

受未知通信时滞影响的高阶多智能体系统的趋同

王振华, 徐娟娟, 张焕水[†]

(山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061)

摘要: 本文考虑了极点在闭左半平面的高阶连续多智能体系统的趋同问题. 假设网络拓扑为有向图, 且个体从邻居收到的信息存在通信时滞, 分别得到与时滞无关和与时滞有关的两种趋同条件, 这两个条件充分揭示了智能体结构、通信时滞和网络拓扑三者之间的关系. 本文的核心方法是利用参数化代数Riccati方程的唯一正定解来设计趋同增益. 此外, 文中说明了通信时滞在有些情况下可为时变的. 最后, 数值例子验证了所得理论结果的有效性.

关键词: 多智能体系统; 趋同协议; 通信时滞; 网络拓扑

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Consensus of higher-order multi-agent systems with unknown communication delay

WANG Zhen-hua, XU Juan-juan, ZHANG Huan-shui[†]

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China)

Abstract: This paper is concerned with the consensus problem for higher-order multi-agent systems that are at most critically unstable. Under the assumption that the topology is directed and every agent receives neighbors' information with an unknown communication delay, we obtain both the delay-independent condition and the delay-dependent condition for consensus, which reveal the relations among the agent dynamics, communication delay and network topology. The key technique is designing the consensus gain based on the unique definite solution of a parametric algebraic Riccati equation. In addition, it is shown that the communication delay can be time-varying in some cases. The effectiveness of the theoretical results is demonstrated through numerical examples.

Key words: multi-agent systems; consensus protocol; communication delay; network topology

1 引言(Introduction)

近年来, 多智能体系统的趋同问题受到了越来越多的关注, 并得到了广泛地应用, 如传感器融合^[1]、编队控制^[2]及分布式估计^[3]等. 多智能体趋同指的是系统中各个体通过信息交换而最终使得状态达到一致. 现有的许多研究成果都致力于探索多智能体的趋同条件. 通过自身与其邻居的平均移动方向来更新下一步的移动方向, Vicsek等利用仿真表明所有智能体的移动方向最终能够达到趋同^[4]. 在文献[5]中, Ren等利用代数图理论和矩阵分析将Vicsek模型的结果推广到了有向图情形. 针对一类高阶多智能体系统, 文献[6]提出了一个静态协议和一个动态协议来讨论趋同问题. 对于一般线性时不变系统, 文献[7]和文献[8]基于分布式静态协议研究了多智能体趋同问题, 并分别给出了连续和离散多智能体系统趋同的充要条件. 在

通信网络受到观测或通信噪声影响时, 文献[9]给出了一阶离散时间多智能体系统强趋同的条件. 基于时变动态的通信拓扑, 文献[10]研究了二阶多智能体系统在有限时间内达到趋同的问题.

在现实中, 由于带宽和传输速度的限制, 通信时滞广泛地存在于通信网络中. 需要指出的是, 通信时滞会降低系统的性能或破坏系统的稳定^[11], 这使得具有通信延迟的趋同问题成为一个重要的研究课题. 到目前为止, 已存在许多这方面的工作. 对于一阶多智能体系统, 文献[12]研究了与时滞相关的趋同的充要条件, 并且给出了可趋同的时滞上界. 文献[13]利用线性矩阵不等式的方法将文献[12]的结果推广到了二阶多智能体系统. 假设多智能体系统是高阶的且极点在闭左半平面, 文献[14]给出了多智能体关于定长通信时滞趋同的容许上界. 此外, 若时滞精确可知, 文献

收稿日期: 2014-05-19; 录用日期: 2014-10-22.

[†]通信作者. E-mail: hszhang@sdu.edu.cn; Tel.: +86 531-88399038.

泰山学者岗位建设工程项目(JS200510009), 国家自然科学基金项目(61120106011, 61203029, 61034007)资助.

Supported by Taishan Scholar Construction Engineering by Shandong Government (JS200510009) and National Natural Science Foundation of China (61120106011, 61203029, 61034007).

[15]利用状态反馈协议解决了在任意大时滞情况下的趋同问题. 对通信时滞只影响邻居传递来信息的情形, 这方面的结果不是很多. 基于有向切换拓扑, 文献[16]研究了具有定长时滞的一阶多智能体系统的趋同问题. 文献[17]研究了离散情况, 并给出了受单时滞或多时滞影响的多智能体系统的趋同条件. 给定一个无向的网络拓扑, 对于从稳定域中任取的控制增益, 文献[18]考虑了具有输入和通信时滞的连续时间多智能体系统的趋同问题.

假设网络拓扑图是有向的并且未知的通信时滞只影响邻居传递来的信息, 本文针对极点在闭左半平面的高阶多智能体系统的趋同问题进行了研究. 需要注意的是, 本文考虑的系统比文献[16]中的系统更具有有一般性. 由于本文的通信时滞是未知的, 所以文献[15]中利用时滞的信息来设计趋同增益的方法在本文不可用. 此外, 如果通信时滞是时变的, 文献[18]中处理定长时滞的频域方法也不可行. 为了解决以上问题, 本文利用参数化代数Riccati方程^[19-20]的唯一正定解来设计趋同增益. 通过综合考虑智能体的结构、网络拓扑及通信时滞三者之间的关系, 分别得到了独立于时滞和依赖于时滞的趋同条件. 当独立于时滞的趋同条件满足时, 任意有界的通信时滞都是容许的. 当独立于时滞的条件不满足时, 给出了一个可达到趋同的时滞范围, 此条件称之为依赖于时滞的趋同条件. 值得一提的是, 如果网络拓扑满足一定的条件, 本文的通信时滞允许为时变的.

本文接下来的部分作如下安排: 第2节介绍相关的图论知识; 第3节给出本文要研究的问题; 第4节得出独立于和依赖于时滞的趋同条件; 第5节用数值仿真说明理论结果的有效性; 第6节对全文进行总结.

在本节结束之前, 给出如下定义. 符号 \mathbb{R} 与 \mathbb{C} 分别表示实数集和复数集. 对于适当维数的矩阵 A , 用符号 A^T , A^H 与 $\|A\|$ 分别表示矩阵 A 的转置、共轭转置及Euclidean范数. 定义符号 $\mathbb{N} \triangleq \{1, 2, \dots, N\}$, 其中 N 为任一正整数. 用 $\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ 表示对角线元素为 A_i 的对角矩阵, 其中 $i \in \mathbb{N}$. 符号 $\mathbf{1}_N$ 为元素全为1的 N 维列向量. 为了方便对矩阵的表示, 用 \otimes 表示Kronecker乘积^[21]. 对于常数 $\tau > 0$, 用符号 $l_{n,\tau} = l([-\tau, 0], \mathbb{C}^n)$ 表示区间 $[-\tau, 0]$ 到集合 \mathbb{C}^n 的连续函数构成的Banach空间.

2 代数图论(Algebraic graph theory)

考虑 N 个相互作用的多智能体系统, 用有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 来刻画它们之间的相互联系, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示顶点集, $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示边集, 加权矩阵 $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示邻接矩阵. 如果从智能体 j 可以直接发送信息给智能体 i , 则有 $(j, i) \in \mathcal{E}$. 这里只考虑简单图的情形, 即 $(i, i) \notin \mathcal{E}$. 定义 $N_i \triangleq$

$\{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$ 为智能体 i 的所有邻居构成的集合. 用符号 $N_i \triangleq \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 表示智能体 i 的入度, 相应的度矩阵 D 是主对角线元素为 N_i 的对角矩阵. 图 \mathcal{G} 的Laplacian矩阵定义为 $L_{\mathcal{G}} \triangleq D - \mathcal{A}$. 一组边集 $(i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k)$ 表示顶点 i_1 到 i_k 的有向路径. 若任意两个顶点之间都有一条有向路径, 则称有向图 \mathcal{G} 是强连通的. 此外, 如果邻接矩阵 \mathcal{A} 是对称的, 即: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$, 则称 \mathcal{G} 为无向图.

对于有一个有向图 \mathcal{G} , 由文献[9]可知, 如果图 \mathcal{G} 是强连通的, 则 $[D^{-1}\mathcal{A}]$ 是一个行和为1的不可约矩阵, 并且存在唯一的 N 维列向量 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$ 使得 $\alpha^T [D^{-1}\mathcal{A}] = \alpha^T$, 其中 $\alpha_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$. 定义矩阵 $[D^{-1}L_{\mathcal{G}}] \triangleq I_N - D^{-1}\mathcal{A}$ 并用 $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$ 表示其特征值. 如果图 \mathcal{G} 是强连通的, 则由Perron定理^[21]. 可知 $\lambda_1 = 0, \text{Re}(\lambda_i) > 0, i = 2, \dots, N$.

3 问题描述(Problem statement)

这一节将给出本文所研究的问题. 假设多智能体系统由 N 个单智能体构成, 编号为1到 N , 它们之间的相互联系用有向图 \mathcal{G} 表示. 基于上述假设, 给定每个智能体的动力学模型为

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t), \quad i \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbb{R}^n, u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别表示智能体 i 的系统状态与控制输入; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 为定长矩阵. 此外, $x_i(0)$ 是智能体 i 及其邻居可知的初值. 本文进一步假设系统矩阵 A 的所有特征值都在闭左半平面.

由于通信时滞广泛地存在于传输信息的通信网络中, 因此有必要考虑通信时滞对趋同的影响. 接下来用 $\tau \geq 0$ 表示未知的通信时滞, 受文献[5, 9, 18]等的启发, 本文的控制协议设计为

$$u_i(t) = \frac{K}{N_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} [x_j(t - \tau) - x_i(t)], \quad (2)$$

其中: $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是增益矩阵, $N_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 为智能体 i 的入度. 本文研究的问题为设计增益矩阵 K 使得多智能体系统(1)基于协议(2)达到趋同.

当 $s < 0$ 时, 令 $x_i(s) = 0$ 以保证系统(1)在趋同协议(2)下运行. 首先给出趋同的概念.

定义 1 基于一个有向图 \mathcal{G} , 如果对任意给定的初值 $x_i(0)$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_j(t) - x_i(t)\| = 0, \forall i, j \in \mathbb{N}$, 则称多智能体系统(1)在协议(2)的作用下达到趋同.

从趋同的定义可以知道, 如果矩阵 A 是稳定的, 即: $\text{Re}(\lambda(A)) < 0$, 显然选择协议 $u_i(t) \equiv 0$ 可以保证趋同. 为了使问题更加有意义, 本文给出下面的假设.

假设 1 矩阵 A 的特征值都在闭左半平面, 且至少存在一个特征值在虚轴上.

注 1 本文考虑的问题比文献[7, 16, 18]中的问题更一般, 其中文献[7]考虑的趋同问题没有时滞; 文献[16]研究的系统为标量系统; 文献[18]的时滞为定长时滞.

注 2 值得注意的是, 笔者之前工作^[22]中的协议无法解决本文中的趋同问题, 原因在于本文中的通信时滞只影响邻居传递来的信息, 这导致文献[22]中的控制增益不可用. 此外, 本文中的有向拓扑使趋同问题比文献[22]中的更加复杂.

4 主要结果(Main results)

4.1 引理部分(Some lemmas)

在给出主要结果之前, 本节首先给出几个必要的引理.

引理 1^[20] 假设 (A, B) 是可控的矩阵对. 参数 γ 为一个标量且满足 $\gamma > -2 \min \operatorname{Re}(\lambda(A))$, 其中 $\operatorname{Re}(\lambda(A))$ 表示由矩阵 A 的特征值的实部构成的集合, 则参数化代数 Riccati 方程

$$A^T P(\gamma) + P(\gamma)A - P(\gamma)BB^T P(\gamma) = -\gamma P(\gamma) \quad (3)$$

有唯一正定解 $P(\gamma)$ 且 $P(\gamma)$ 满足 $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} P(\gamma) = 0$. 此外, 若矩阵 A 的所有特征值都在虚轴上, 则有

$$\operatorname{tr}(B^T P(\gamma)B) = n\gamma, \quad P(\gamma)BB^T P(\gamma) \leq n\gamma P(\gamma).$$

接下来, 为表示方便, 令 $P \triangleq P(\gamma)$.

引理 2^[23] 对于线性时不变系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r),$$

其中 $r > 0$ 为时滞, 则上述系统是稳定的当且仅当系统的特征函数 $p(s; e^{-rs}) = \det(sI - A - Be^{-rs})$ 的所有零点都在左平面.

引理 3 假设向量 $x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^n$, 则有

$$[x^H P y + y^H P x] \leq [l x^H P x + \frac{1}{l} y^H P y],$$

其中: $l > 0$ 为常数, 矩阵 P 为引理 1 中的正定矩阵.

证 略.

引理 4 对于泛函微分方程

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = g(t, z_t), & z(t) \in \mathbb{C}^n, t \geq t_0, \\ z_{t_0}(s) = \phi(s), & \forall s \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

其中: $z_t = z(t+s), \forall s \in [-\tau, 0]$. 方程中函数 g 将集合 $\mathbb{C} \times \ell_{n,\tau}$ 映射到集合 \mathbb{C}^n 的一个有界子集上. 构造函数 $V(z(t)) = z^H(t)Pz(t)$, 其中 P 为引理 1 中的正定矩阵. 如果由假设 $V(z(t+s)) < pV(z(t))$ 可以得到 $\dot{V}(z(t)) \leq \omega V(z(t))$, 其中 $p > 1, \omega < 0$ 为常数, 则泛函微分方程的零解 $z(t) \equiv \mathbf{0}$ 为全局渐近稳定解.

证 令 $z(t) = x(t) + jy(t)$, 其中: $j^2 = -1, x(t)$

$\in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^n$. 取

$$X(t) = [x^T(t) \ y^T(t)]^T, \quad \bar{P} = \operatorname{diag}\{P, P\}$$

且 $V(X(t)) = X^T(t)\bar{P}X(t)$, 则有

$$V(z(t)) = [x^T(t) \ -jy^T(t)]P[x(t) + jy(t)] = x^T(t)Px(t) + y^T(t)Py(t) = V(X(t)).$$

同时

$$\begin{aligned} \frac{dV(z(t))}{dt} &= \\ \dot{z}^H(t)Pz(t) + z^H(t)P\dot{z}(t) &= \\ \dot{x}^T(t)Px(t) + \dot{y}^T(t)Py(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + \\ y^T(t)P\dot{y}(t) &= \dot{V}(X(t)). \end{aligned}$$

基于上述两个关系式及引理中的假设, 可以得到: 若 $V(X(t+s)) < pV(X(t)), \forall s \in [-\tau, 0]$, 则有 $\dot{V}(X(t)) \leq \omega V(X(t))$. 因此, 由 Razumikhin 稳定性定理^[19]可以得到 $X(t)$ 渐近收敛到 $\mathbf{0}$, 由此可知, $z(t) \equiv \mathbf{0}$ 为渐近稳定解. 证毕.

引理 5 对于任意的正定矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 标量 $\gamma_2 > \gamma_1$ 及向量函数 $\omega: [\gamma_1, \gamma_2] \rightarrow \mathbb{C}^n$, 有

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega^H(\beta) d\beta M \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega(\beta) d\beta \leq (\gamma_2 - \gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega^H(\beta) M \omega(\beta) d\beta. \quad (4)$$

证 令 $\omega = \omega_1 + j\omega_2$, 其中: $\omega_1: [\gamma_1, \gamma_2] \rightarrow \mathbb{R}^n, \omega_2: [\gamma_1, \gamma_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$. 则不等式(4)的左端部分满足

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega^H(\beta) d\beta M \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega(\beta) d\beta &= \\ \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} [\omega_1(\beta) + j\omega_2(\beta)]^H d\beta M \cdot \\ \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} [\omega_1(\beta) + j\omega_2(\beta)] d\beta &\leq \\ (\gamma_2 - \gamma_1) \left[\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega_1^T(\beta) M \omega_1(\beta) d\beta + \right. \\ \left. \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega_2^T(\beta) M \omega_2(\beta) d\beta \right], \end{aligned}$$

其中上述最后一个不等式由文献[24]中的引理 1 推出. 由不等式(4)的右端可以得到

$$\begin{aligned} (\gamma_2 - \gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega^H(\beta) M \omega(\beta) d\beta &= \\ (\gamma_2 - \gamma_1) \left[\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega_1^T(\beta) M \omega_1(\beta) d\beta + \right. \\ \left. \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \omega_2^T(\beta) M \omega_2(\beta) d\beta \right]. \end{aligned}$$

结合上述两式, 引理中的结论成立. 证毕.

4.2 趋同结果(Consensus results)

这一小节将给出趋同的主要结果. 在协议(2)中, 取 $K = \delta^{-1}B^T P$, 其中: $\delta > 0$ 为常数, 矩阵 P 为引理 1 中参数化代数 Riccati 方程(3)的唯一正定解. 此外, 令 $\sigma_i \triangleq \delta^{-1}\lambda_i, f_i \triangleq \delta^{-1}(1 - \lambda_i)$ 并定义 σ_i 的实部与虚部分别为 $r_i \triangleq \operatorname{Re}(\sigma_i)$ 和 $m_i \triangleq \operatorname{Im}(\sigma_i)$. 首先给出独立

于时滞的趋同条件.

定理 1 假设有向图 \mathcal{G} 是强连通的, (A, B) 可控且矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征值都在虚轴上. 取 $\delta = 1$ 及任意的 $\gamma > 0$, 如果矩阵 $[D^{-1}L_G]$ 的非零特征值满足 $\max_{i=2, \dots, N} |1 - \lambda_i| < \frac{1}{\sqrt{n}}$, 则对于协议(2)中任意有界的通信时滞, 多智能体系统(1)均能达到趋同.

证 假设未知时滞满足 $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$, 其中 $\bar{\tau}$ 为一有界常数. 把控制协议(2)带入动态方程(1), 得到

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & \\ & Ax_i(t) + BK \sum_{j=1}^N \frac{a_{ij}}{N_i} [x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)] - \\ & BK[x_i(t) - x_i(t - \tau)]. \end{aligned}$$

记 $x(t) \triangleq [x_1^T(t) \ \dots \ x_N^T(t)]^T$, $\Delta x(t) \triangleq x(t) - x(t - \tau)$, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \\ & (I_N \otimes A)x(t) - ([D^{-1}L_G] \otimes BK)x(t - \tau) - \\ & (I_N \otimes BK)\Delta x(t). \end{aligned}$$

定义 $\bar{X}(t) \triangleq \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t) = [\alpha \otimes I_n]x(t)$ 为 N 个智能体的加权平均状态, 其中 $\alpha^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N]$ 满足 $\alpha_i > 0$ 与 $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ 是矩阵 $[D^{-1}L_G]$ 的0特征值对应的左特征向量, 于是

$$\dot{\bar{X}}(t) = A\bar{X}(t) - BK\Delta\bar{X}(t).$$

记 $\delta_i(t) \triangleq x_i(t) - \bar{x}(t)$, 且 $\delta(t) \triangleq [\delta_1^T(t) \ \dots \ \delta_N^T(t)]^T$, 则可以得到系统

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) = & (I_N \otimes A)\delta(t) - ([D^{-1}L_G] \otimes BK)\delta(t - \tau) - \\ & (I_N \otimes BK)\Delta\delta(t). \end{aligned} \quad (5)$$

取满足 $[D^{-1}L_G]\phi_i = \lambda_i\phi_i$ 的向量 $\phi_i \in \mathbb{R}^N$, 构造可逆矩阵 $\Phi = [\mathbf{1}_N \ \phi_2 \ \dots \ \phi_N]$ 将矩阵 $[D^{-1}L_G]$ 变换为约当标准型, 即 $\Lambda = \Phi^{-1}[D^{-1}L_G]\Phi$, 其中矩阵 Λ 的主对角元素为 $0, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. 由于有向图 \mathcal{G} 是强连通的, 可以得到: $\text{Re}(\lambda_i) > 0, i = 2, \dots, N$. 对系统 $\delta(t)$ 作可逆变换并令 $\tilde{\delta}(t) \triangleq [\Phi^{-1} \otimes I_n]\delta(t)$, 将向量 $\tilde{\delta}(t)$ 分成 N 个部分: $\tilde{\delta}(t) = [\tilde{\delta}_1^T(t), \tilde{\delta}_2^T(t), \dots, \tilde{\delta}_N^T(t)]^T$. 由矩阵 Φ 的非奇异性可以知道, 等式 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta(t)\| = 0$ 与 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\delta}(t)\| = 0$ 等价. 由方程(5)可得 $\tilde{\delta}(t)$ 特征函数为

$$\begin{aligned} f(s; K, \tau) = & \\ & \det[I_N \otimes (sI_n - A + BK - BK e^{-s\tau}) + \\ & (\Lambda \otimes BK e^{-s\tau})] = \\ & \prod_{i=1}^N [sI_n - A + BK - BK e^{-s\tau} + \lambda_i BK e^{-s\tau}]. \end{aligned}$$

基于 $\tilde{\delta}_1(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t) - \bar{x}(t) \equiv 0$ 与引理2可知,

系统(5)的稳定性等价于下面系统的稳定性:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\delta}}_i(t) = & [A - \lambda_i BK]\tilde{\delta}_i(t) - (1 - \lambda_i)BK\Delta\tilde{\delta}_i(t), \\ \text{其中 } i = & 2, \dots, N. \text{ 将增益 } K = \delta^{-1}B^T P \text{ 代入上式有} \\ \dot{\tilde{\delta}}_i(t) = & [A - \sigma_i BB^T P]\tilde{\delta}_i(t) - f_i BB^T P\Delta\tilde{\delta}_i(t). \end{aligned} \quad (6)$$

因此, 定理中的趋同问题转化为寻找适当的矩阵 P 使得误差系统(6)对 $i = 2, \dots, N$ 同步镇定.

构造函数 $V(\tilde{\delta}_i(t)) = \tilde{\delta}_i^H(t)P\tilde{\delta}_i(t)$, 利用Riccati方程(3)及方程(6)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\delta}_i(t)) = & \\ & \tilde{\delta}_i^H(t)P\dot{\tilde{\delta}}_i(t) + \dot{\tilde{\delta}}_i^H(t)P\tilde{\delta}_i(t) = \\ & -\gamma\tilde{\delta}_i^H(t)P\tilde{\delta}_i(t) + (1 - 2r_i)\tilde{\delta}_i^H(t)PBB^T P\tilde{\delta}_i(t) - \\ & \bar{f}_i\Delta\tilde{\delta}_i^H(t)PBB^T P\tilde{\delta}_i(t) - \\ & f_i\tilde{\delta}_i^H(t)PBB^T P\Delta\tilde{\delta}_i(t) \triangleq \\ & -\gamma\tilde{\delta}_i^H(t)P\tilde{\delta}_i(t) + \Delta V(\tilde{\delta}_i(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

在上式中, 如果 $f_i = 0$, 也就是 $\lambda_i = r_i = 1$, 那么可由 $1 - 2r_i = -1 < 0$ 得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_i(t) = 0$. 另一方面, 由 $\text{tr}([D^{-1}L_G]) = n$ 可知, 矩阵 $[D^{-1}L_G]$ 必然存在特征值满足 $\lambda_i \neq 1$. 不失一般性, 假设对于所有的 $i = 2, \dots, N$ 有 $f_i \neq 0$.

定义 $K_\gamma \triangleq B^T P$, 由 $\tilde{\delta}_i(t) = \Delta\tilde{\delta}_i(t) + \tilde{\delta}_i(t - \tau)$ 得

$$\begin{aligned} \Delta V(\tilde{\delta}_i(t)) = & \\ & [1 - 2r_i - f_i - \bar{f}_i]\Delta\tilde{\delta}_i^H(t)K_\gamma^T K_\gamma\Delta\tilde{\delta}_i(t) + \\ & [1 - 2r_i - \bar{f}_i]\Delta\tilde{\delta}_i^H(t)K_\gamma^T K_\gamma\tilde{\delta}_i(t - \tau) + \\ & [1 - 2r_i - f_i]\tilde{\delta}_i^H(t - \tau)K_\gamma^T K_\gamma\Delta\tilde{\delta}_i(t) + \\ & [1 - 2r_i]\tilde{\delta}_i^H(t - \tau)K_\gamma^T K_\gamma\Delta\tilde{\delta}_i(t - \tau). \end{aligned}$$

在上式中, $1 - 2r_i - f_i - \bar{f}_i = 1 - 2\delta^{-1}$. 利用引理3, 有

$$\begin{aligned} & [1 - 2r_i - \bar{f}_i]\Delta\tilde{\delta}_i^H(t)K_\gamma^T K_\gamma\tilde{\delta}_i(t - \tau) + \\ & [1 - 2r_i - f_i]\tilde{\delta}_i^H(t - \tau)K_\gamma^T K_\gamma\Delta\tilde{\delta}_i(t) = \\ & \Delta\tilde{\delta}_i^H(t)K_\gamma^T K_\gamma[(1 - 2r_i - \bar{f}_i)\tilde{\delta}_i(t - \tau)] + \\ & [(1 - 2r_i - \bar{f}_i)\tilde{\delta}_i(t - \tau)]^H K_\gamma^T K_\gamma\Delta\tilde{\delta}_i(t) \leq \\ & \frac{1}{l} |1 - 2r_i - f_i|^2 \tilde{\delta}_i^H(t - \tau)K_\gamma^T K_\gamma\tilde{\delta}_i(t - \tau) + \\ & l\Delta\tilde{\delta}_i^H(t)K_\gamma^T K_\gamma\Delta\tilde{\delta}_i(t), \end{aligned}$$

其中 $l > 0$ 为常数. 因此

$$\begin{aligned} \Delta V(\tilde{\delta}_i(t)) \leq & \\ & [1 - 2\delta^{-1} + l]\Delta\tilde{\delta}_i^H(t)K_\gamma^T K_\gamma\Delta\tilde{\delta}_i(t) + [1 - 2r_i + \\ & \frac{1}{l} |1 - 2r_i - f_i|^2]\tilde{\delta}_i^H(t - \tau)K_\gamma^T K_\gamma\tilde{\delta}_i(t - \tau). \end{aligned} \quad (8)$$

选取 $l = 1$, 基于条件 $\delta = 1$, 可得 $1 - 2\delta^{-1} + l = 0$ 与

$$\begin{aligned} 1 - 2r_i + \frac{1}{l}|1 - 2r_i - f_i|^2 &= \\ 1 - 2\text{Re}(\lambda_i) + |1 - 2\text{Re}(\lambda_i) - 1 + \lambda_i|^2 &= \\ 1 - 2\text{Re}(\lambda_i) + (\text{Re}(\lambda_i))^2 + (\text{Im}(\lambda_i))^2 &= \\ |1 - \lambda_i|^2. \end{aligned} \tag{9}$$

由引理1可知 $K_\gamma^T K_\gamma = PBB^T P \leq n\gamma P$, 此式与方程(9)可推出 $\Delta V(\tilde{\delta}_i(t)) \leq |1 - \lambda_i|^2 n\gamma V(\tilde{\delta}_i(t - \tau))$.

假定 $|1 - \lambda_2| = \max_{i=2, \dots, N} |1 - \lambda_i|$, 于是由定理中假设条件有 $|1 - \lambda_2| < \frac{1}{\sqrt{n}}$. 合并式(7)-(9), 可得

$$\dot{V}(\tilde{\delta}_i(t)) \leq -\gamma V(\tilde{\delta}_i(t)) + |1 - \lambda_2|^2 n\gamma V(\tilde{\delta}_i(t - \tau)).$$

取常数 $\phi = \frac{1 + n|1 - \lambda_2|^2}{2n|1 - \lambda_2|^2}$, 则 $\phi > 1$. 假设对 $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ 都有 $V(\tilde{\delta}_i(t + \theta)) < \phi V(\tilde{\delta}_i(t))$, 那么

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\delta}_i(t)) &\leq \\ -\gamma[1 - |1 - \lambda_2|^2 n\phi]V(\tilde{\delta}_i(t)) &= \\ -\gamma[1 - |1 - \lambda_2|^2 n \cdot \frac{1 + n|1 - \lambda_2|^2}{2n|1 - \lambda_2|^2}]V(\tilde{\delta}_i(t)) &= \\ -\gamma[\frac{1 - n|1 - \lambda_2|^2}{2}]V(\tilde{\delta}_i(t)). \end{aligned}$$

由 $|1 - \lambda_2| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ 可得 $\frac{1 - n|1 - \lambda_2|^2}{2} > 0$, 根据引理4可以推出 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_i(t) = 0, i = 2, \dots, N$, 即趋同能够达到. 证毕.

注3 定理1研究了系统矩阵 A 的所有特征值在虚轴上的情形. 接下来证明, 在矩阵 A 的特征值在闭左半平面且矩阵对 (A, B) 可稳时, 定理1的方法仍然可用. 事实上, 存在非奇异矩阵 $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix}, \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_s \end{bmatrix},$$

其中矩阵 A_0 和 A_s 分别包含矩阵 A 的所有在虚轴上和左平面的特征值. 由 (A, B) 是可稳的可以直接得出 (A_0, B_0) 是可稳的. 令 $\bar{x}_i(t) = Tx_i(t)$, 矩阵 T 的可逆性得出系统

$$\dot{\bar{x}}_i(t) = \bar{A}\bar{x}_i(t) + \bar{B}u_i(t), i \in \mathbb{N}$$

与多智能体系统(1)的趋同等价. 取增益 $K = [\delta^{-1}B_0^T P_0, 0]$, 令 $\tilde{\delta}_i(t) = [\tilde{\delta}_{i0}^T(t), \tilde{\delta}_{is}^T(t)]^T$. 类似于定理1中的证明, 此时的趋同问题等价于下面时滞系统的同步镇定性:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\delta}}_{i0}(t) &= A_0\tilde{\delta}_{i0}(t) - \sigma_i B_0 B_0^T P_0 \tilde{\delta}_{i0}(t) - \\ &\quad f_i B_0 B_0^T P_0 \Delta \tilde{\delta}_{i0}(t), \\ \dot{\tilde{\delta}}_{is}(t) &= A_s \tilde{\delta}_{is}(t) - \sigma_i B_s B_s^T P_0 \tilde{\delta}_{i0}(t) - \\ &\quad f_i B_s B_s^T P_0 \Delta \tilde{\delta}_{i0}(t), \end{aligned}$$

其中 $i = 2, \dots, N$. 基于定理1的证明可以直接得出: 对所有 $i = 2, \dots, N$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_{i0}(t) = 0$. 由于矩阵 A_s 是渐近稳定的, 从而由 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_{i0}(t) = 0$ 与 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \tilde{\delta}_{i0}(t) = 0$ 可以推出误差系统

$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_i(t) = 0$. 因此, 趋同仍然可以达到.

注4 定理1考虑了 $\delta = 1$ 的情形, 需要指出的是, 在 $\delta = \frac{2}{1+l}$ 且 $\delta \neq 1$ 时, 趋同仍然可以达到, 但是条件变强了. 事实上, $\delta = \frac{2}{1+l}$ 时, $\delta \neq 1$ 与 $l \neq 1$ 是等价的. 此时可以得到 $|1 - 2\delta^{-1} + l| = 0$ 和

$$1 - 2r_i + \frac{1}{l}|1 - 2r_i - f_i|^2 = \frac{(1+l)^2}{4l}|1 - \lambda_i|^2.$$

类似于定理1中的证明, 此时的趋同条件变为

$$\max_{i=2, \dots, N} |1 - \lambda_i| < \sqrt{\frac{4l}{(1+l)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

因为 $\sqrt{\frac{4l}{(1+l)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, 等号成立当且仅当 $l = 1$. 因此, 在 $\delta = \frac{2}{1+l}$ 且 $\delta \neq 1$ 时, 趋同的条件变强了.

定理1构建了独立于时滞的趋同条件, 现在给出依赖于时滞的趋同条件. 基于注3中的分析, 只需研究系统矩阵 A 的特征值在虚轴上的情形. 此外, 定义常数 $r_N \triangleq \max\{r_i, i = 2, \dots, N\}$, $\alpha \triangleq -\text{tr}(A^2)$.

定理2 假设矩阵 A 的特征值都在虚轴上且存在非零特征值, (A, B) 可控并且有向图 \mathcal{G} 是强连通的. 取 $\delta = \min\{\text{Re}(\lambda_i), i = 2, \dots, N\}$, 则多智能体系统(1)在协议(2)的作用下达到趋同的时滞范围为

$$0 \leq \tau \leq \tau_1 < \frac{1}{\sqrt{n(1 - 2\delta^{-1} + l^*)r_N \alpha}},$$

其中常数 $l^* = \max\{\frac{|1 - 2r_i - f_i|^2}{2r_i - 1}, i = 2, \dots, N\}$.

证 由 $\delta = \min\{\text{Re}(\lambda_i), i = 2, \dots, N\}$ 可知 $r_i = \text{Re}(\sigma_i) = \delta^{-1}\text{Re}(\lambda_i) \geq 1, i = 2, \dots, N$. 类似于定理1的证明, 本定理中的趋同问题等价于系统(6)的同步镇定性.

在式(8)中, 取 $l^* = \max\{\frac{|1 - 2r_i - f_i|^2}{2r_i - 1}, i = 2, \dots, N\}$, 则有

$$\begin{aligned} 1 - 2r_i + \frac{1}{l^*}|1 - 2r_i - f_i|^2 &\leq \\ 1 - 2r_i + 2r_i - 1 &= 0 \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} 1 - 2\delta^{-1} + l^* &\geq \\ 1 - 2\delta^{-1} + \frac{|1 - 2r_i - f_i|^2}{2r_i - 1} &= \frac{|f_i|^2}{2r_i - 1}. \end{aligned}$$

基于定理1证明过程中的假设 $f_i \neq 0$, 可以得到不等式 $1 - 2\delta^{-1} + l^* > 0$, 因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\delta}_i(t)) &\leq -\gamma \tilde{\delta}_i^H(t) P \tilde{\delta}_i(t) + (1 - 2\delta^{-1} + \\ &\quad l^*) \Delta \tilde{\delta}_i^H(t) K_\gamma^T K_\gamma \Delta \tilde{\delta}_i(t). \end{aligned}$$

从 $K_\gamma^T K_\gamma \leq n\gamma P$ 可知

$$\dot{V}(\tilde{\delta}_i(t)) \leq -\gamma \tilde{\delta}_i^H(t) P \tilde{\delta}_i(t) + n\gamma(1 - 2\delta^{-1} +$$

$$l^*)\Delta\tilde{\delta}_i^H(t)P\Delta\tilde{\delta}_i(t).$$

记 $A_i \triangleq A - \sigma_i BB^T P$, 基于方程(6)可得

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\delta}_i(t) &= \int_{t-\tau}^t \dot{\tilde{\delta}}_i(s) ds = \\ &= \int_{t-\tau}^t [A_i \tilde{\delta}_i(s) - f_i BB^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s)] ds. \end{aligned}$$

因此, 利用引理5, 有

$$\begin{aligned} &\Delta\tilde{\delta}_i^H(t)P\Delta\tilde{\delta}_i(t) \leq \\ &\tau \int_{t-\tau}^t [A_i \tilde{\delta}_i(s) - f_i BB^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s)]^H P [A_i \tilde{\delta}_i(s) - \\ &f_i BB^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s)] ds = \\ &\tau \int_{t-\tau}^t [\tilde{\delta}_i^H(s) A_i^H P A_i \tilde{\delta}_i(s) + |f_i|^2 \Delta\tilde{\delta}_i^H(s) P B B^T \times \\ &P B B^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s) - \tilde{f}_i \Delta\tilde{\delta}_i^H(s) P B B^T P A_i \tilde{\delta}_i(s) - \\ &f_i \tilde{\delta}_i^H(s) A_i^H P B B^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s)] ds. \end{aligned} \quad (10)$$

对于任意的常数 $h_1 > 0$, 由引理3可以得出

$$\begin{aligned} &-\tilde{f}_i \Delta\tilde{\delta}_i^H(s) P B B^T P A_i \tilde{\delta}_i(s) - \\ &f_i \tilde{\delta}_i^H(s) A_i^H P B B^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s) = \\ &[-f_i BB^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s)]^H P [A_i \tilde{\delta}_i(s)] + \\ &[A_i \tilde{\delta}_i(s)]^H P [-f_i BB^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s)] \leq \\ &\frac{1}{h_1} |f_i|^2 \Delta\tilde{\delta}_i^H(s) P B B^T P B B^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s) + \\ &h_1 \tilde{\delta}_i^H(s) A_i^H P A_i \tilde{\delta}_i(s). \end{aligned} \quad (11)$$

合并不等式(10)与(11)得

$$\begin{aligned} &\Delta\tilde{\delta}_i^H(t)P\Delta\tilde{\delta}_i(t) \leq \\ &\tau \int_{t-\tau}^t (1+h_1) \tilde{\delta}_i^H(s) A_i^H P A_i \tilde{\delta}_i(s) ds + \tau \int_{t-\tau}^t (1 + \\ &\frac{1}{h_1}) |f_i|^2 \Delta\tilde{\delta}_i^H(s) P B B^T P B B^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

类似于不等式(12)的推导过程, 由 $\sigma_i = r_i + jm_i$ 和引理3可以得到

$$\begin{aligned} &A_i^H P A_i = \\ &[A - \sigma_i BB^T P]^H P [A - \sigma_i BB^T P] \leq \\ &(1+h_2) [A - r_i BB^T P]^T P [A - r_i BB^T P] + \\ &(1 + \frac{1}{h_2}) m_i^2 P B B^T P B B^T P, \end{aligned}$$

其中 $h_2 > 0$ 为常数.

由于 $r_i \geq 1$, 那么由文献[21]中引理4可得

$$\begin{aligned} &[A - r_i BB^T P]^T P [A - r_i BB^T P] \leq \\ &[(r_i^2 n^2 + \frac{1}{2} r_i n - \frac{1}{2} r_i n^2) \gamma^2 + r_i \alpha] P \triangleq \\ &[II_i \gamma^2 + r_i \alpha] P, \end{aligned}$$

其中 $\alpha = -\text{tr}(A^2) > 0$ 为常数. 基于

$$P B B^T P B B^T P \leq P B \text{tr}(B^T P B) B^T P \leq (n\gamma)^2 P,$$

与 $r_N = \max\{r_i, i = 2, \dots, N\}$, 可得

$$\begin{aligned} &A_i^H P A_i \leq \\ &(1+h_2) [II_i \gamma^2 + r_i \alpha] P + (1 + \frac{1}{h_2}) m_i^2 (n\gamma)^2 P \leq \\ &(1+h_2) [II_N \gamma^2 + r_N \alpha] P + (1 + \frac{1}{h_2}) m^2 (n\gamma)^2 P, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $m \triangleq \max\{|m_i|, i = 2, \dots, N\}$. 另一方面,

$$\begin{aligned} &\Delta\tilde{\delta}_i^H(s) P B B^T P B B^T P \Delta\tilde{\delta}_i(s) \leq \\ &(n\gamma)^2 \Delta\tilde{\delta}_i^H(s) P \Delta\tilde{\delta}_i(s) = \\ &(n\gamma)^2 [\tilde{\delta}_i(s) - \tilde{\delta}_i(s-\tau)]^H P [\tilde{\delta}_i(s) - \tilde{\delta}_i(s-\tau)] \leq \\ &2(n\gamma)^2 [\tilde{\delta}_i^H(s) P \tilde{\delta}_i(s) + \tilde{\delta}_i^H(s-\tau) P \tilde{\delta}_i(s-\tau)] = \\ &2(n\gamma)^2 [V(\tilde{\delta}_i(s)) + V(\tilde{\delta}_i(s-\tau))]. \end{aligned} \quad (14)$$

假设对 $\forall \theta \in [-\tau_1, 0]$ 都有 $V(\tilde{\delta}_i(t+\theta)) < \eta V(\tilde{\delta}_i(t))$, 其中 $\eta > 1$ 为一待确定的常数. 那么, 合并不等式(12)–(14)有

$$\begin{aligned} &\Delta\tilde{\delta}_i^H(t)P\Delta\tilde{\delta}_i(t) \leq \\ &(1+h_1) [(1+h_2) (II_N \gamma^2 + r_N \alpha) + \\ &(1 + \frac{1}{h_2}) m^2 (n\gamma)^2] \tau^2 \eta V(\tilde{\delta}_i(t)) + \\ &4(1 + \frac{1}{h_1}) |f|^2 (n\gamma)^2 \tau^2 \eta V(\tilde{\delta}_i(t)) \triangleq \\ &\varrho_N(h_1, h_2, \gamma) \tau^2 \eta V(\tilde{\delta}_i(t)), \end{aligned}$$

其中 $|f| \triangleq \max\{|f_i|, i = 2, \dots, N\}$, 且

$$\begin{aligned} &\varrho_N(h_1, h_2, \gamma) = \\ &\{(1+h_1) [(1+h_2) II_N + (1 + \frac{1}{h_2}) m^2 n^2] + \\ &4(1 + \frac{1}{h_1}) |f|^2 n^2\} \gamma^2 + (1+h_1) (1+h_2) r_N \alpha. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\delta}_i(t)) &\leq -\gamma [1 - n(1 - 2\delta^{-1} + \\ &l^*) \varrho_N(h_1, h_2, \gamma) \tau^2 \eta] V(\tilde{\delta}_i(t)). \end{aligned}$$

接下来寻找4个适当的常数 h_1, h_2, γ 与 η 以保证

$$1 - n(1 - 2\delta^{-1} + l^*) \varrho_N(h_1, h_2, \gamma) \tau^2 \eta > 0.$$

由定理中给的条件容易得到

$$\tau_1^2 < \frac{1}{n(1 - 2\delta^{-1} + l^*) r_N \alpha}.$$

令 $\Delta t \triangleq [\frac{1}{n(1 - 2\delta^{-1} + l^*) r_N \alpha} - \tau_1^2] / 4 > 0$ 与 $\tau_0^2 \triangleq \tau_1^2 + \Delta t$, 则有 $\tau_0^2 > \tau_1^2$. 由 $n(1 - 2\delta^{-1} + l^*) r_N \alpha = \frac{1}{\tau^2 + 4\Delta t}$ 可以得出

$$n(1 - 2\delta^{-1} + l^*)r_N\alpha < \frac{1}{\tau_1^2 + 2\Delta t}.$$

显然存在 $h_1 = h_1^*, h_2 = h_2^*$ 以使

$$n(1 - 2\delta^{-1} + l^*)(1 + h_1^*)(1 + h_2^*)r_N\alpha \leq \frac{1}{\tau_1^2 + 2\Delta t} = \frac{1}{\tau_0^2 + \Delta t}.$$

取 $\gamma = \gamma^*$ 使得

$$n(1 - 2\delta^{-1} + l^*)\{(1 + h_1^*)[(1 + h_2^*)II_N + (1 + \frac{1}{h_2^*})m^2n^2] + 4(1 + \frac{1}{h_1^*})|f|^2n^2\}(\gamma^*)^2 \leq \frac{1}{\tau_0^2} - \frac{1}{\tau_0^2 + \Delta t}.$$

因此, 关系式 $n(1 - 2\delta^{-1} + l^*)\varrho_N(h_1^*, h_2^*, \gamma^*) \leq \frac{1}{\tau_0^2}$ 成立. 选取 $\eta = \frac{\tau_1^2 + \tau_0^2}{2\tau_1^2} > 1$, 可以得到

$$n(1 - 2\delta^{-1} + l^*)\varrho_N(h_1^*, h_2^*, \gamma^*)\eta\tau^2 \leq \frac{1}{\tau_0^2} \cdot \frac{\tau_1^2 + \tau_0^2}{2\tau_1^2} \cdot \tau_1^2 < 1.$$

结合引理4可以得出 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_i(t) = 0, i = 2, \dots, N$, 即趋同能够达到. 证毕.

注5 值得一提的是, 定理2中的趋同条件与时滞有关, 并且时滞的容许范围由网络拓扑和智能体结构决定, 因此称其为依赖于时滞的趋同条件.

注6 如果矩阵 $[D^{-1}L_G]$ 是可对角化的, 则前面研究的未知的通信时滞允许为时变的. 事实上, 假设 $\tau(t)$ 为时变时滞并令 $\Lambda = \Phi^{-1}[D^{-1}L_G]\Phi = \text{diag}\{0, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$, 则基于协议(2), 多智能体系统(1)的趋同仍等价于时滞系统(6)的同步镇定性, 其中 $\Delta\tilde{\delta}(t) = \tilde{\delta}(t) - \tilde{\delta}(t - \tau(t))$. 接下来的证明与定理1和定理2完全相同. 当网络拓扑 G 为无向图时, 由文献[18]可知矩阵 $[D^{-1}L_G]$ 是可对角化的并且其所有的特征值均为实数. 因此, 本文的结果将文献[18]中定长时滞推广到时变的情形.

下面的推论研究了矩阵 A 的特征值全为0的情形.

推论1 基于定理2的假设, 如果矩阵 A 的所有特征值均为0, 则多智能体系统(1)在协议(2)下对任意有界的通信时滞均能达到趋同.

证 由假设中矩阵 A 的所有特征值均为0可以得到 $\alpha = -\text{tr}(A^2) = 0$. 对任意有界时滞 $\tau > 0$, 存在常数 α^* 使得 $\tau < \frac{1}{\sqrt{n(1 - 2\delta^{-1} + l^*)r_N\alpha^*}}$. 因此, 由定理2的证明过程可知, 存在参数 γ^* 来保证趋同.

证毕.

5 仿真例子(Simulation results)

假设智能体 i 的动力学模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1}(t) \\ x_{i2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_i(t).$$

容易验证, 上述系统是可控的, 并且Riccati方程(3)的唯一正定解

$$P(\gamma) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma(\gamma^2 + 2)}{4} & -\frac{\gamma^2}{4} \\ -\frac{\gamma^2}{4} & \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}.$$

带有通信时滞的趋同协议设计为

$$u_i(t) = \frac{\delta^{-1}}{N_i} [-\frac{\gamma^2}{2} \gamma] \sum_{j=1}^N [x_j(t - \tau) - x_i(t)].$$

基于上面的假设, 本节研究下面两个例子.

例1 假设网络中有4个智能体, 它们之间的相互联系用有向图 $G_1 = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1, \mathcal{A}_1\}$ 来表示. 图 G_1 的邻接矩阵与Laplacian矩阵分别为

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } L_{G_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

很明显, 有向图 G_1 是强连通的. 经过简单计算可以得到, 矩阵 $[D_1^{-1}L_{G_1}]$ 的非零特征值为 $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4/3$ 与 $\lambda_4 = 5/3$. 容易验证例子中的条件满足定理1. 任意给定通信时滞 $\tau = 1$, 初值 $x_1(0) = [-5, 6]^T, x_2(0) = [-4, 12]^T, x_3 = [7, -9]^T$ 和 $x_4 = [8, -5]^T$. 在趋同协议中, 取 $\gamma = 0.15$ 与 $\delta = 1$. 由于第1个误差系统 $\tilde{\delta}_i(t) \equiv 0, i = 1, 2$, 图1-3给出了第2, 3, 4个误差系统的轨迹.

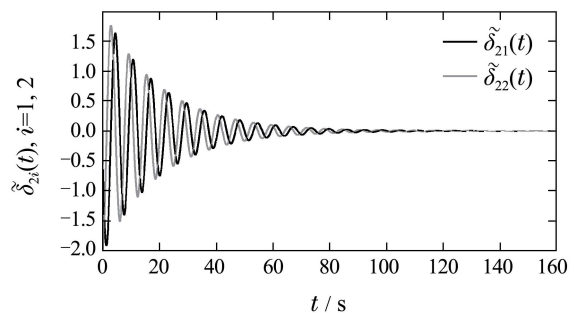


图1 第2个误差系统

Fig. 1 The second error systems

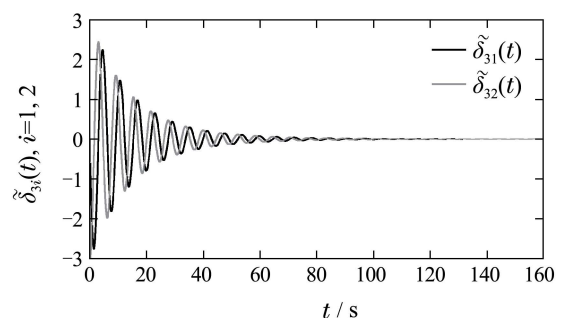


图2 第3个误差系统

Fig. 2 The third error systems

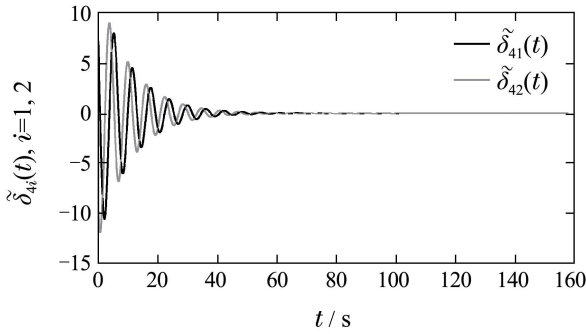


图3 第4个误差系统
Fig. 3 The fourth error systems

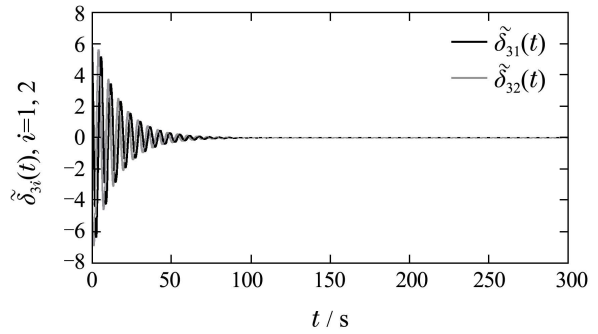


图6 第3个误差系统
Fig. 6 The third error systems

例2 考虑有3个智能体的网络,且网络拓扑为有向图 $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2, \mathcal{A}_2)$,其中顶点集 $\mathcal{V}_2 = \{1, 2, 3\}$,边集 $\mathcal{E}_2 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$.显然,图 \mathcal{G}_2 是强连通的且矩阵 $[D_2^{-1}L_{\mathcal{G}_2}]$ 的非零特征值为 $\lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_3 = 2$.

容易验证,定理1中的条件在本例子中不满足.基于定理2,取 $\delta = 1$,则容许的时滞上界计算为 $\bar{\tau} = 0.6124$.经过分析知矩阵 $[D_2^{-1}L_{\mathcal{G}_2}]$ 是可对角化的.接下来,任取时变时滞 $\tau(t) = 0.5 \times \sin^2 t$.由定理2,取参数 $\gamma = 0.04$.

图4–6给出了系统的加权平均状态及两个误差系统的轨迹.

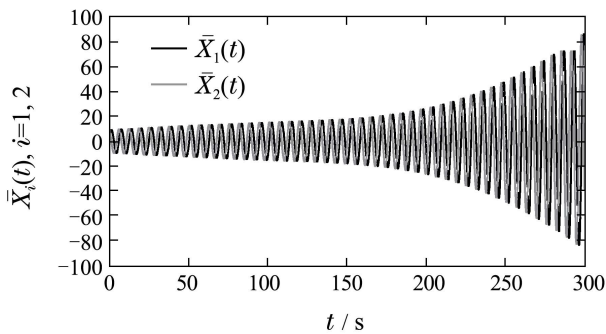


图4 加权平均状态
Fig. 4 The weighted average state

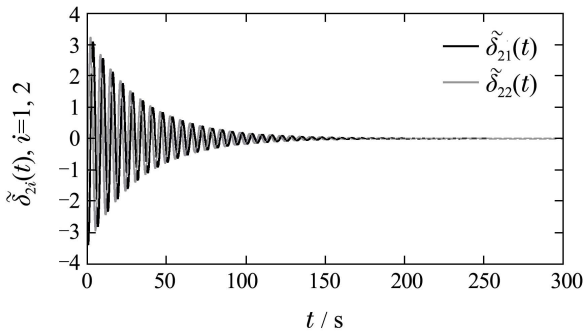


图5 第2个误差系统
Fig. 5 The second error systems

6 结论(Conclusions)

本文研究了受未知通信时滞影响的连续时间高阶多智能体系统的趋同问题.当系统矩阵的极点在闭左半平面且有向拓扑为强连通图时,基于智能体的结构和网络拓扑分别给出了独立于时滞和依赖于时滞的趋同条件.值得一提的是,将本文的结果扩展到系统极点在右平面和网络拓扑为时变图的情形将是下一步的研究目标.

参考文献(References):

- [1] OLFATI-SABER R, SHAMMA J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. Seville: IEEE, 2005: 6698 – 6703.
- [2] FAX J A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1476.
- [3] CAO Y, REN W, MENG Z. Decentralized finite-time sliding mode estimators and their applications in decentralized finite-time formation tracking [J]. *Systems and Control Letters*, 2010, 59(9): 522 – 529.
- [4] VICSEK T, CZIROK A, JACOB E B, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 – 1229.
- [5] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [6] KUANG J, ZHU J. On consensus protocols for high-order multiagent systems [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010, 8(4): 406 – 412.
- [7] MA C, ZHANG J. Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(5): 1263 – 1268.
- [8] YOU K, XIE L. Network topology and communication data rate for consensusability of discrete-time multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(10): 2062 – 2075.
- [9] FANG H, CHEN H, WEN L. On control of strong consensus for networked agents with noisy observations [J]. *Journal of Systems Science & Complexity*, 2012, 25(1): 1 – 12.
- [10] 王芳, 陈鑫, 何勇, 等. 联合连通条件下的二阶多智能体系统有限时间一致性控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(7): 981 – 986. (WANG Fang, CHEN Xin, HE Yong, et al. Finite-time consensus control of second-order multi-agent systems with jointly-connected topologies [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 981 – 986.)

- [11] LIU X, CHEN T. Robust μ -stability for uncertain stochastic neural networks with unbounded time-varying delays [J]. *Physica A*, 2008, 387(12): 2952 – 2962.
- [12] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [13] LIN P, JIA Y. Consensus of a class of second-order multi-agent systems with time-delay and jointly-connected topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(3): 778 – 784.
- [14] WANG X, SABERI A, STOOVOGEL A A, et al. Consensus in the network with uniform constant communication delay [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2461 – 2467.
- [15] ZHOU B, LIN Z. Consensus of high-order multi-agent systems with large input and communication delays [J]. *Automatica*, 2014, 50(2): 452 – 464.
- [16] MOREAU L. Stability of continuous-time distributed consensus algorithms [C] // *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis: IEEE, 2004: 3998 – 4003.
- [17] XIAO F, WANG L. A new approach to consensus problems in discrete-time multi-agent systems with time-delays [J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2007, 50(4): 625 – 635.
- [18] ZENG L, HU G. Consensus of linear multi-agent systems with communication and input delays [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(7): 1133 – 1139.
- [19] LIN Z, FANG H. On asymptotic stabilizability of linear systems with delayed input [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(6): 998 – 1013.
- [20] ZHOU B, LIN Z, DUAN G. Properties of the parametric Lyapunov equation-based low-gain design with applications in stabilization of time-delay systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1698 – 1704.
- [21] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [22] WANG Z, XU J, ZHANG H. Consensusability of multi-agent systems with time-varying communication delay [J]. *Systems and Control Letters*, 2014, 65(1): 37 – 42.
- [23] GU K, KHARITONOV V L, CHEN J. *Stability of Time-Delay Systems* [M]. Boston: Birkhäuser, 2003.
- [24] GU K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems [C] // *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney: IEEE, 2000: 2805 – 2810.

作者简介:

王振华 (1984–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为多智能体系统控制、时滞系统的稳定性等, E-mail: wzhua111@126.com;

徐娟娟 (1984–), 女, 博士, 目前研究方向为分布式控制、博弈论、随机控制等, E-mail: jnxujuanjuan@163.com;

张焕水 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为随机系统及时滞系统最优控制理论、网络控制系统、无线传感器网络跟踪定位理论等, E-mail: hszhang@sdu.edu.cn.