

参数完全未知的不同混沌系统的尺度与混合同步

朱慧坚¹, 曾才斌^{2†}

(1. 华南理工大学 数学学院, 广东 广州 510640; 2. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 本文研究了具有不确定参数的Chen系统与Yang系统之间的尺度与混合同步. 基于Lyapunov稳定性理论, 首先提出一些充分条件来同步具有一个自由尺度因子的上述两个系统. 尺度因子的自由性使其在安全通信方面非常有用, 并且最关键的步骤是设计一个新的带有参数估计更新律的自适应控制器. 在无需参数的先验信息的条件下, 本文从理论上严格证明所提的尺度同步方案, 并且通过大量的数值模拟来验证其有效性. 最后, 证明上述所提出的同步策略也适合于异结构混沌系统的混合同步.

关键词: 混沌同步; 参数估计; 自适应控制

中图分类号: O415.5 文献标识码: A

Scaling and mixed synchronization for different chaotic systems with totally unknown parameters

ZHU Hui-jian¹, ZENG Cai-bin^{2†}

(1. School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;

2. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: This paper investigates scaling and mixed synchronization between Chen system and Yang system with uncertain parameters. On the basis of the Lyapunov stability theory, we present some sufficient conditions to synchronize these two systems up to a free scaling factor. The scaling factor is a free parameter, which makes it very useful in security communications. The key step is to design a new adaptive controller with parameter update laws. Without the prior knowledge of parameters, we give a rigorous proof in theory and carry out many simulations to verify the validation of the proposed scheme. Finally, we show that our proposed approaches in this paper are also valid for mixed synchronization.

Key words: chaos synchronization; parameter estimator; adaptive control

1 引言(Introduction)

参数和初始条件的高度敏感性是刻画混沌特征的典型方法. 更确切来说, 两个混沌系统的初始条件的极其微小的不同能导致完全不同的动力学轨迹. 这个现象诱导出一个有趣的研究方向, 即混沌同步. 该研究主题的首次结果可以追溯到20世纪80年代Yamada等人关于振荡系统的文章^[1-2]. 然而直到1990年Pecora与Carroll提出混沌同步的方法并应用到安全通信^[3], 该主题才开始吸引大量的关注^[4].

根据两个交互系统的关系, 同步行为可分为如下几个类型: 完全同步^[3], 相位同步^[5], 时延同步^[6], 反同步^[7], 广义同步^[8]. 这些定义也可以看做不同程度的同步实现^[9]. 沿着这些定义, 混沌同步通过不同的方法来实现, 例如反馈控制方法^[10]、自适应控制方法^[11]、滑模控制方法^[12-14].

另外, 在安全通信和混沌同步的实际应用中, 混沌系统往往是部分可知. 换言之, 混沌系统对应的微分方程是已知的但是系统参数是部分乃至全部未知. 于是, 借助自适应控制与参数调制方法, 具有未知参数的混沌同步也被Adloo等人讨论^[11, 15]. 然而为了增强安全通信的保密性, 可以在驱动系统和响应系统之间引入一个尺度因子. 这意味着驱动信号与响应信号之间的同步可以由一个尺度因子 λ 来支配. 当 $\lambda > 0$ 时, 称之为同相同步, 反之当 $\lambda < 0$ 时, 称之为反相同步. 此时尺度因子能刻画部分线性混沌系统的投影同步的动力学行为, 但是该因子在实际通信中很难被预估和探测.

最近, Yang和Chen提出一个带有鞍点和两个结焦点的新系统^[16]. 该系统的特殊性质使得其不但有迷人的数学结构而且在安全通信的实际应用中有一定的

收稿日期: 2014-03-31; 录用日期: 2014-11-17.

†通信作者. E-mail: aucbzeng@scut.edu.cn; zeng.cb@mail.scut.edu.cn; Tel.: +86 15814538308.

中国博士后科学基金项目(2014M550434, 2014M552528), 华南理工大学中央高校基本科研业务费项目(2014ZB0033)资助.

Supported by China Postdoctoral Science Foundation (2014M550434, 2014M552528) and Fundamental Research Funds for the Central Universities of South China University of Technology (2014ZB0033).

意义. 显然, 新系统与经典的Lorenz系统、Chen系统、其他Lorenz-like系统都是拓扑不等价的. Liu等人严格分析了该系统的更为复杂的动力学行为, 获得其平衡点稳定的充分必要条件、同宿轨与异宿轨的存在判据^[17-18]. 接着该系统的超混沌复杂动力学进一步被分析, 并被称为Yang系统^[19]. 引入分数微积分理论, Zeng等人提出分数阶Yang系统, 并研究分数阶算子的非局部效应^[20]. 最近, 假定驱动系统与响应系统有相同的结构, Zhu等人将尺度因子引入超混沌Yang系统并研究同步问题^[21].

当驱动系统与响应系统有相同的结构时, 很多线性或非线性控制方法被提出并应用到实现混沌同步^[22-24]. 在实际应用中, 人们很难找到两个一模一样的混沌系统. 因此两个不同的混沌系统之间的同步在实际应用中具有更为显著的意义. 特别地, 如果两个混沌系统的参数完全未知且具有一个自由尺度因子, 其同步策略也相应显得更为困难. 据笔者所知, 如何设计合适的控制器来同步具有完全未知参数和自由尺度因子的不同混沌系统未见报道. 这激发笔者探索具有未知参数与尺度因子的异结构混沌同步问题.

本文的其他部分组织如下: 第2节回顾Yang系统与Chen系统的典型吸引子; 第3节通过设计一个新的带有参数估计更新律的自适应控制器, 建立了尺度同步策略, 并进行大量的数值模拟来验证其有效性; 第4节, 进一步将其推广到混合同步的实现; 第5节, 最后给出一些简洁的注释.

2 系统描述(System description)

Chen系统可以描述为^[25-26]

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a(x_2 - x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} = (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3, \end{cases} \quad (1)$$

其中: 变量 $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ 代表状态变量, a, b, c 是控制参数. 特别地, 当参数 $a = 35, b = 3, c = 28$ 时, 并取如下初始条件 $(1, -2, 2)$, 可以得到一个典型Chen混沌吸引子, 如图1所示.

Yang系统可以描述为^[16-17]

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \alpha(y_2 - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} = \gamma y_1 - y_1 y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} = y_1 y_2 - \beta y_3, \end{cases} \quad (2)$$

其中: 变量 $Y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ 代表状态变量, α, β, γ 是控制参数. 特别地, 当参数 $\alpha = 35, \beta = 3, \gamma = 35$ 时, 并取如下初始条件 $(1.15, 3.5, 3.3)$, 可以得到一个典型Yang混沌吸引子, 如图2所示.

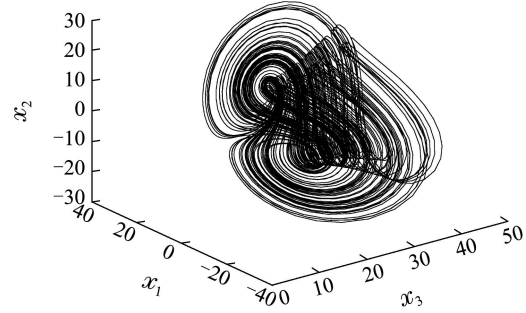


图1 Chen混沌吸引子, 其中 $(a, b, c) = (35, 3, 28)$
Fig. 1 Chen Chaotic attractor with $(a, b, c) = (35, 3, 28)$

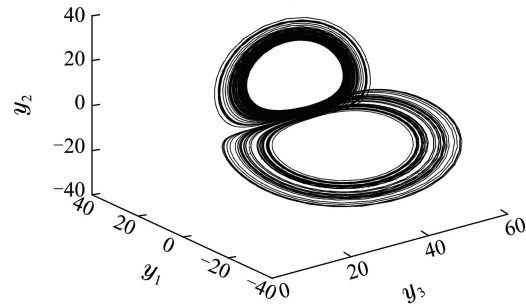


图2 Yang混沌吸引子, 其中 $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$
Fig. 2 Yang Chaotic attractor with $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$

注1 类似于其他三维Lorenz-like系统, 虽然Yang系统(2)的右端也有6项, 其中有2项非线性项, 但是它具有一个鞍点与两个结焦点, 这个特殊的结构使其有别于其他所有三维Lorenz-like系统.

3 尺度同步(Scaling synchronization)

3.1 理论分析(Theoretical analysis)

取Chen系统(1)为驱动系统, 而响应系统是受控的Yang系统, 形式如下:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = \alpha(z_2 - z_1) + u_1, \\ \frac{dz_2}{dt} = \gamma z_1 - z_1 z_3 + u_2, \\ \frac{dz_3}{dt} = z_1 z_2 - \beta z_3 + u_3, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $u_i (i = 1, 2, 3)$ 是待定的控制器, 目的是使得上述两个系统(1)与(3)达到同步.

令误差变量 $e_1 = z_1 - \lambda x_1, e_2 = z_2 - \lambda x_2, e_3 = z_3 - \lambda x_3$, 这里 $\lambda \neq 0$ 是一个自由尺度因子. 这样, 式(1)与(3)之间的误差系统可记为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = \alpha(z_2 - z_1) - \lambda a(x_2 - x_1) + u_1, \\ \frac{de_2}{dt} = \gamma z_1 - z_1 z_3 - \lambda((c - a)x_1 - x_1 x_3 + cx_2) + u_2, \\ \frac{de_3}{dt} = z_1 z_2 - \beta z_3 - \lambda(x_1 x_2 - bx_3) + u_3. \end{cases} \quad (4)$$

假定所有参数 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 都是未知的. 接下来的目标寻找带有合适的参数估计更新律的控制器 u_i

使得等式 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0$ 成立, 其中 $i = 1, 2, 3$.

定理 1 设计如下控制器:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha'(z_1 - z_2) + \lambda a'(x_2 - x_1) - l_1 e_1, \\ u_2 = -\gamma' z_1 + z_1 z_3 + \lambda((c' - a')x_1 - x_1 x_3 + c' x_2) - l_2 e_2, \\ u_3 = \beta' z_3 - z_1 z_2 + \lambda(x_1 x_2 - b' x_3) - l_3 e_3, \end{cases} \quad (5)$$

于是不确定Chen系统(1)能同步到不确定的受控Yang系统(3), 其中 $l_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ 是任意实数, $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ 分别代表参数 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 的估计值, 且参数估计更新律满足

$$\begin{cases} \frac{da'}{dt} = -\lambda(x_2 - x_1)e_1 + \lambda x_1 e_2, \\ \frac{db'}{dt} = \lambda x_3 e_3, \\ \frac{dc'}{dt} = -\lambda(x_1 + x_2)e_2, \\ \frac{d\alpha'}{dt} = (z_2 - z_1)e_1, \\ \frac{d\beta'}{dt} = -z_3 e_3, \\ \frac{d\gamma'}{dt} = z_1 e_2. \end{cases} \quad (6)$$

证 将方程(5)代入方程(4), 可以得到

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = \alpha''(z_2 - z_1) - \lambda a''(x_2 - x_1) - l_1 e_1, \\ \frac{de_2}{dt} = \gamma'' z_1 - \lambda((c'' - a'')x_1 + c'' x_2) - l_2 e_2, \\ \frac{de_3}{dt} = -\beta'' z_3 + \lambda b'' x_3 - l_3 e_3, \end{cases} \quad (7)$$

其中取如下记号: $a'' = a - a', b'' = b - b', c'' = c - c', \alpha'' = \alpha - \alpha', \beta'' = \beta - \beta', \gamma'' = \gamma - \gamma'$.

接着构造如下Lyapunov函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 e_i^2 + a''^2 + b''^2 + c''^2 + \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 \right). \quad (8)$$

对函数 V 关于时间 t 求导, 并利用关系式(6)–(7), 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & e_1 \frac{de_1}{dt} + e_2 \frac{de_2}{dt} + e_3 \frac{de_3}{dt} + a'' \frac{da''}{dt} + b'' \frac{db''}{dt} + \\ & c'' \frac{dc''}{dt} + \alpha'' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta'' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma''}{dt} = \\ & e_1 \frac{de_1}{dt} + e_2 \frac{de_2}{dt} + e_3 \frac{de_3}{dt} - a'' \frac{da'}{dt} - b'' \frac{db'}{dt} - \\ & c'' \frac{dc'}{dt} - \alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} - \beta'' \frac{d\beta'}{dt} - \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} = \\ & -l_1 e_1^2 - l_2 e_2^2 - l_3 e_3^2. \end{aligned}$$

既然 $l_i (i = 1, 2, 3)$ 都是正常数, 上式表明 $\frac{dV}{dt}$ 是一个负定函数. 根据Lyapunov稳定性理论, 得到误差系统(4)在平凡解的邻域内是渐进稳定的, 这表明驱动系统(1)与响应系统(3)之间的尺度同步可以达到.

3.2 数值模拟(Numerical simulation)

不失一般性, 在下面的数值模拟中总是假定控制参数的输入为 $(l_1, l_2, l_3) = (5, 5, 5)$, 选取经典系统参数 $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$. 显然在没有控制器的情况下, Chen系统与Yang系统能展现混沌行为, 可参见第2节的图1和图2. 另外, Chen系统和受控的Yang系统的初始值分别为 $X_0 = (1, -2, 2)$ 和 $Z_0 = (1.15, 3.5, 3.3)$. 进一步选取被估计参数的初始值为 $a' = 30, b' = 3.3, c' = 30, \alpha' = 30, \beta' = 3.3, \gamma' = 30$.

下面令非零尺度因子 $\lambda = -2$, 这种情况对应着反相同步且两个吸引子的相位差为 π . 对应的两个吸引子如图3所示, 其中驱动吸引子是较小的(红色实线的), 响应吸引子是较大的(蓝色虚线的). 对应误差系统随时间演化过程如图4所示. 而关于参数 (a', b', c') 和 $(\alpha', \beta', \gamma')$ 的估计值随时间演化过程分别见于图5和图6, 这表明了所有不确定参数在所设计的控制器作用下能收敛到它们的实际值.

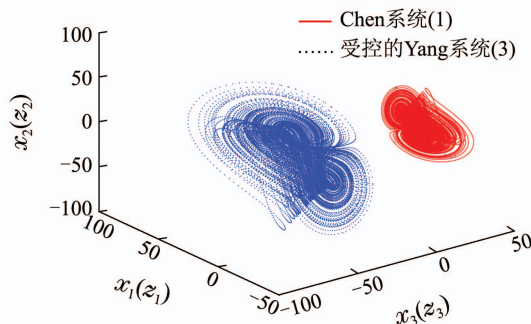


图 3 尺度吸引子, 其中 $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$ 和 $\lambda = -2$
Fig. 3 Scaling attractors, with $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$ and $\lambda = -2$

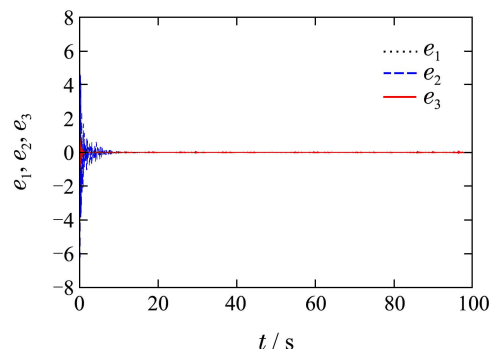


图 4 误差系统的演化图, 其中 $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$ 和 $\lambda = -2$
Fig. 4 Evolution of error systems, with $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$ and $\lambda = -2$

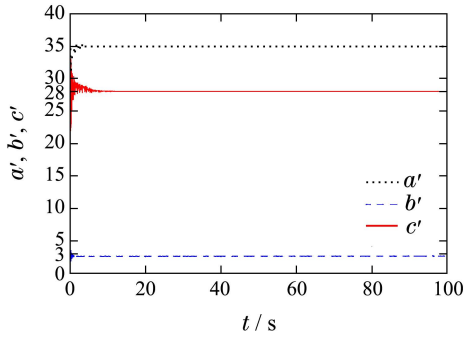


图5 参数a, b和c的估计值

Fig. 5 Estimated values of the parameters a, b and c

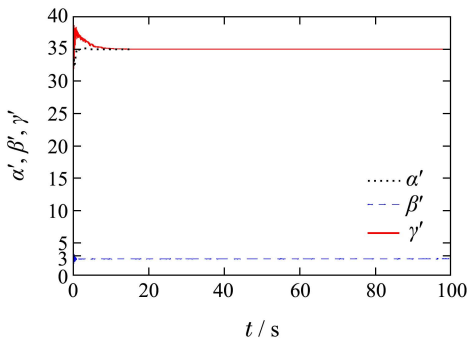


图6 参数alpha, beta和gamma的估计值

Fig. 6 Estimated values of the parameters α, β and γ

当尺度因子 $\lambda = 2$, 这种情况对应着同相同步. 对应的两个吸引子如图7所示, 其中驱动吸引子是较小的(红色实线的), 响应吸引子是较大的(蓝色虚线的). 对应误差系统随时间演化过程如图8所示. 而关于参数 (a', b', c') 和 $(\alpha', \beta', \gamma')$ 的估计值随时间演化过程分别见于图9和图10, 这表明了所有不确定参数在所设计的控制器作用下能收敛到它们的实际值.

注2 从上述数值模拟可以看出, 如果Chen系统(1)存在一个吸引子 \mathcal{A} , 那么受控Yang系统(3)经过设计合适的控制器后拥有 λ 倍吸引子, 即 $\lambda\mathcal{A}$.

注3 本文所提出的同步方案同样适合于相同结构的混沌尺度同步, 此时驱动系统和响应系统具有相同的结构, 这表明相同结构的混沌尺度同步是本文的一种特殊情况.

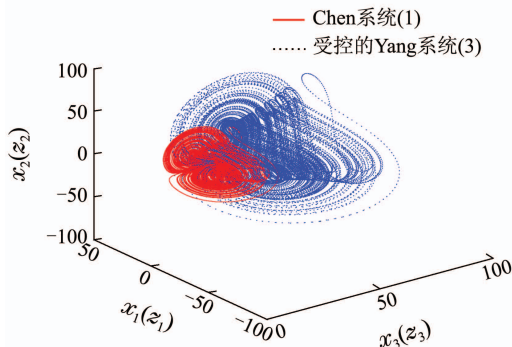


图7 尺度吸引子, 其中 $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$ 和 $\lambda = 2$

Fig. 7 Scaling attractors, with $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$ and $\lambda = 2$

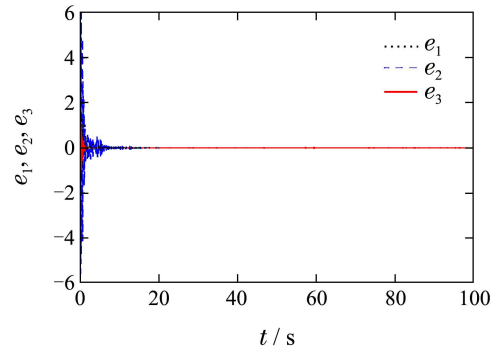


图8 误差系统的演化图, 其中 $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$ 和 $\lambda = 2$

Fig. 8 Evolution of error systems, with $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$ and $\lambda = 2$

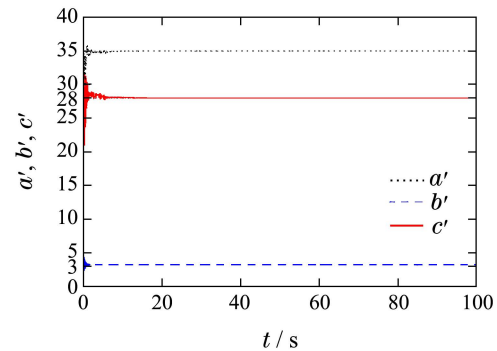


图9 参数a, b, 和c的估计值

Fig. 9 Estimated values of the parameters $a, b,$ and c

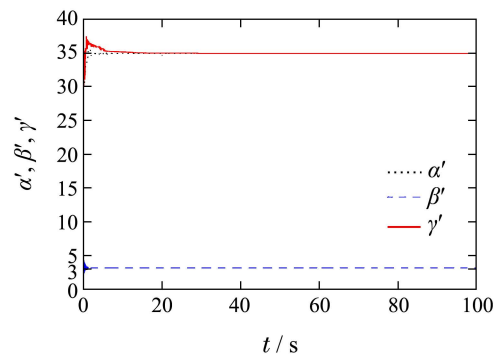


图10 参数alpha, beta, 和gamma的估计值

Fig. 10 Estimated values of the parameters $\alpha, \beta,$ and γ

4 混合同步(Mixed synchronization)

值得提出的是, 尺度因子 λ 在不同的方程中不一定限制为恒正或恒负, 可以选取不同的符号. 这种情况对应于混合同步, 此时部分状态变量是同相同步, 而其他部分却是反相同步.

4.1 理论分析(Theoretical analysis)

依然分别选择Chen系统(1)和受控的Yang系统(3)为驱动系统和响应系统. 为了研究式(1)与式(3)之间混合同步问题, 可以假定误差系统选取如下:

$$e_1 = z_1 - \lambda_1 x_1, \quad e_2 = z_2 - \lambda_2 x_2, \quad e_3 = z_3 - \lambda_3 x_3,$$

其中 $\lambda_i \neq 0 (i = 1, 2, 3)$ 都是自由尺度因子. 不难看出, 式(1)和式(3)之间的误差系统可表示为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = \alpha(z_2 - z_1) - \lambda_1 a(x_2 - x_1) + u_1, \\ \frac{de_2}{dt} = \gamma z_1 - z_1 z_3 - \lambda_2((c - a)x_1 - x_1 x_3 + cx_2) + u_2, \\ \frac{de_3}{dt} = z_1 z_2 - \beta z_3 - \lambda_3(x_1 x_2 - bx_3) + u_3, \end{cases} \quad (9)$$

这里, 所有参数 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 都是完全未知的.

类似于定理1的证明, 可以得到如下结论.

定理 2 设计如下控制器:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha'(z_1 - z_2) + \lambda_1 a'(x_2 - x_1) - l_1 e_1, \\ u_2 = -\gamma' z_1 + z_1 z_3 + \lambda_2((c' - a')x_1 - x_1 x_3 + c' x_2) - l_2 e_2, \\ u_3 = \beta' z_3 - z_1 z_2 + \lambda_3(x_1 x_2 - b' x_3) - l_3 e_3, \end{cases} \quad (10)$$

则不确定Chen系统(1)能同步到不确定的受控Yang系统(3), 其中: $l_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ 是任意实数, $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ 分别代表参数 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 的估计值, 且参数估计更新律满足

$$\begin{cases} \frac{da'}{dt} = -\lambda_1(x_2 - x_1)e_1 + \lambda_2 x_1 e_2, \\ \frac{db'}{dt} = \lambda_3 x_3 e_3, \\ \frac{dc'}{dt} = -\lambda_2(x_1 + x_2)e_2, \\ \frac{d\alpha'}{dt} = (z_2 - z_1)e_1, \\ \frac{d\beta'}{dt} = -z_3 e_3, \\ \frac{d\gamma'}{dt} = z_1 e_2. \end{cases} \quad (11)$$

4.2 数值模拟(Numerical simulation)

选择与第3节一样的参数值和相同的初始值. 但是, 令尺度因子为 $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ 和 $\lambda_2 = -2$. 这种情况对应着第1个和第3个状态变量是同相同步, 然而第2个状态变量是反相同步.

此时, 对应的两个吸引子如图11所示, 其中驱动吸引子是较小的(红色实线的), 响应吸引子是较大的(蓝色虚线的). 对应误差系统随时间演化过程如图12所示. 而关于参数 (a', b', c') 和 $(\alpha', \beta', \gamma')$ 的估计值随时间演化过程分别见于图13和图14, 这表明了所有不确定参数在所设计的控制器作用下能收敛到它们的实际值.

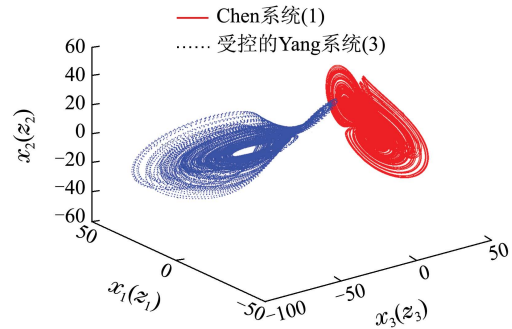


图 11 尺度吸引子, 其中 $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ 和 $\lambda_2 = -2$

Fig. 11 Scaling attractors, with $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ and $\lambda_2 = -2$

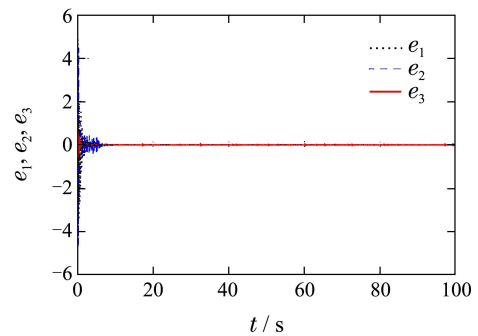


图 12 误差系统的演化图, 其中 $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ 和 $\lambda_2 = -2$

Fig. 12 Evolution of error systems, with $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (35, 3, 35)$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ and $\lambda_2 = -2$

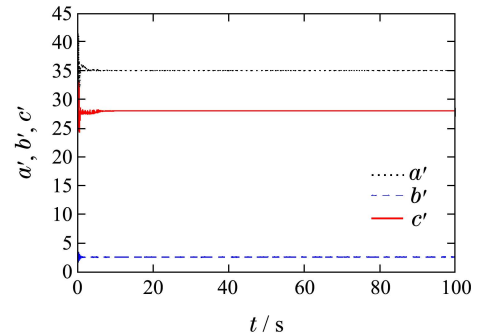


图 13 参数 a, b 和 c 的估计值

Fig. 13 Estimated values of the parameters a, b and c

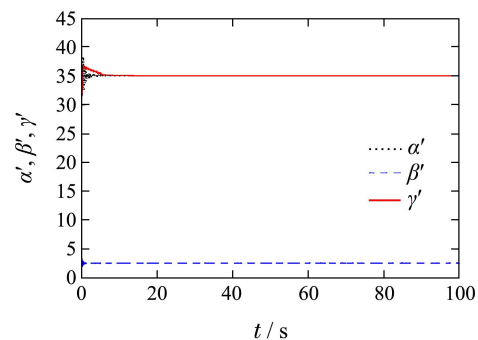


图 14 参数 α, β 和 γ 的估计值

Fig. 14 Estimated values of the parameters α, β and γ

参考文献(References):

- [1] YAMADA T, FUJISAKA H. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems, II [J]. *Progress of Theoretical Physics*, 1983, 70(5): 1240 – 1248.
- [2] AFRAIMOVICH V S, VERICHEV N N, RABINOVICH M I. Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems [J]. *Izvestija Vuzov, Radiofizika*, 1986, 29(9): 795 – 803.
- [3] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems [J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821 – 824.
- [4] JOVIC B. *Synchronization Techniques for Chaotic Communication Systems* [M]. Berlin and Heidelberg: Springer, 2011.
- [5] CHEN J Y, WONG K W, CHENG L M, et al. A secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems [J]. *Chaos*, 2003, 13(2): 508 – 514.
- [6] TAHERION S, LAI Y C. Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators [J]. *Physical Review E*, 1999, 59(6): R6247 – R6250.
- [7] VOSS H U. Anticipating chaotic synchronization [J]. *Physical Review E*, 2000, 61(5): 5115 – 5119.
- [8] YANG T, YANG L B, YANG C M. Breaking chaotic switching using generalized synchronization: examples [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, 1998, 45(10): 1062 – 1067.
- [9] PIKOVSKY A S, ROSENBLUM M G, KURTHS J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [10] YASSEN M T. Controlling chaos and synchronization for new chaotic systems using feedback control [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2005, 26(3): 913 – 920.
- [11] ADLOO H, ROOPAEI M. Review article on adaptive synchronization of chaotic systems with unknown parameters [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 65(1/2): 141 – 159.
- [12] CHEN D Y, ZHANG R F, MA X Y, et al. Chaotic synchronization and anti-synchronization for a novel class of multiple chaotic systems via a sliding mode control scheme [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(1/2): 35 – 55.
- [13] CHEN D Y, ZHAO W L, MA X Y, et al. Control and synchronization of chaos in RCL-shunted Josephson junction with noise disturbance using only one controller term [J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, Article ID 378457, 14 pages.
- [14] THUNBERG J, SONG W, HONG Y, et al. Distributed attitude synchronization using backstepping and sliding mode control [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2014, 12(1): 48 – 55.
- [15] YASSEN M T. Adaptive synchronization of two different uncertain chaotic systems [J]. *Physics Letters A*, 2005, 337(4/5/6): 335 – 341.
- [16] YANG Q G, CHEN G R. A chaotic system with one saddle and two stable node-foci [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, 18(5): 1393 – 1414.
- [17] LIU Y J. Closed orbits in the general Lorenz family [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2011, 21(9): 2583 – 2586.
- [18] LIU Y J, YANG Q G. Dynamics of a new Lorenz-like chaotic system [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(4): 2563 – 2572.
- [19] LUO Q, LIAO X X, ZENG Z G. Sufficient and necessary conditions for Lyapunov stability of Lorenz system and their application [J]. *Science China Information Sciences*, 2010, 53(8): 1574 – 1583.
- [20] ZENG C B, YANG Q G, WANG J W. Chaos and mixed synchronization of a new fractional-order system with one saddle and two stable node-foci [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 65(4): 457 – 466.
- [21] ZHU H J, ZENG C B. Scaling synchronization of hyperchaotic Yang system [J]. *Optoelectronics and Advanced Materials-Rapid Communications*, 2014, 8(1/2): 100 – 108.
- [22] HEGAZI A S, AHMED E, MATOUK A E. On chaos control and synchronization of the commensurate fractional order Liu system [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 18(5): 1193 – 1202.
- [23] WANG X, JIANG S, LUO C. Adaptive synchronization of a novel hyperchaotic system with fully unknown parameters [J]. *International Journal of Modern Physics B*, 2013, 27(32): 1350197.
- [24] TU J, HE H, XIONG P. Adaptive backstepping synchronization between chaotic systems with unknown Lipschitz constant [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 236: 10 – 18.
- [25] CHEN G R, UETA T. Yet another chaotic attractor [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1465 – 1466.
- [26] UETA T, CHEN G R. Bifurcation analysis of Chen's equation [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10(8): 1917 – 1931.

作者简介:

朱慧坚 (1977-), 女, 讲师, 博士, 目前研究方向为混沌动力学、混沌同步及其应用、随机同步等, E-mail: hjzhu2013@gmail.com;

曾才斌 (1984-), 男, 助理研究员, 博士, 目前研究方向为分数布朗运动、分数微积分理论、随机微分方程、遍历性、混沌同步等, E-mail: aucbzeng@scut.edu.cn.