数. Pucci和Serrin在文献[5]中提出“精确的切换次数是非常重要的”. 在某些情况下, 即使条件 $\sum_n |I_n|^3 = \infty$ 不满

足, 在保证切换次数合理的情况下, 0仍然是问题的全局吸引子.

但是, 当把由常微描述的系统模型扩展到偏微方程时, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \\ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - a(t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + w(x, t), \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = w_1(x), x \in (0, 1), \end{cases}$$

情况就会变得非常不同. 例如, $a(t)$ 是一个以 $2T$ 为周期的函数, 形式如下:

收稿日期: 2013-11-06; 录用日期: 2014-10-11.

[†]通信作者. E-mail: saraqx@163.com; Tel.: +86 18515092465.

国家自然科学基金项目(NSFC-61174080)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61174080).

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T), \\ 0, & t \in [T, 2T), \end{cases}$$

注意到, 尽管存在很多的 T 值使得下面的式子成立:

$$\int_0^{+\infty} a(\tau) d\tau = \infty, \quad \sum_n |I_n|^3 = \infty,$$

但系统的能量仍然不趋于 0, 其中 $I_n = (2nT, (2n+1)T)$.

为了给出针对这种问题的方法, Haraux 等人研究了具有一致开关反馈阻尼的二阶发展方程的情况, 并且得到了关于系统渐进稳定的条件^[6], 这将式(1)中常微方程的结果很好地推广到了偏微分方程中. 在 2004 年, Ammari 等人对星形弦网络的系统进行分析, 指出系统虽然是适定性, 在所定义的能量空间中不是指数稳定的, 并给出和弦长有关的多项式衰减的估计^[7], 随后又于 2007 年讨论了树形弦网络的稳定性, 给出了类似的结论^[8].

Martinez 和 Vancostenoble^[9]考虑了具有开关或者正负反馈的一根弦的波方程的镇定性问题, 系统方程如下:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t), & x \in (0, 1), \\ w(0, t) = 0, \\ w(1, t) = -a(t)w_t(1, t), \\ w(x, 0) = w_0(x), & w_t(x, 0) = w_1(x). \end{cases}$$

利用达朗贝尔方法, 基于 τ 算子的性质, 他们给出了系统能量函数的计算表达式. 根据上述表达式, 他们证明了, 如果 T 是某些特殊的奇异值, 那么系统的能量是不依赖于时间变化的, 为一个常量. 否则, 系统的能量指数衰减到 0.

特殊地, Gugat 讨论了具有弹性时变输入时延的一维波方程的镇定问题, 并且得到了闭环系统的指数稳定的结果^[10].

基于上述研究背景, 为了将具有时变反馈控制的一根弦的情况推广到多根的情况, 本文将考虑一维波方程所描述的具有 3 根弦的网络系统, 其中一端固定, 另外两端施加两种不同的有界反馈切换控制 $\alpha(t)u_{2t}$ 和 $\beta(t)u_{3t}$, 其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 都是以 $2T$ 为周期的 Heaviside 型函数. 在这种情况下, 本文得到了系统稳定性的结果, 从而节约了控制器的运作时间, 大大减少了功率的输出, 达到了节能的效果.

2 预备知识(Preliminaries)

2.1 系统描述及可解性 (Description of the system and its solution)

设 $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}^+$, 考虑由 3 根弦组成的二叉树系统. 当系统静止的时候, 系统结构如图 1 所示.

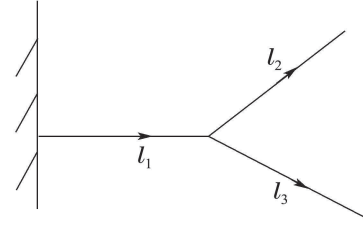


图 1 二叉树结构网络系统图

Fig. 1 The network system with the structure of binary tree

设 $u_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$ 表示每根弦 t 时刻在点 x 处偏离平衡位置的位移, 假设系统的根节点固定, 叶节点是自由的, 则系统的运动由如下具有边界反馈控制器的波方程所描述:

$$\begin{cases} u_{itt}(x, t) - u_{ixx}(x, t) = 0, & x \in (0, \ell_i), & i = 1, 2, 3, \\ u_1(0, t) = 0, \\ u_1(\ell_1, t) = u_2(0, t) = u_3(0, t), \\ u_{1x}(\ell_1, t) - u_{2x}(0, t) - u_{3x}(0, t) = 0, \\ u_{2x}(\ell_2, t) = -\alpha(t)u_{2t}(\ell_2, t), & \alpha(t) \geq 0, \\ u_{3x}(\ell_3, t) = -\beta(t)u_{3t}(\ell_3, t), & \beta(t) \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

系统的能量函数定义如下:

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\ell_i} |u_{it}(x, t)|^2 + |u_{ix}(x, t)|^2 dx.$$

直接求导可以得到

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\alpha(t)|u_{2t}(\ell_2, t)|^2 - \beta(t)|u_{3t}(\ell_3, t)|^2 \leq 0.$$

显然, 系统的能量随着时间的增长是不递增的.

为了讨论在切换控制下系统的稳定性, 设上述系统中 $\alpha(t), \beta(t)$ 都是以 $2T$ 为周期的 Heaviside 型函数, 本文将分以下两种情况讨论:

1) 两个控制器同时开同时关的情况, 即 $\text{sgn}(\alpha(t)) = \text{sgn}(\beta(t))$, 其中:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_0 > 0, & t \in [0, T), \\ 0, & t \in [T, 2T), \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_0 > 0, & t \in [0, T), \\ 0, & t \in [T, 2T). \end{cases}$$

2) 在任意的时间段只有一个控制器在工作的情况, 即 $\text{sgn}(\alpha(t)) \cdot \text{sgn}(\beta(t)) = 0$, 即

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 > 0, & \beta(t) = 0, & t \in [0, T), \\ \alpha(t) = 0, & \beta(t) = \beta_0 > 0, & t \in [T, 2T). \end{cases}$$

在本文中, 主要讨论所有的弦长 $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = T$ 的情况.

定义线性空间

$$V = \{u = (u_1, u_2, u_3)^T \in \prod_{i=1}^3 H^1(0, \ell_i),$$

$$u_1(0) = 0, u_1(\ell_1) = u_2(0) = u_3(0),$$

$$u_{1x}(\ell_1) - u_{2x}(0) - u_{3x}(0) = 0\}$$

以及

$$L = \prod_{i=1}^3 L^2(0, \ell_i),$$

其中 $H^1(0, \ell_i)$ 是区间 $[0, \ell_i]$ 上的 Sobolev 空间.

定义 $\mathcal{H} = V \times L$ 上的内积如下:

$$\begin{aligned} \forall (u, v), (f, g) \in \mathcal{H}, \\ ((u, v), (f, g))_{\mathcal{H}} = \\ \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^{\ell_j} u_{jx}(x) \bar{f}_{jx}(x) dx + \int_0^{\ell_j} v_j(x) \bar{g}_j(x) dx \right). \end{aligned}$$

显然, $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间.

在 $\mathcal{H}$ 中, 定义算子 A 为

$$\begin{aligned} D(A) = \{(f, g) \in V \times L \mid f'(T) = \\ C^T f'(0) - \Gamma g(T)\}, \end{aligned}$$

$$A(f, g) = (g(x), f''(x)), \forall (f, g) \in D(A).$$

由线性算子半群理论知识得到系统(2)存在唯一的解, 并且满足

$$u \in C([0, \infty]; V) \cap C^1([0, \infty]; L).$$

2.2 系统解的达朗贝尔形式 (D'Alembert form solution of the system)

为了研究系统(2)的能量变化, 这里通过经典的达朗贝尔方法求得系统解的达朗贝尔形式.

定理 1 系统(2)的解的达朗贝尔形式如下:

$$u_1(x, t) = f_1(t+x) - f_1(t-x), \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_2(x, t) = \\ f_2(t+x) - f_2(t-x) + f_1(t-x+T) - \\ f_1(t-x-T), \\ u_3(x, t) = \\ f_3(t+x) - f_3(t-x) + f_1(t-x+T) - \\ f_1(t-x-T), \end{cases} \quad (4)$$

其中上式中的 f 函数是任意的二阶连续可微的函数.

证 对于任意的 $(x, t) \in [0, T] \times [0, \infty)$, 设

$$u_i(x, t) = f_i(t+x) + g_i(t-x), \quad i = 1, 2, 3.$$

由固定端点条件 $u_1(0, t) = 0$ 可以得到

$$f_1(t) + g_1(t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

于是, 可以计算出 $u_1(x, t)$ 的表达式:

$$u_1(x, t) = f_1(t+x) - f_1(t-x).$$

由连接条件 $u_1(T, t) = u_2(0, t) = u_3(0, t)$ 知

$$f_1(t+T) - f_1(t-T) =$$

$$f_2(t) + g_2(t) = f_3(t) + g_3(t).$$

由上面的表达式得到

$$g_2(t-x) = f_1(t-x+T) - f_1(t-x-T) - f_2(t-x),$$

$$g_3(t-x) = f_1(t-x+T) - f_1(t-x-T) - f_3(t-x).$$

因此

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = \\ f_2(t+x) - f_2(t-x) + f_1(t-x+T) - \\ f_1(t-x-T), \\ u_3(x, t) = \\ f_3(t+x) - f_3(t-x) + f_1(t-x+T) - \\ f_1(t-x-T). \end{aligned}$$

于是定理1得证.

由定理1, 很容易计算 $E(0)$ 的形式如下:

$$\begin{aligned} E(0) = \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^T (|u_{it}(x, 0)|^2 + |u_{ix}(x, 0)|^2) dx = \\ \int_0^T [|f_1'(x)|^2 + |f_1'(x-T)|^2 + \\ |f_2'(x)|^2 + |f_3'(x)|^2] dx + \\ \int_0^T |f_1'(x) - f_1'(x-2T) - f_2'(x-T)|^2 dx + \\ \int_0^T |f_1'(x) - f_1'(x-2T) - f_3'(x-T)|^2 dx. \end{aligned}$$

在定理1的基础上, 对系统(2)的达朗贝尔形式的解进一步分析, 得到如下的结论:

推论 1 系统(2)的解的达朗贝尔形式具有如下的迭代关系:

$$\begin{pmatrix} f_1'(t+2nT) \\ f_2'(t+2nT+T) \\ f_3'(t+2nT+T) \end{pmatrix} = A^n(t) \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t+T) \\ f_3'(t+T) \end{pmatrix},$$

其中 $A(t)$ 是迭代矩阵, 形式如下:

$$A(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2\xi & -\xi & 2\xi \\ -2\eta & 2\eta & -\eta \end{pmatrix},$$

$$\xi = \frac{1 - \alpha(t)}{1 + \alpha(t)}, \quad \eta = \frac{1 - \beta(t)}{1 + \beta(t)}.$$

证 在定理1给出解的达朗贝尔形式的基础上, 由网络系统内部连接点的力平衡条件, 即 Neumann-Kirchhoff 条件:

$$u_{1x}(T, t) - u_{2x}(0, t) - u_{3x}(0, t) = 0,$$

得到如下方程:

$$f_1'(t) = \frac{1}{3} f_1'(t-2T) + \frac{2}{3} f_2'(t-T) + \frac{2}{3} f_3'(t-T). \quad (5)$$

由末端端点条件 $u_{2x}(T, t) = -\alpha(t)u_{2t}(T, t)$ 和

$u_{3x}(T, t) = -\beta(t)u_{3t}(T, t)$, 得到

$$f_2'(t+T) = -\frac{2}{3}\xi f_1'(t-2T) - \frac{1}{3}\xi f_2'(t-T) + \frac{2}{3}\xi f_3'(t-T), \quad (6)$$

$$f_3'(t+T) = -\frac{2}{3}\eta f_1'(t-2T) + \frac{2}{3}\eta f_2'(t-T) - \frac{1}{3}\eta f_3'(t-T), \quad (7)$$

其中:

$$\xi = \frac{1-\alpha(t)}{1+\alpha(t)}, \quad \eta = \frac{1-\beta(t)}{1+\beta(t)}.$$

显然, $\xi, \eta \in (-1, 1], \forall t \geq 0$.

将式(5)–(7)写成如下的矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t+T) \\ f_3'(t+T) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} f_1'(t-2T) \\ f_2'(t-T) \\ f_3'(t-T) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中 $A(t)$ 是迭代算子, 形式如下:

$$A(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2\xi & -\xi & 2\xi \\ -2\eta & 2\eta & -\eta \end{pmatrix}.$$

因为 ξ, η 都以 $2T$ 为周期, 由式(8)可知

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f_1'(t+2nT) \\ f_2'(t+2nT+T) \\ f_3'(t+2nT+T) \end{pmatrix} = \\ & \prod_{j=1}^n A(t+2jT) \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t+T) \\ f_3'(t+T) \end{pmatrix} = \\ & A^n(t) \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t+T) \\ f_3'(t+T) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

本节利用达朗贝尔方法求出了解的具体形式并利用系统的初始条件得到了系统的达朗贝尔形式解的关系式, 下面将对中间产生的迭代矩阵 $A(t)$ 进行谱分析.

3 $A(t)$ 的谱分析(Spectral analysis of $A(t)$)

本节主要讨论矩阵 $A(t)$ 的谱, 并且给出谱半径的估计.

对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 计算 $\det(\lambda I - A(t))$, 得到 $A(t)$ 的特征多项式:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{3}(\xi + \eta - 1)\lambda^2 + \frac{1}{3}(\xi + \eta - \xi\eta)\lambda + \xi\eta.$$

显然

$$p(-1) = \frac{4}{3}(\xi\eta - 1) < 0, \quad p(0) = \xi\eta, \\ p(1) = \frac{2}{3}(\xi + 1)(\eta + 1) > 0.$$

由此可以知道至少存在一个实根 $\lambda_1 \in (-1, 1)$.

为了讨论其他两个根 λ_2, λ_3 的情况, 首先给出下面关于 $p(\lambda)$ 单调性的引理:

引理 1 对于 $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(\lambda)$ 的单调性如下:

1) 如果 ξ, η 满足条件 $\eta \in (-1, 11 - 6\sqrt{3})$, $\xi \in (\xi', 1)$ 或者 $\eta \in [11 - 6\sqrt{3}, 1)$, $\xi \in (-1, 1)$, 则 $p(\lambda)$ 是严格单调递增的;

2) 如果 $\eta \in (-1, 11 - 6\sqrt{3})$, $\xi \in (-1, \xi')$, 则 $p(\lambda)$ 在 $(-1, x_1) \cup (x_2, 1)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减. 其中:

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{11(1-\eta) - \sqrt{117\eta^2 - 198\eta + 117}}{2}, \\ x_1 &= -\frac{1}{9}(\xi + \eta - 1) - \\ & \quad \frac{1}{9}\sqrt{\xi^2 + 11(\eta - 1)\xi + \eta^2 - 11\eta + 1}, \\ x_2 &= -\frac{1}{9}(\xi + \eta - 1) + \\ & \quad \frac{1}{9}\sqrt{\xi^2 + 11(\eta - 1)\xi + \eta^2 - 11\eta + 1}, \end{aligned}$$

且 $\xi', x_1, x_2 \in (-1, 1)$.

证 计算 $p(\lambda)$ 的导数 $p'(\lambda)$:

$$p'(\lambda) = 3\lambda^2 + \frac{2}{3}(\xi + \eta - 1)\lambda + \frac{1}{3}(\xi + \eta - \xi\eta).$$

其最小值点

$$\lambda = -\frac{1}{9}(\xi + \eta - 1) \in (-1, 1), \quad (10)$$

最小值为

$$p'(-\frac{1}{9}(\xi + \eta - 1)) = -\frac{1}{27}h(\xi),$$

其中

$$h(\xi) = (\xi + \eta - 1)^2 - 9(\xi + \eta - \xi\eta) = \xi^2 + 11(\eta - 1)\xi + \eta^2 - 11\eta + 1.$$

分下面两种情况进行讨论:

1) $h(\xi) < 0$.

在这种情况下, 显然, $p'(\lambda) > 0$. 于是, $p(\lambda)$ 是严格递增的实函数.

2) $h(\xi) \geq 0$.

在这种情况下, 方程 $p'(\lambda) = 0$ 有两个零点, 设为 x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{9}(\xi + \eta - 1) - \frac{1}{9}\sqrt{h(\xi)}, \\ x_2 &= -\frac{1}{9}(\xi + \eta - 1) + \frac{1}{9}\sqrt{h(\xi)}. \end{aligned}$$

由于

$$p'(-1) = \frac{1}{3}(11 - \xi - \eta - \xi\eta) > 0,$$

$$p'(1) = (2 + \xi + \eta) + \frac{1}{3}(1 - \xi\eta) > 0,$$

结合式(10), 可以得到 $x_1, x_2 \in (-1, 1)$. 于是, $p(\lambda)$ 的性质可以总结如下:

$$\begin{cases} p(\lambda) \nearrow, & \text{如果 } \lambda \in (-1, x_1) \cup (x_2, 1), \\ p(\lambda) \searrow, & \text{如果 } \lambda \in (x_1, x_2). \end{cases}$$

在这种情况下, $p(\lambda)$ 的大致趋势如图2-4所示.

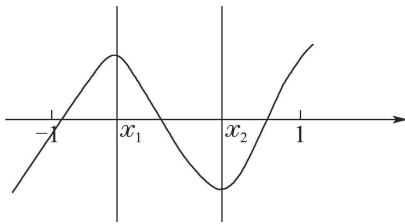


图2 所有的根都是实数, 且在 $(-1, 1)$ 中

Fig. 2 All roots are real and in $(-1, 1)$

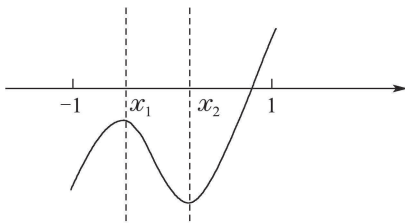


图3 只有一个实根, 且在 $(-1, 1)$ 中

Fig. 3 There is only one real root and in $(-1, 1)$

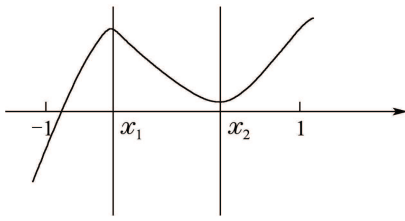


图4 只有一个实根, 且在 $(-1, 1)$ 中

Fig. 4 There is only one real root and in $(-1, 1)$

下面, 对 $h(\xi)$ 的符号进行讨论.

$\forall \eta \in (-1, 1]$, $h(\xi)$ 的对称轴是

$$\xi = \frac{11(1 - \eta)}{2} \geq 0,$$

且 $\Delta = 117\eta^2 - 198\eta + 117 > 0$. 于是

$$h(1) = \eta^2 - 9 < 0,$$

$$\text{sgn}(h(-1)) = \text{sgn}(\eta^2 - 22\eta + 13) =$$

$$\begin{cases} 1, & \eta \in (-1, 11 - 6\sqrt{3}), \\ -1, & \eta \in (11 - 6\sqrt{3}, 1]. \end{cases}$$

因此, 对于 $\eta \in (-1, 11 - 6\sqrt{3})$, $h(\xi)$ 只有一个根 ξ' :

$$\xi' =$$

$$\frac{11(1 - \eta) - \sqrt{117\eta^2 - 198\eta + 117}}{2} \in (-1, 1),$$

所以

$$\text{sgn}(h(\xi)) = \begin{cases} 1, & \xi \in (-1, \xi'), \\ -1, & \xi \in (\xi', 1). \end{cases}$$

对于 $\forall \eta \in (11 - 6\sqrt{3}, 1]$, 有 $h(\xi) < 0$, $\forall \xi \in (-1, 1]$.

综上分析, 就可以得到引理1.

利用单调性就可以得到 $p(\lambda)$ 的根的情况如下:

引理2 当 $p(\lambda)$ 严格递增或者 $p(\lambda)$ 不严格递增但是 $p(x_1) \cdot p(x_2) > 0$ 时, $p(\lambda)$ 只有一个实根, 另外两个根为共轭的复数;

当 $p(\lambda)$ 不严格递增但是 $p(x_1) \cdot p(x_2) < 0$ 时, $p(\lambda)$ 有3个实根且在 $(-1, 1)$ 中.

下面的定理给出 $A(t)$ 的谱半径的估计.

定理2 对于 $\forall \xi, \eta \in (-1, 1]$, $A(t)$ 的谱半径 $r(A) = \max\{|\lambda_i|, i = 1, 2, 3\} < 1$.

证 由引理1和2知, 如果 $p(\lambda)$ 的根均为实数, 那么很容易得到 $A(t)$ 的谱半径 $r(A) = \max\{|\lambda_i|, i = 1, 2, 3\} < 1$ 的结论.

当 $p(\lambda)$ 有一个实根, 两个复根的时候, 为了确定其他两个复根 λ_2, λ_3 的模的范围, 考虑如下两种情况:

1) $\xi\eta = 0$. 不失一般性, 设 $\eta = 0$. 于是

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{3}(\xi - 1)\lambda^2 + \frac{1}{3}\xi\lambda.$$

因此, 复根的模满足 $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{\frac{1}{3}|\xi|} < 1$.

2) $\xi\eta \neq 0$. 由根与系数的关系可知

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1|\lambda_2|^2 = -\xi\eta. \quad (11)$$

于是 $|\lambda_2|^2 - 1 = \frac{\xi\eta + \lambda_1}{-\lambda_1}$. 由等式(11)知 $\text{sgn}(-\lambda_1) = \text{sgn}(\xi\eta)$. 为了确定 $\lambda_1 + \xi\eta$ 的符号, 计算

$$p(-\xi\eta) =$$

$$-\xi\eta[(\xi\eta)^2 - \frac{1}{3}(\xi + \eta)\xi\eta + \frac{1}{3}(\xi + \eta - 3)].$$

显然,

$$(\xi\eta)^2 - \frac{1}{3}(\xi + \eta)\xi\eta + \frac{1}{3}(\xi + \eta - 3) \leq 0,$$

$$\forall \xi, \eta \in (-1, 1],$$

也就是说, $\text{sgn}(p(-\xi\eta)) = \text{sgn}(\xi\eta)$.

下面, 将根据 $p(\lambda)$ 的单调性讨论 $\frac{\xi\eta + \lambda_1}{-\lambda_1}$ 的符号:

i) $p(\lambda)$ 单调递增.

如果 $\xi\eta > 0$, 那么 $-\lambda_1 > 0$ 并且 $p(-\xi\eta) > 0 = p(\lambda_1)$. 于是 $-\xi\eta > \lambda_1$, 也就是说 $\frac{\xi\eta + \lambda_1}{-\lambda_1} < 0$, 即 $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$.

如果 $\xi\eta < 0$, 同样得到 $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$.

ii) $p(\lambda)$ 不是单调的.

由图3可看到, 如果 $\xi\eta > 0$, 即 $-\lambda_1 > 0$ 且 $p(-\xi\eta) >$

0. 于是 $-\xi\eta > \lambda_1$. 因此 $\frac{\xi\eta + \lambda_1}{-\lambda_1} < 0$, 即 $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$.

如果 $\xi\eta < 0$, 同样, 有 $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$.

同理, 对于图4, $p(\lambda)$ 只有一个实根的情况, 可以得到结论 $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$.

综上所述, 无论 $p(\lambda) = 0$ 的根是实数还是复数, 都分布在复平面上的单位圆内, 也就是说, $A(t)$ 的谱半径小于1.

4 系统的解的性质(The solution's properties of system)

为了后面估计能量的衰减情况, 在本节分析 $f'_1(t + 2nT)$, $f'_2(t + 2nT + T)$ 和 $f'_3(t + 2nT + T)$ 的性质.

定理3 对于任意的 $t \in [0, 2T]$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_1(t + 2nT) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_2(t + 2nT + T) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_3(t + 2nT + T) = 0,$$

并且它们的衰减速率形式如下:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_1(t + 2(n+1)T)|}{|f'_1(t + 2nT)|} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_2(t + 2(n+1)T + T)|}{|f'_2(t + 2nT + T)|} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_3(t + 2(n+1)T + T)|}{|f'_3(t + 2nT + T)|} &= \gamma, \end{aligned}$$

且 $\gamma \in (0, 1)$.

证 根据根的重数, 将分析上述函数的收敛性.

1) 重数均为1的情况, 即 $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$.

在这种情况下, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 下面的等式成立:

$$\begin{aligned} \lambda_i^n &= g(\lambda_i)p(\lambda_i) + r(\lambda_i) = \\ r(\lambda_i) &= a_n^{(1)}\lambda_i^2 + a_n^{(2)}\lambda_i + a_n^{(3)}, \end{aligned}$$

其中: $p(\lambda)$ 如前定义, $r(\lambda_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 是次数最高为2的多项式, $a_n^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) 为依赖于 n 的系数. 直接计算可以得到如下的表达式:

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &= \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\lambda_2^n}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \\ &\quad \frac{\lambda_3^n}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \\ a_n^{(2)} &= \frac{-(\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1^n}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{(\lambda_1 + \lambda_3)\lambda_2^n}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \\ &\quad \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3^n}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \\ a_n^{(3)} &= \frac{\lambda_2\lambda_3\lambda_1^n}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1\lambda_3\lambda_2^n}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3^n}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}.$$

由Caylay-Hamilton定理,

$$A^n = a_n^{(1)}A^2 + a_n^{(2)}A + a_n^{(3)}I = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} \\ a_{21}^{(n)} & a_{22}^{(n)} & a_{23}^{(n)} \\ a_{31}^{(n)} & a_{32}^{(n)} & a_{33}^{(n)} \end{pmatrix},$$

其中:

$$\begin{cases} a_{11}^{(n)} = (1 - 4\xi - 4\eta)a_n^{(1)} + 3a_n^{(2)} + 9a_n^{(3)}, \\ a_{12}^{(n)} = (2 - 4\xi + 4\eta)a_n^{(1)} + 6a_n^{(2)}, \\ a_{13}^{(n)} = (2 + 4\xi - 2\eta)a_n^{(1)} + 6a_n^{(2)}, \\ a_{21}^{(n)} = (-2\xi + 2\xi^2 - 4\xi\eta)a_n^{(1)} - 6a_n^{(2)}, \\ a_{22}^{(n)} = (-4\xi + \xi^2 + 4\xi\eta)a_n^{(1)} - 3\xi a_n^{(2)} + 9a_n^{(3)}, \\ a_{23}^{(n)} = (-4\xi - 2\xi^2 - 2\xi\eta)a_n^{(1)} + 6a_n^{(2)}, \\ a_{31}^{(n)} = (-2\eta - 4\xi\eta + 2\eta^2)a_n^{(1)} - 6\eta a_n^{(2)}, \\ a_{32}^{(n)} = (-4\eta - 2\xi\eta - 2\eta^2)a_n^{(1)} + 6\eta a_n^{(2)}, \\ a_{33}^{(n)} = (-4\eta + 4\xi\eta + \eta^2)a_n^{(1)} - 3\eta a_n^{(2)} + 9a_n^{(3)}. \end{cases} \quad (12)$$

由式(12)和式(9)得

$$\begin{cases} f'_1(t + 2nT) = x_1\lambda_1^n + x_2\lambda_2^n + x_3\lambda_3^n, \\ f'_2(t + 2nT + T) = y_1\lambda_1^n + y_2\lambda_2^n + y_3\lambda_3^n, \\ f'_3(t + 2nT + T) = z_1\lambda_1^n + z_2\lambda_2^n + z_3\lambda_3^n, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2, 3$ 为不依赖于 n 的系数, 且是多项式 $f'_1(t), f'_2(t + T), f'_3(t + T)$ 的线性组合.

根据定理2的结论, $|\lambda_j| < 1$, 很容易得到如下的式子:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f'_1(t + 2nT) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f'_2(t + 2nT + T) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f'_3(t + 2nT + T) &= 0. \end{aligned}$$

设 $r(A) = \max\{|\lambda_j|, j = 1, 2, 3\}$, 下面将分3种情况给出 $\frac{|f'_1(t + 2(n+1)T)|}{|f'_1(t + 2nT)|}$, $\frac{|f'_j(t + 2(n+1)T + T)|}{|f'_j(t + 2nT + T)|}$, $j = 2, 3$ 的收敛情况.

如果所有的 $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ 都是实数, 那么, 由表达式(13)得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_1(t + 2(n+1)T)|}{|f'_1(t + 2nT)|} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_j(t + 2(n+1)T + T)|}{|f'_j(t + 2nT + T)|} &= \\ \max\{|\lambda_i|\} &= r(A), j = 2, 3, \end{aligned}$$

且 $r(A) \in (0, 1)$.

如果 $|\lambda_2| = |\lambda_3| < |\lambda_1|$, 其中: λ_2, λ_3 为复数, λ_1 为实数. 同样, 可以得到如下的结果:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_1(t + 2(n+1)T)|}{|f'_1(t + 2nT)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_j(t + 2(n+1)T + T)|}{|f'_j(t + 2nT + T)|} = |\lambda_1| = r(A), j = 2, 3,$$

其中 $r(A) \in (0, 1)$.

如果 $|\lambda_2| = |\lambda_3| \geq |\lambda_1|$, 其中: λ_2, λ_3 为复数, λ_1 为实数.

设

$$\gamma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_1(t + 2(n+1)T)|}{|f'_1(t + 2nT)|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_j(t + 2(n+1)T + T)|}{|f'_j(t + 2nT + T)|}, j = 2, 3.$$

下面将证明 $\gamma \in (0, 1)$.

实际上, 如果 $\gamma \geq 1$, 那么, 存在一组子列 n_k 满足

$$\frac{|f'_2(t + 2n_{k+1}T + T)|}{|f'_2(t + 2n_kT + T)|} \geq 1,$$

即对于某些 k_0 , 当 $k > k_0$ 时,

$$|f'_2(t + 2n_{k+1}T + T)| \geq |f'_2(t + 2n_kT + T)|,$$

这和 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_2(t + 2n_kT + T)| = 0$ 矛盾.

于是, 当重数为1的时候, 定理3得证.

2) 有重数为2的根.

不失一般性, 设 $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$. 在这种情况下, 所有的根都是实数.

类似地, 有

$$\lambda_i^n = b_n^{(1)} \lambda_i^2 + b_n^{(2)} \lambda_i + b_n^{(3)}, i = 1, 2, 3.$$

由于 λ_2 的重数为2, 有如下的等式成立:

$$n\lambda_2^{n-1} = 2b_n^{(1)} \lambda_2 + b_n^{(2)}.$$

由上面的方程, 可以求得系数如下:

$$b_n^{(1)} = \frac{(n-1)\lambda_2^n - n\lambda_1\lambda_2^{n-1} + \lambda_1^n}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2},$$

$$b_n^{(2)} = \frac{2\lambda_2^{n+1} + n\lambda_1^2\lambda_2^{n-1} - 2\lambda_1^n\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2},$$

$$b_n^{(3)} = \frac{-n\lambda_2^{n+2} + (n-2)\lambda_1\lambda_2^{n+1} + (n-1)\lambda_1^2\lambda_2^n + \lambda_1^n\lambda_2^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}.$$

由Hamilton-Caylay定理知

$$A^n = b_n^{(1)} A^2 + b_n^{(2)} A + b_n^{(3)}.$$

同理, 与第1种情况类似, 利用Hamilton-Caylay定理可以证明定理3中的结论.

3) 根的重数是3, 即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

在这种情况下, 有如下的代数方程:

$$\begin{cases} \lambda_1^n = c_n^{(1)} \lambda_1^2 + c_n^{(2)} \lambda_1 + c_n^{(3)}, \\ n\lambda_1^{n-1} = 2c_n^{(1)} \lambda_1 + c_n^{(2)}, \\ n(n-1)\lambda_1^{n-2} = 2c_n^{(1)}. \end{cases}$$

解上述方程得到

$$\begin{cases} c_n^{(1)} = \frac{n(n-1)}{2} \lambda_1^n, \\ c_n^{(2)} = (2n - n^2) \lambda_1^{n-1}, \\ c_n^{(3)} = \frac{(-3n^2 + 5n + 2)}{2} \lambda_1^n. \end{cases}$$

同理, 可以求得 A^n 的表达式并由Hamilton-Caylay定理得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_1(t + 2(n+1)T)|}{|f'_1(t + 2nT)|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_j(t + 2(n+1)T + T)|}{|f'_j(t + 2nT + T)|} = \gamma, j = 2, 3,$$

且 $\gamma \in (0, 1)$.

于是定理3得证. 证毕.

注1 通过上面讨论的性质, 很容易知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2t}(T,$

$t + 2nT) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{3t}(T, t + 2nT) = 0$. 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dE(t)}{dt} = 0$, 也就是说, 系统的能量函数趋于一个极限值 E_∞ . 为了进一步研究系统能量的衰减情况, 下面将分别对系统在两种不同的切换控制下分析能量的变化.

5 系统的稳定性分析(Analysis of the system's stability)

5.1 同时开同时关的情况下, 系统的稳定性(The analysis of the stability when the on-off is simultaneous)

本节将考虑切换控制器同时开同时关的情况, 即 $\text{sgn}(\alpha(t)) = \text{sgn}(\beta(t))$ 时, 系统的稳定性问题, 其中

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0, \beta(t) = \beta_0, t \in [0, T), \\ \alpha(t) = \beta(t) = 0, t \in [T, 2T), \end{cases}$$

并且 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 都是以 $2T$ 为周期的函数.

在这种切换控制下, 系统的能量变化总结如下:

定理4 系统的能量是指数衰减的, 并且衰减速率为 $\frac{\ln \gamma(A_0)}{T}$. 其中 $\gamma(A_0) \in (0, 1)$, 且

$$A_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2\xi_0 & \xi_0 & 2\xi_0 \\ -2\eta_0 & 2\eta_0 & -\eta_0 \end{pmatrix},$$

$$\xi_0 = \frac{1 - \alpha_0}{1 + \alpha_0}, \eta_0 = \frac{1 - \beta_0}{1 + \beta_0}.$$

证 为了给出能量的衰减情况, 首先定义

$$\gamma_n = \frac{E(2nT) - E((2n+1)T)}{E(2nT)},$$

于是当 $t \in [0, T)$ 时,

$$\gamma_0 = \frac{E(0) - E(T)}{E(0)}.$$

由于当 $t \in [T, 2T)$ 的时候, 没有控制器在系统上起到作用, 因此

$$\begin{aligned} E(T) &= E(2T), \\ E(2T) &= (1 - \gamma_0)E(0). \end{aligned}$$

同样, 在第 2 个周期,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{E(2T) - E(3T)}{E(2T)}, \\ E(3T) &= E(4T), \\ E(4T) &= (1 - \gamma_1)E(2T). \end{aligned}$$

一般地, 可以得到如下的表达式:

$$\begin{aligned} E((2n+1)T) &= E((2n+2)T), \\ E((2n+2)T) &= (1 - \gamma_n)E(2nT). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} E((2n+1)T) &= \\ (1 - \gamma_0)(1 - \gamma_1) \cdots (1 - \gamma_n)E(0). \end{aligned}$$

接下来, 将分 3 种情况来估计 γ_n 的下界.

1) $\alpha_0, \beta_0 \neq 1$, 即 $\xi_0, \eta_0 \neq 0$.

由式(4)计算

$$\begin{aligned} u_{2t}(T, t) &= \\ f'_2(t+T) - f'_2(t-T) + f'_1(t) - f'_1(t-2T) &= \\ \frac{2}{1 - \alpha(t)} f'_2(t+T) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} u_{3t}(T, t) &= \\ f'_3(t+T) - f'_3(t-T) + f'_1(t) - f'_1(t-2T) &= \\ \frac{2}{1 - \beta(t)} f'_3(t+T). \end{aligned}$$

于是, 能量导数的表达式可由下面的式子给出:

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\frac{4\alpha(t)}{(1 - \alpha(t))^2} |f'_2(t+T)|^2 - \\ &\quad \frac{4\beta(t)}{(1 - \beta(t))^2} |f'_3(t+T)|^2, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} E(2nT) &= \\ E(0) - \int_0^{2nT} \frac{4\alpha(t)}{(1 - \alpha(t))^2} |f'_2(t+T)|^2 dt - \\ \int_0^{2nT} \frac{4\beta(t)}{(1 - \beta(t))^2} |f'_3(t+T)|^2 dt &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(0) - \frac{4\alpha_0}{(1 - \alpha_0)^2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^T |f'_2(t+2iT+T)|^2 dt - \\ \frac{4\beta_0}{(1 - \beta_0)^2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^T |f'_3(t+2iT+T)|^2 dt. \end{aligned}$$

由定理 3, $\forall \varepsilon > 0$ 和 $\gamma(A_0) + \varepsilon < 1$, 存在一个正整数 N 使得当 $\forall n \geq N$ 时, 下面的不等式成立:

$$\gamma(A_0) - \varepsilon < \frac{|f'_1(t+2(n+1)T)|}{|f'_1(t+2nT)|} < \gamma(A_0) + \varepsilon$$

和

$$\begin{aligned} \gamma(A_0) - \varepsilon &< \frac{|f'_j(t+(2n+3)T)|}{|f'_j(t+2nT+T)|} < \gamma(A_0) + \varepsilon, \\ j &= 2, 3. \end{aligned}$$

于是, 对于足够大的 n , 有

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{E(2nT) - E((2n+1)T)}{E(2nT)} = \\ \frac{\frac{4\alpha_0}{(1 - \alpha_0)^2} \mathcal{A} + \frac{4\beta_0}{(1 - \beta_0)^2} \mathcal{B}}{E} (0) - \mathcal{C} &> \\ 1 - (\gamma^2(A_0) - \varepsilon) &> 1 - \gamma^2(A_0), \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^T |f'_2(t+2nT+T)|^2 dt, \\ \mathcal{B} &= \int_0^T |f'_3(t+2nT+T)|^2 dt, \\ \mathcal{C} &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^T \left[\frac{4\alpha_0}{(1 - \alpha_0)^2} |f'_2(t+2iT+T)|^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{4\beta_0}{(1 - \beta_0)^2} |f'_3(t+2iT+T)|^2 \right] dt. \end{aligned}$$

因此

$$E(2nT) < \gamma^{2(n-N)}(A_0) \prod_{k=0}^N (1 - \gamma_k)E(0).$$

显然, 在这种情况下, 系统的能量是指数衰减的且速率为 $\frac{\ln \gamma(A_0)}{T}$, 其中 $\gamma(A_0 \in (0, 1))$.

2) $\alpha_0 = 1, \beta_0 \neq 1$ 或者 $\alpha_0 \neq 1, \beta_0 = 1$;

不失一般性, 设 $\alpha_0 = 1, \beta_0 \neq 1$, 也就是说 $\xi_0 = 0, \eta_0 \neq 0$.

在这种情况下:

$$f'_2(t+2nT+T) = 0, t \in [0, T), n \in \mathbb{N}.$$

对于 $t \in [0, T)$,

$$\begin{aligned} u_{2t}(T, t) &= f'_1(t) - f'_1(t-2T) - f'_2(t-T), \\ u_{3t}(T, t) &= -\frac{1 + \eta_0}{\eta_0} f'_3(t+T), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} u_{2t}(T, t+2nT) &= \\ -\frac{2}{3} [f'_1(t+2(n-1)T) - f'_3(t+2nT-T)], \end{aligned}$$

$$u_{3t}(T, t+2nT) = \frac{\eta_0+1}{\eta_0} f'_3(t+2nT+T), \quad n \in \mathbb{N}.$$

类似地, 可以得到对 $E(2nT)$ 估计的不等式:

$$E(2nT) < \gamma^{2(n-N)}(A_0) \prod_{k=0}^n (1 - \gamma_k) E(0),$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\eta_0 & 2\eta_0 & -\eta_0 \end{pmatrix}.$$

同样, 当 $\alpha_0 \neq 1, \beta_0 = 1$, 矩阵 A_0 为

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2\xi_0 & -\xi_0 & 2\xi_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) $\alpha_0 = \beta_0 = 1$.

在这种特殊情况下, $\xi_0 = \eta_0 = 0$. 由末端端点条件

$$u_{2x}(T, t) = -\alpha(t)u_{2t}(T, t)$$

及

$$u_{3x}(T, t) = -\beta(t)u_{3t}(T, t),$$

得到

$$f'_2(t+2nT+T) = f'_3(t+2nT+T) = 0, \\ t \in [0, T).$$

于是

$$f'_1(t+2nT) = \frac{1}{3^n} f'_1(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

根据上面的关系式, 很容易得到

$$E(t) = \frac{1}{9} \int_0^T |f'_1(t+x-2T)|^2 + |f'_1(t-x-2T)|^2 + \\ 8|f'_1(t-x-2T)|^2 dx, \quad t > 4T.$$

显然, 系统的能量以 $\frac{\ln \gamma(A_0)}{T}$ 的速率指数衰减到0, 并且

$$|\gamma(A_0)|^2 = \frac{1}{3}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

综合所述, 定理4得证. 证毕.

注2 在这种两个控制器同时开同时关的情况下, 系统是指稳定的, 并且从衰减速率的形式可以发现, 系统能量的衰减快慢主要取决于 α_0, β_0 和 T 的选择.

5.2 不同时开不同时关的时候, 系统的稳定性分析(The analysis of the stability when the on-off is not simultaneous)

本节主要讨论在两个控制器之间切换的情况下系

统的稳定性, 即

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 > 0, \beta(t) = 0, t \in [0, T), \\ \alpha(t) = 0, \beta(t) = \beta_0 > 0, t \in [T, 2T), \end{cases}$$

也就是说, 在任意的时间段只有一个控制器在工作.

在这种切换控制下, 系统的能量变化情况如下:

定理5 系统的能量是指指数衰减的, 且衰减速率为 $\frac{\ln \gamma}{T}$. 其中: $\gamma = \max\{\gamma(A_1), \gamma(A_2)\} < 1$, 且

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2\xi_0 & -\xi_0 & 2\xi_0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_0 = \frac{1 - \alpha_0}{1 + \alpha_0}, \\ A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2\eta_0 & 2\eta_0 & -\eta_0 \end{pmatrix}, \quad \eta_0 = \frac{1 - \beta_0}{1 + \beta_0}.$$

证 类似于前面定理4中的证明方法, 下面将分3种情况来讨论.

1) $\alpha_0, \beta_0 \neq 1$, 即 $\xi_0, \eta_0 \neq 0$.

任意的 $t \in [0, T)$, 很容易得到

$$u_{2t}(T, t+2nT) = \frac{\xi_0+1}{\xi_0} f'_2(t+2nT+T)$$

和

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_2(T, t+2(n+1)T)|}{|u_2(T, t+2nT)|} = \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|f'_2(t+2(n+1)T+T)|}{|f'_2(t+2nT+T)|} = \gamma(A_1).$$

同样, 对于 $t \in [T, 2T)$, 有

$$u_3(T, t+2nT) = \frac{\eta_0+1}{\eta_0} f'_3(t+2nT+T)$$

和

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_3(T, t+2(n+1)T)|}{|u_3(T, t+2nT)|} = \gamma(A_2).$$

设

$$\gamma_n = \frac{E(2nT) - E(2nT+2T)}{E(2nT)},$$

由上面的结果, 得到

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{ s.t. } \forall n > N, \text{ i.e. } t > 2NT,$$

$$\gamma'_n = \frac{E(2nT) - E(2nT+2T)}{E(2nT)} =$$

$$\frac{\frac{\xi_0^2}{1 - \xi_0^2} \cdot \mathcal{A} + \frac{\eta_0^2}{1 - \eta_0^2} \cdot \mathcal{B}}{E(0) - \mathcal{D}} >$$

$$1 - (\max\{\gamma^2(A_1), \gamma^2(A_2)\} - \varepsilon) > 1 - \gamma^2,$$

其中:

$$\mathcal{A} = \int_0^T |f'_2(t+2nT+T)|^2 dt,$$

$$E(T) - \frac{4}{9} \sum_{i=0}^n \int_0^T |f'_1(t + 2iT) - f'_3(t + (2i + 1)T)|^2 dt - \frac{1 - \eta_0^2}{\eta_0^2} \sum_{i=1}^n \int_T^{2T} |f'_3(t + 2iT + T)|^2 dt.$$

相应地,有

$$E(2nT) < \gamma^{2(n-N)} \prod_{k=0}^N (1 - \gamma_k) E(0),$$

其中：

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2\eta_0 & 2\eta_0 & -\eta_0 \end{pmatrix}.$$

在 $\alpha_0 \neq 1, \beta_0 = 1$ 的情况下,可以得到类似的结果,其中:

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2\xi_0 & -\xi_0 & 2\xi_0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据前面的不等式, 很容易得出系统是以 $\frac{\ln \gamma}{T}$ 为指数衰减速率的结论.

$$u_{3t}(T, t) = -\frac{1 + \eta_0}{\eta_0} f'_3(t + T).$$

$$\begin{aligned} E(2T) = & E(0) - \int_0^{2T} \alpha(t) |u_{2t}(T, t)|^2 + \beta(t) |u_{3t}(T, t)|^2 dt = \\ & E(0) - \int_0^T |f'_1(t) - f'_1(t - 2T) - f'_2(t - T)|^2 dt - \\ & \frac{1 - \eta_0^2}{\eta_0^2} \int_T^{2T} |f'_3(t + T)|^2 dt. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} u_{2t}(T, t + 2nT) = \\ -\frac{2}{3}[f'_1(t + 2(n-1)T) - f'_3(t + (2n-1)T)], \\ t \in [0, T) \end{aligned}$$
$$u_{3t}(T, t + 2nT) = \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0} f'_3(t + 2nT + T),$$

$$t \in [T, 2T].$$
$$\begin{aligned} E((2n+2)T) &= \\ E(2T) - \int_T^{(2n+2)T} \alpha(t) |u_{2t}(T, t)|^2 dt &- \\ \int_T^{(2n+2)T} \beta(t) |u_{3t}(T, t)|^2 dt &= \\ E(2T) - \sum_{i=1}^n \int_0^T |u_{2t}(T, t + 2iT)|^2 dt &- \\ \sum_{i=1}^n \beta_0 \int_T^{2T} |u_{3t}(T, t + 2iT)|^2 dt &= \end{aligned}$$

在第1个周期内, 当 $t \in [0, T)$ 时,

$$f_2'(t + 2nT + T) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$u_{2t}(T, t) = f_1'(t) - f_1'(t - 2T) - f_2'(t - T).$$

$$f_3'(t + 2nT + T) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$u_{3t}(T, t) = f_1'(t) - f_1'(t - 2T) - f_3'(t - T).$$

一般地, 当 $t + 2nT \in [2nT, 2nT + T)$ 时, 可以推出

$$u_{2t}(T, t + 2nT) = -\frac{2}{3}[f_1'(t + 2(n-1)T) - f_3'(t + (2n-1)T)].$$

当 $t + 2nT \in [2nT + T, 2nT + 2T)$ 时, 有

$$u_{3t}(T, t + 2nT) = -\frac{2}{3}[f'_1(t + 2nT - 2T) - f'_2(t + 2nT - T)].$$

通过上面的方法, 定义 $\gamma = \max\{\gamma(A_1), \gamma(A_2)\}$,

很容易得到系统的指数衰减速率为 $\frac{\ln \gamma}{T}$, 其中:

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

综上所述, 可以得到系统指数衰减的结论.

注3 与定理4相比, 可以看到, 在两种不同的切换控制策略下, 系统都能达到指数稳定. 然而, 衰减速率的不同主要取决于 α_0, β_0 的选择, 从而直接影响到中间产生的迭代矩阵 A 的性质.

通过对具有不同切换控制的波网络系统的稳定性的分析, 得到了系统指数衰减的结果. 如此, 可以大大地减少控制器的运作时间, 不仅降低了功率的输出, 达到节能的效果, 还可以方便系统的维修, 从而提高系统的安全系数.

6 总结与展望(Summary and prospect)

本文就由波方程所描述的具有边界切换反馈控制器的二叉树系统进行探讨. 文中利用半群知识给出系统的解的存在性, 并由达朗贝尔方法给出具体解的形式, 最终得到系统指数衰减的结果. 由于切换控制器的运行时间大大缩短, 直接减少了功率的输出, 从而, 达到了节约能源的效果. 另外, 在控制器不运行的时间间隔里, 可以对系统进行维护工作, 保证了系统的安全性和稳定性.

然而, 在本文中, 只是讨论了弦长为 $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = T$ 的情况, 在现实生活中还有很多弦长不相等的情况, 另外, 虽然本文很好地利用达朗贝尔方法进行能量的估计, 但是, 对于更加复杂的情况, 对能量估计的时候, 也会产生更加复杂的迭代过程, 从而增加系统稳定性分析的难度. 在实际生活和生产中, 二叉树结构只是最简单的一种情况, 很多网络系统的结构要复杂的多. 基于以上考虑, 在今后的工作中, 应该进一步寻找更普遍适用的方法来分析具有多个切换控制的波网络系统的稳定性, 比如乘子方法, Riesz基方法以及观测

不等式等.

参考文献(References):

- [1] SMITH R A. Asymptotic stability of $x''(t) + a(t)x(t) + x = 0$ [J]. *Quarterly Journal of Mathematics: Oxford Journals*, 1961, 12(2): 123 – 126.
- [2] ARTSTEIN Z, INFANTE E F. On the asymptotic stability of oscillators with unbounded damping [J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1976, 34(1): 195 – 199.
- [3] HATVANI L. Stability of zero solution of certain second-order nonlinear differential equations [J]. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 1971, 32(1/2): 1 – 9.
- [4] HATVANI L, TOTIK V. Asymptotic stability of the equilibrium of the damped oscillator [J]. *Differential and Integral Equations*, 1993, 6(4): 835 – 848.
- [5] PUCCI P, SERRIN J. Asymptotic stability for intermittently controlled nonlinear oscillators [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1994, 25(3): 815 – 835.
- [6] HARAUX A, MARTINEZ P, VANCOSTENOBLE J. Asymptotic stability for intermittently controlled second-order evolution equations [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2005, 43(6): 2089 – 2108.
- [7] AMMARI K, JELLOULI M. Stabilization of star-shaped networks of strings [J]. *Differential and Integral Equations*, 2004, 17(11/12): 1395 – 1410.
- [8] AMMARI K, JELLOULI M. Remark on stabilization of tree-shaped networks of strings [J]. *Applications of Mathematics*, 2007, 52(4): 327 – 343.
- [9] MARTINEZ P, VANCOSTENOBLE J. Stabilization of the wave equation by on-off and positive-negative feedbacks [J]. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2002, 15(7): 335 – 377.
- [10] GUGAT M. Boundary feedback stabilization by time delay for one-dimensional wave equations [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2010, 27(2): 189 – 203.

作者简介:

肖琦 (1988–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为分布参数系统控制理论, E-mail: saraqx@163.com;

许跟起 (1959–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为分布参数系统控制理论、线性算子谱理论、系统的可靠性与稳定性分析分布参数系统控制理论, E-mail: gqxu@tju.edu.cn.