

一类线性连续切换系统的迭代学习控制

卜旭辉¹, 侯忠生², 余发山¹

(1. 河南理工大学 电气工程与自动化学院, 河南 焦作 454000; 2. 北京交通大学 电子信息工程学院, 北京 100044)

摘要: 针对有限时间区间内执行重复控制任务的线性连续切换系统, 考虑基于迭代学习的跟踪控制问题. 假设线性切换系统的切换率在时间域内是任意的, 提出该类系统的D型迭代学习控制算法. 理论分析表明, 当学习增益矩阵满足一定的条件时, D型迭代学习控制算法可以保证切换系统的实际输出在整个运行区间上一致收敛于期望输出, 实现完全跟踪控制. 数值仿真进一步验证了方法的有效性.

关键词: 迭代学习控制; 切换系统; 任意切换率; 收敛性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Iterative learning control for a class of linear continuous-time switched systems

BU Xu-hui¹, HOU Zhong-sheng², YU Fa-shan¹

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan 454000, China;

2. School of Electronics and Information Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: The problem of iterative learning control for a class of linear continuous-time switched systems with arbitrary switched rules is considered. It is assumed that the considered switched systems are operated during a finite time interval repetitively, and then the iterative learning control scheme can be introduced. It is also shown that under some given conditions, the D-type iterative learning control law can guarantee the asymptotic convergence of the output error between the desired output and the actual output for the entire time interval through the iterative learning process. And then an example is given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Key words: iterative learning control; switched systems; arbitrary switched rules; convergence

1 引言(Introduction)

切换系统是一类重要的混杂系统, 它由一系列子系统(连续子系统或者离散子系统)和子系统之间的切换规则所组成. 目前, 切换系统在电力系统^[1]、机器人系统^[2]、化工过程控制系统^[3]以及交通控制系统^[4]等有着广泛的应用. 子系统为线性系统的切换系统称之为线性切换系统, 现有关于切换系统的研究结果大多针对线性切换系统, 研究内容包括可达性可控性^[5-8]、可观性^[9-10]、稳定性^[11-13]以及控制器设计^[14-16]等方面. 然而, 切换系统跟踪控制问题的研究鲜有报道. 与稳定和镇定问题相比, 实现切换系统的跟踪控制相对比较困难.

迭代学习控制是一种仿人思维的智能控制方法, 它针对在有限区间内重复运行的控制任务, 通过不断的学习可实现有限时间区间的完全跟踪^[17]. 经过近20年的发展, 迭代学习控制日趋完善, 其理论体系不断丰富, 应用范围也越来越广泛^[18-28]. 迭代学习

控制的研究对象包括线性系统、非线性系统、时滞系统、分数阶系统、互联系统、大系统等, 然而迭代学习控制应用于切换系统的问题尚无研究. 将迭代学习控制方法应用于切换系统的前提是切换系统在运行过程中具有重复性, 这在实际系统中是经常遇到的. 如果交通控制系统可以描述为一个切换系统, 而交通控制系统在实际运行过程存在较强的重复性, 交通流每天相同的时刻都是相似的, 而拥堵也发生在同样的时段^[29]. 此外, 其他实际中可表示为切换系统的过程如化工间歇过程也同样存在较强的重复性^[30], 这些重复性为迭代学习控制应用于切换系统提供了依据.

本文研究线性切换系统迭代学习控制的稳定性分析问题. 线性切换系统的稳定性研究包括两类问题: 已知子系统和随机切换序列研究稳定性、已知子系统设计切换序列保证切换系统的稳定性. 本文针对具有随机切换序列的线性连续切换系统, 讨论

D型迭代学习控制算法的收敛性. 理论上给出算法的收敛性条件, 并通过仿真验证理论结果.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下线性连续时间切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\alpha(t)}x(t) + B_{\alpha(t)}u(t), \\ y(t) = C_{\alpha(t)}x(t), \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统状态向量、输入向量和输出向量, t 为时间, $\alpha(t)$ 为任意切换序列, 其定义为 $\alpha(t): (1, 2, \dots) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$, 即系统参数矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha(t)} & B_{\alpha(t)} & C_{\alpha(t)} \end{bmatrix}$$

在如下有限矩阵集合中任意取值:

$$\{[A_1 \ B_1 \ C_1], \dots, [A_m \ B_m \ C_m]\}.$$

当系统(1)在有限时间区间 $t \in [0, T]$ 上重复运行时, 线性切换系统可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = A_{\alpha(t)}x_k(t) + B_{\alpha(t)}u_k(t), \\ y_k(t) = C_{\alpha(t)}x_k(t), \end{cases} \quad (2)$$

式中 k 为迭代次数. 对系统(2)做如下假设:

假设 1 切换系统运行的初始状态与期望初始状态是相同的, 即对于所有 k 满足 $x_k(0) = x_d(0)$.

假设 2 对于给定的期望跟踪轨迹 $y_d(t)$, 存在期望控制输入 $u_d(t)$ 和期望状态 $x_d(t)$ 满足

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = A_{\alpha(t)}x_d(t) + B_{\alpha(t)}u_d(t), \\ y_d(t) = C_{\alpha(t)}x_d(t). \end{cases} \quad (3)$$

假设 3 系统期望跟踪轨迹 $y_d(t)$ 是迭代无关的, 即对于所有迭代次数 k 满足 $y_k(t) = y_d(t)$.

注 1 上述3个假设对于重复运行的切换系统是满足的. 假设1和假设3是迭代学习控制应用的基本条件, 假设2是系统可控性的条件, 如果该假设不满足, 对于给定的任务系统是不可控的.

考虑如下D型迭代学习控制算法:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma \dot{e}_k(t), \quad (4)$$

式中: $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 为跟踪误差, Γ 为学习增益矩阵. 本文研究学习增益矩阵满足何种条件时, 迭代学习控制算法保证跟踪误差的收敛.

3 主要结果(Main result)

为方便讨论, 不妨假设在有限时间区间 $[0, T]$ 内每个子系统只运行一次, 且系统的切换序列为

$$\alpha(t) = i = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], \\ 2, & t \in [t_1, t_2], \\ \vdots \\ m, & t \in [t_{m-1}, T], \end{cases} \quad (5)$$

此时系统(2)可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = A_i x_k(t) + B_i u_k(t), \\ y_k(t) = C_i x_k(t), \end{cases} \quad (6)$$

式中 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. 系统(6)的状态响应可分为如下 m 个阶段给出:

$$\begin{cases} x_k(t) = e^{A_1(t-t_0)}x_k(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_1(t-\tau)}B_1u(\tau)d\tau, & t \in [0, t_1], \\ x_k(t) = e^{A_2(t-t_1)}x_k(t_1) + \int_{t_1}^t e^{A_2(t-\tau)}B_2u(\tau)d\tau, & t \in [t_1, t_2], \\ \vdots \\ x_k(t) = e^{A_m(t-t_{m-1})}x_k(t_{m-1}) + \int_{t_{m-1}}^t e^{A_m(t-\tau)}B_mu(\tau)d\tau, & t \in [t_{m-1}, T]. \end{cases} \quad (7)$$

记 $t_0 = 0$, $t_m = T$, 则式(7)可表示为

$$x_k(t) = e^{A_i(t-t_i)}x_k(t_i) + \int_{t_i}^t e^{A_i(t-\tau)}B_iu(\tau)d\tau, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq m-1. \quad (8)$$

注 2 由式(7)可知切换系统的动态过程除了跟初始条件和系统矩阵参数有关, 还与切换的顺序和时刻有关. 此外, 对于整个切换系统, 假设1中系统的初始条件仅对第1个子系统成立, 而对其他子系统均不满足, 这两点使得切换系统的迭代学习控制与时变系统的迭代学习控制有着本质的区别.

注 3 式(7)中系统的状态响应为假设切换序列 $\alpha(t)$ 为式(5)的情况下得出的. 不难看出, 当 $\alpha(t)$ 为其他任意切换序列时, 其状态响应方程也可以表示式(7)的形式, 其差别在于相应时间段的系统矩阵参数不同. 因此根据式(5)切换序列研究的结果, 同样适用于任意切换序列的情况.

本文的证明过程中应用到 λ 范数, 向量函数 $h: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的 λ 范数定义为

$$\|h\|_\lambda = \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-\lambda t} \|h(t)\|\}, \quad \lambda > 0.$$

为证明本文的主要结论, 笔者首先给出如下引理:

引理 1 假设 $z_i \subset \mathbb{R}$, $\delta_i \subset \mathbb{R}$ 为两个实数序列, 式中 $i \in \mathbb{Z}^+$. 若对于任意 $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ 满足

$$|z_{i+1}| \leq \theta_i |z_i| + |\delta_i|,$$

式中 $0 < \theta_i \leq \theta < 1$, θ 为常数. 则当 $\lim_{i \rightarrow \infty} |\delta_i| = 0$ 时有 $\lim_{i \rightarrow \infty} |z_i| = 0$.

证 定义序列 $\tilde{\delta} \triangleq \{\tilde{\delta}_0, \dots, \tilde{\delta}_i, \dots\}$, 其中 $\tilde{\delta}_n \triangleq \sup\{|\delta_n|, \dots, |\delta_i|, \dots\}$, 因此有 $\tilde{\delta}_n \geq \tilde{\delta}_{n+1} \geq 0$ 和 $\tilde{\delta}_n \geq |\delta_n|$. 由 $\lim_{i \rightarrow \infty} |\delta_i| = 0$ 可知 $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_i = 0$. 将 $|z_{i+1}| \leq \theta_i |z_i| + |\delta_i|$ 逐项展开可得

$$|z_i| \leq \theta^i |z_0| + \theta^{i-1} \tilde{\delta}_0 + \dots + \theta \tilde{\delta}_{i-2} + \tilde{\delta}_{i-1}. \quad (9)$$

当*i*是偶数, 根据式(9)可得

$$\begin{aligned} |z_i| &\leq \theta^{\frac{i}{2}}(|z_0| + \tilde{\delta}_0 + \dots + \tilde{\delta}_{\frac{i}{2}-1}) + \\ &\tilde{\delta}_{\frac{i}{2}}(\theta^{\frac{i}{2}-1} + \dots + \theta + 1) \leq \\ &\theta^{\frac{i}{2}}(|z_0| + \frac{i}{2}\tilde{\delta}_0) + \tilde{\delta}_{\frac{i}{2}} \frac{1 - \theta^{\frac{i}{2}}}{1 - \theta}, \end{aligned} \quad (10)$$

因此 $\lim_{i \rightarrow \infty} |z_i| = 0$.

同样地, 当*i*是奇数时也可以得到 $\lim_{i \rightarrow \infty} |z_i| = 0$.

证毕.

根据以上引理, 给出本文的主要研究结果.

定理 1 对于满足假设1-3的线性切换系统(6), 采用式(4)的D型迭代学习控制算法, 若学习增益矩阵满足

$$\|I - \Gamma C_i B_i\| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统的输出 $y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于期望轨迹 $y_d(t)$, 即对于所有 t 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) \rightarrow y_d(t)$.

证 由控制算法(4)可得

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1}(t) &= u_d(t) - u_k(t) - \Gamma \dot{e}_k(t) = \\ &\delta u_k(t) - \Gamma \dot{e}_k(t), \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\delta u_k(t) = u_d(t) - u_k(t)$. 根据系统(6)、假设2可知

$$\begin{aligned} \dot{e}_k(t) &= C_i [\dot{x}_d(t) - \dot{x}_k(t)] = \\ &C_i [A_i x_d(t) + B_i u_d(t)] - C [A_i x_k(t) + B_i u_k(t)] = \\ &C_i A_i \delta x_k(t) + C_i B_i \delta u_k(t), \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $\delta x_k(t) = x_d(t) - x_k(t)$.

下面本文逐个讨论时间区间 $[0, t_1]$, $[t_1, t_2], \dots$, $[t_{m-1}, T]$ 上的收敛性.

1) 当 $t \in [0, t_1]$ 时, 切换系统执行第1个子系统.

系统的状态响应方程和期望状态方程为

$$\begin{cases} x_k(t) = e^{A_1(t-t_0)} x_k(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_k(\tau) d\tau, \\ x_d(t) = e^{A_1(t-t_0)} x_d(0) + \int_{t_0}^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_d(\tau) d\tau. \end{cases}$$

考虑初始条件 $x_k(t_0) = x_k(0) = x_d(0)$ 可得

$$\delta x_k(t) = \int_{t_0}^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 \delta u_k(\tau) d\tau. \quad (14)$$

将式(13)和式(14)代入式(12)得

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1}(t) &= \delta u_k(t) - \Gamma \dot{e}_k(t) = \\ &\delta u_k(t) - \Gamma C_1 A_1 \delta x_k(t) - \Gamma C_1 B_1 \delta u_k(t) = \\ &(I - \Gamma C_1 B_1) \delta u_k(t) - \\ &\int_{t_0}^t \Gamma C_1 A_1 e^{A_1(t-\tau)} B_1 \delta u_k(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

上式两边取范数得

$$\|\delta u_{k+1}(t)\| \leq \|I - \Gamma C_1 B_1\| \|\delta u_k(t)\| +$$

$$\int_{t_0}^t \|\Gamma C_1 A_1 e^{A_1(t-\tau)} B_1\| \|\delta u_k(\tau)\| d\tau, \quad (16)$$

两端同乘以 $e^{-\lambda t}$ ($t \in [0, t_1]$) 得

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|\delta u_{k+1}(t)\| &\leq \|I - \Gamma C_1 B_1\| e^{-\lambda t} \|\delta u_k(t)\| + \\ &b_1 \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-\lambda \tau} \|\delta u_k(\tau)\| d\tau, \end{aligned}$$

式中 $b_1 = \sup_{t \in [0, t_1]} \|\Gamma C_1 A_1 e^{A_1 t} B_1\|$. 由 λ 范数的定义可知

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(t)\|_\lambda &\leq \\ \|I - \Gamma C_1 B_1\| + \frac{b_1(1 - e^{-\lambda t_1})}{\lambda} \|\delta u_k(t)\|_\lambda. \end{aligned} \quad (17)$$

当选择足够大的 λ 时, 条件(11)满足

$$\|I - \Gamma C_1 B_1\| + \frac{b_1(1 - e^{-\lambda t_1})}{\lambda} \leq \rho_1 < 1,$$

因此,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta u_{k+1}(t)\|_\lambda = 0. \quad (18)$$

上式意味着, 如果选择D型迭代学习控制算法的增益矩阵满足 $\|I - \Gamma C_1 B_1\| < 1$, 则对于子系统1在整个时间区间 $[0, t_1]$ 上满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = u_d(t)$. 根据假设2的条件, 同样可以得到在区间 $[0, t_1]$ 上满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$.

2) 当 $t \in [t_1, t_2]$ 时, 切换系统执行第2个子系统.

此时系统的状态响应方程和期望状态方程为

$$\begin{cases} x_k(t) = e^{A_2(t-t_1)} x_k(t_1) + \int_{t_1}^t e^{A_2(t-\tau)} B_2 u_k(\tau) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2], \\ x_d(t) = e^{A_2(t-t_1)} x_d(t_1) + \int_{t_1}^t e^{A_2(t-\tau)} B_2 u_d(\tau) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (19)$$

需要说明的是, 式(19)中系统的初始状态并不满足 $x_k(t_1) = x_d(t_1)$, $x_k(t_1)$ 每次迭代过程中都是变化的, 其取值决定于第1个子系统的参数矩阵和切换时间 t_1 .

根据式(19)可得

$$\begin{aligned} \delta x_k(t) &= e^{A_2(t-t_1)} \delta x_k(t_1) + \\ &\int_{t_1}^t e^{A_2(t-\tau)} B_2 \delta u_k(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

将式(13)和式(20)代入式(12), 两边取范数可得

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(t)\| &\leq \\ \|I - \Gamma C_2 B_2\| \|\delta u_k(t)\| + \\ &\int_{t_1}^t \|\Gamma C_2 A_2 e^{A_2(t-\tau)} B_2\| \|\delta u_k(\tau)\| d\tau + \\ &\|e^{A_2(t-t_1)}\| \|\delta x_k(t_1)\|, \end{aligned} \quad (21)$$

两端同乘以 $e^{-\lambda t}$ ($t \in [t_1, t_2]$) 得

$$e^{-\lambda t} \|\delta u_{k+1}(t)\| \leq \|I - \Gamma C_2 B_2\| e^{-\lambda t} \|\delta u_k(t)\| +$$

$$b_2 \int_{t_1}^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-\lambda\tau} \|\delta u_k(\tau)\| d\tau + c_1 e^{-\lambda t} |\delta x_k(t_1)|, \quad (22)$$

式中:

$$b_2 = \sup_{t \in [t_1, t_2]} \|\Gamma C_2 A_2 e^{A_2(t-\tau)} B_2\|, \quad c_1 = \|e^{A_2(t-t_1)}\|.$$

由λ范数的定义可知

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(t)\|_\lambda &\leq \\ &\|I - \Gamma C_2 B_2\| \|\delta u_k(t)\|_\lambda + \\ &\frac{b_2(1 - e^{-\lambda t_2})}{\lambda} \|\delta u_k(t)\|_\lambda + c_1 |\delta x_k(t_1)|. \end{aligned} \quad (23)$$

当选择足够大的λ时, 条件(11)保证下式成立:

$$\|I - \Gamma C_2 B_2\| + \frac{b_2(1 - e^{-\lambda t_2})}{\lambda} \leq \rho_2 < 1,$$

因此, 根据式(23)可得

$$\|\delta u_{k+1}(t)\|_\lambda \leq \rho_2 \|\delta u_k(t)\|_\lambda + c_1 |\delta x_k(t_1)|. \quad (24)$$

由[0, t₁]区间的证明过程可知在整个区间[0, t₁]上满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = u_d(t)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$, 因此也满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x_d(t)$, 所以有 $\lim_{k \rightarrow \infty} |\delta x_k(t_1)| = 0$.

根据引理1, 由 $\lim_{k \rightarrow \infty} |\delta x_k(t_1)| = 0$ 和式(24)可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta u_{k+1}(t)\|_\lambda = 0.$$

上式意味着, 如果选择D型迭代学习控制算法的增益矩阵满足 $\|I - \Gamma C_2 B_2\| < 1$, 则对于子系统2在整个时间区间[t₁, t₂]上满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = u_d(t)$. 根据假设2的条件, 同样可以得到在区间[t₁, t₂]上满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$.

依次类推, 笔者同样可以证明在时间区间[t₂, t₃], ..., [t_{m-1}, T]上跟踪误差也是收敛的, 且收敛到0. 因此, 如果满足条件 $\|I - \Gamma C_i B_i\| < 1, i = 1, 2, \dots, m$, 则在整个时间区间[0, T]上均满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = u_d(t)$ 和 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$. 证毕.

注 4 根据定理1的证明过程可知, 当切换序列α(t)为其他任意切换的序列, 以及每个子系统在有限时间区间[0, T]执行多次的情况下, 定理1同样成立. 因此定理1对于具有任意切换序列的线性切换系统(2)是成立的.

注 5 条件 $\|I - \Gamma C_i B_i\| < 1, i = 1, 2, \dots, m$ 要求学习增益矩阵对于所有的子系统均满足收敛性的条件, 这在有些时候是很难做到的. 为保证学习增益的存在性, 可以选择D型迭代学习控制算法为 $u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_i \dot{e}_k(t)$, 此时定理1中的收敛性条件为 $\|I - \Gamma_i C_i B_i\| < 1, i = 1, 2, \dots, m$.

注 6 本文仅讨论了线性连续切换系统D型迭代学习控制算法的收敛性, 但研究方法同样可以拓展到PID型迭代学习控制算法和高阶迭代学习控制算法中去. 需要指出的是, 本文收敛性分析是在范数意义下给出的, 与其他系

统的迭代学习控制一样, λ范数意义下的单调收敛不能保证系统在∞范数和2范数意义是单调收敛的, 如第4部分的仿真例子. 这样的收敛过程存在一个较大的暂态分量, 可能对实际系统的硬件设备造成危害. 为提高迭代域上的暂态性能, 本文同样可以采用指数衰减学习率^[31]或在学习率中增加高增益反馈环节^[32]的方法.

4 仿真研究(Simulation study)

为验证理论分析的结果, 本节给出一个数值仿真实例. 考虑如下包含两个子系统的线性切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = A_{\alpha(t)} x_k(t) + B_{\alpha(t)} u_k(t), \\ y_k(t) = C_{\alpha(t)} x_k(t), \end{cases} \quad (25)$$

式中: α(t) = 1, 2, 其系统参数矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.3 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \quad 0.5],$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0.5 \quad 1].$$

切换率α(t)为任意的切换序列, 仿真过程中通过一组取值为1和2的随机序列给出, 如图1所示. 当α(t) = 1时系统执行第1个子系统, 当α(t) = 2时系统执行第2个子系统. 假设切换系统在区间t ∈ [0, 1]内重复运行, 其期望输出为y_d(t) = t - t², t ∈ [0, 1]. 对于切换系统(25)考虑D型迭代学习控制算法

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + 0.5 \dot{e}_k(t).$$

验证定理1的条件可得

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma C_1 B_1\| &= 0.5 < 1, \\ \|I - \Gamma C_2 B_2\| &= 0.625 < 1. \end{aligned}$$

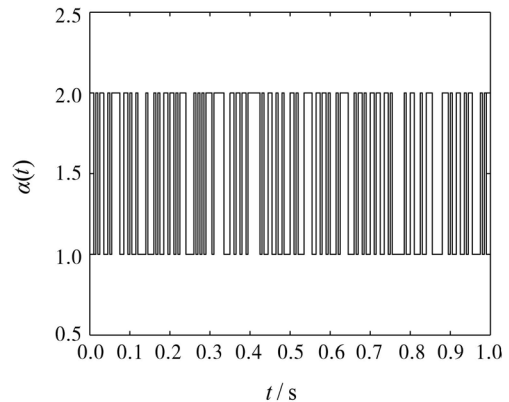


图 1 随机切换序列α(t)

Fig. 1 The random switched sequence of α(t)

利用MATLAB软件进行仿真, 取采样时间为0.005 s, 设置初始条件x_k(0) = x_d(0) = 0, 第1次迭代的控制输入为u₀(t) = 0. 仿真结果如图2-6所示, 图2给出了50次迭代的最大跟踪误差, 可以看出算法可保证跟踪误差收敛到0, 但收敛过程为渐进收敛,

收敛过程中存在着一个较大的暂态误差. 图3-5给出5次迭代、15次迭代以及35次迭代以后的系统输出, 可以更详细地看出算法的收敛过程. 图6给出40次迭代以后的系统控制输入, 此时控制输入与期望控制输入比较接近, 这样的期望控制输入信号通过其他控制方法是很难得到的. 因此, 迭代学习控制方法对于具有任意切换率的线性连续系统, 可以较好地实现有限区间的跟踪控制.

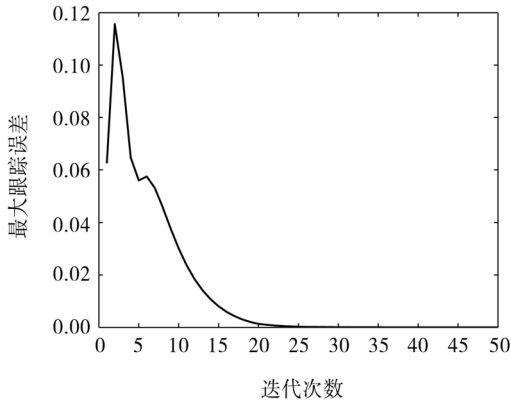


图2 随不同迭代次数的最大跟踪误差

Fig. 2 The max tracking error on the iteration domain

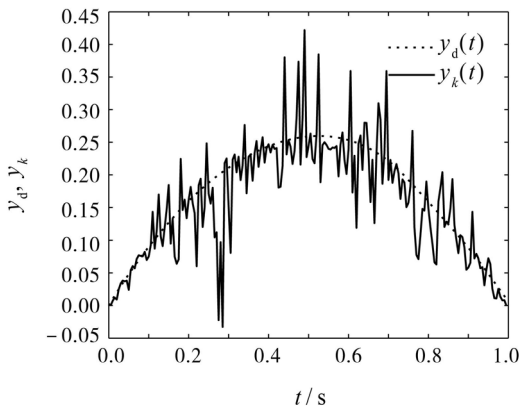


图3 第5次迭代的系统输出

Fig. 3 System output profile in the 5th iteration

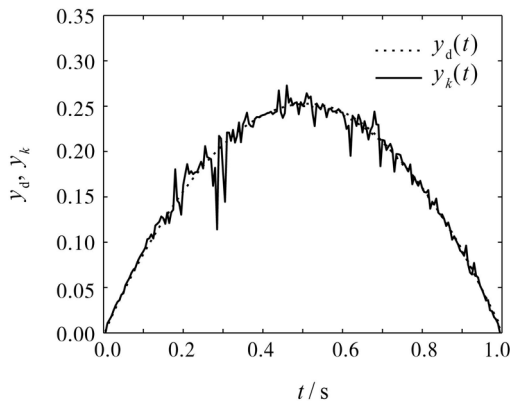


图4 第15次迭代的系统输出

Fig. 4 System output profile in the 15th iteration

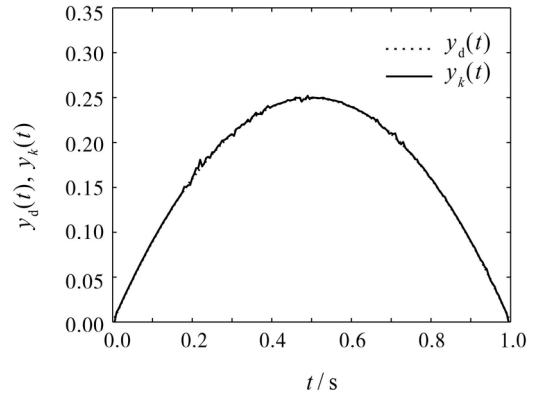


图5 第35次迭代的系统输出

Fig. 5 System output profile in the 35th iteration

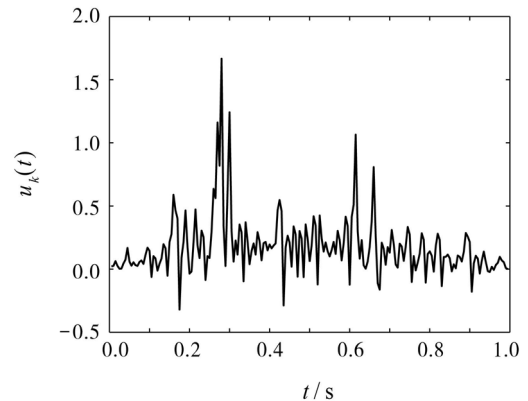


图6 第40次迭代的控制输入

Fig. 6 Control input profile in the 40th iteration

5 结论(Conclusions)

本文研究了一类具有任意切换序列线性连续切换系统的迭代学习控制, 给出了D型迭代学习控制算法收敛的条件, 并在理论上严格证明了收敛性. 数值仿真实例验证了理论结果. 研究表明, 对于时间域任意切换的线性系统, 迭代学习控制方法可以保证有限时间内的完全跟踪控制. 由于任意切换序列只在时间域上发生变化, 在迭代域上是不变的, 从迭代轴上看系统仍然是一个确定性的系统, 因此迭代学习控制可以较好的实现跟踪控制. 在将来的研究中, 笔者将考虑迭代变化初始条件和迭代变化切换序列的情况.

参考文献(References):

- [1] OOBA T, FUNAHASHI Y. On a common quadratic Lyapunov function for widely distant systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 42(12): 1697 – 1699.
- [2] JEON D, TOMIZUKA M. Learning hybrid force and position control of robot manipulators [J]. *IEEE Transactions on Robot Automation*, 1993, 9(4): 423 – 431.
- [3] LENNARTSSON B, TITTUS M, EGARDT B, et al. Hybrid systems in process control [J]. *IEEE Control System Magazine*, 1996, 16(5): 45 – 56.

- [4] BALLUCHI A, DI BENEDETT M D, PINELLO C. Hybrid control in automotive applications: the cut-off control [J]. *Automatica*, 1999, 35(3): 519 – 535.
- [5] BEMPORAD A, TRECATE G F, MORARI M. Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(10): 1864 – 1876.
- [6] CHENG D. Controllability of switched bilinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(4): 511 – 515.
- [7] SUN Z, GE S S, LEE T H. Controllability and reachability criteria for switched linear systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(5): 775 – 786.
- [8] JI Z, FENG G, GUO X. A constructive approach to reachability realization of discrete-time switched linear systems [J]. *System & Control Letters*, 2007, 56(11/12): 669 – 677.
- [9] EGERSTEDT M, BABAALI M. On observability and reachability in a class of discrete-time switched linear systems [C] // *Proceeding of American Control Conference*. Atlanta: IEEE, 2005: 1179 – 1180.
- [10] HESPANHA J P, LIBERZON D, ANGELI D, et al. Nonlinear norm-observability notions and stability of switched systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 52(2): 154 – 168.
- [11] BRANICKY M S. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475 – 482.
- [12] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched system [J]. *IEEE Control System Magazine*, 1999, 19(5): 59 – 70.
- [13] LIBERZON D. *Switching in Systems and Control* [M]. Boston, MA: Birkhauser, 2003.
- [14] CASSANDRAS C G, PEPYNE D L, WARDI Y. Optimal control of a class of hybrid systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(3): 398 – 415.
- [15] SUN Z, GE S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 181 – 195.
- [16] XU X, ANTSAKLIS P J. Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(1): 2 – 16.
- [17] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.
- [18] BRISTOW D A, THARAYIM, ALLEYNE A G. A survey of iterative learning control [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2006, 26(3): 96 – 114.
- [19] AHN H S, CHEN Y, MOORE K L. Iterative learning control: brief survey and categorization [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 2007, 37(6): 1099 – 1121.
- [20] XU J X. A survey on iterative learning control for nonlinear systems [J]. *International Journal of Control*, 2011, 84(7): 1275 – 1294.
- [21] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1995. (SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1995.)
- [22] 谢胜利, 田森平, 谢振东. 迭代学习控制的理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2005 (XIE Shengli, TIAN Senping, XIE Zhengdong. *Iterative Learning Control Theory and Application* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1995.)
- [23] SUN M X, WANG D W. Initial shift issues on discrete-time iterative learning control with system relative degree [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(1): 144 – 148.
- [24] RUAN X E, BIEN Z Z, PARK K H. Decentralized iterative learning control to large-scale industrial processes for nonrepetitive trajectory tracking [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A*, 2008, 38(1): 238 – 252.
- [25] CHI R H, HOU Z S, XU J X. Adaptive ILC for a class of discrete-time systems with iteration-varying trajectory and random initial condition [J]. *Automatica*, 2008, 44(8): 2007 – 2213.
- [26] 李俊民, 孙云平, 刘赞. 非一致目标跟踪的自适应迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(1): 100 – 104. (LI Junmin, SUN Yunping, LIU Zan. Hybrid adaptive iterative learning control of non-uniform trajectory tracking [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(1): 100 – 104.)
- [27] 刘山, 吴铁军. 基于小波逼近的非线性鲁棒迭代学习控制 [J]. 自动化学报, 2004, 30(2): 270 – 276. (LIU Shan, WU Tiejun. Robust iterative learning control using wavelet approximation for nonlinear plants [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(2): 270 – 276.)
- [28] LI X D, CHOW T W S, HO J K L. 2-D system theory based iterative learning control for linear continuous systems with time delays [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2005, 52(7): 1421 – 1430.
- [29] HOU Z S, XU J X, YAN J W. An iterative learning approach for density control of freeway traffic flow via ramp metering [J]. *Transportation Research, Part C*, 2008, 16(1): 71 – 97.
- [30] GAO F R, YANG Y, SHAO C. Robust iterative learning control with applications to injection molding process [J]. *Chemical Engineering Science*, 2002, 56(24): 7025 – 7034.
- [31] MOORE K L, CHEN Y, BEHL V. Monotonically convergent iterative learning control for linear discrete-time systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(6): 1529 – 1537.
- [32] LUCIBELLO P. On the role of high gain feedback in P-type learning control of robots [C] // *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*. San Antonio, TX, USA: IEEE, 1993: 2149 – 2152.

作者简介:

卜旭辉 (1981–), 男, 副教授, 博士, 研究方向为迭代学习控制、无模型自适应控制、网络控制等, E-mail: buxuhui@gmail.com;

侯忠生 (1962–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为数据驱动控制、智能交通系统、智能信息处理等, E-mail: zhshhou@bjtu.edu.cn;

余发山 (1952–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为电力电子传动、工业过程控制等, E-mail: yufs@hpu.edu.cn.