

非最小相位系统的扩展Laguerre基函数迭代学习控制

刘山, 刘杰

(浙江大学工业控制技术国家重点实验室, 浙江杭州 310027)

摘要: 针对非最小相位系统的跟踪问题, 提出了一种新的基函数迭代学习控制算法. 该算法利用新型的非因果Laguerre扩展基函数逼近系统逆传递函数, 设计最优迭代学习律使系统输入收敛到系统的稳定逆, 保证了控制性能. 算法不依赖于系统的先验模型, 仅需以基函数信号作为系统输入进行模型辨识, 减少了模型不确定性的影响. 通过对单连杆柔性机械臂这样的典型非最小相位系统跟踪问题的仿真, 验证了该方法的良好效果.

关键词: 迭代学习控制; 非最小相位系统; 稳定逆; 扩展Laguerre基函数

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Extended Laguerre basis function based iterative learning control for non-minimum phase systems

LIU Shan, LIU Jie

(State Key Laboratory of Industrial Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: A new iterative learning control (ILC) method based on extended Laguerre basis function is proposed for the non-minimum phase system. The stable inversion which is an optimal and ideal solution for the non-minimum phase system tracking problem is achieved by iteration using this method. An optimal ILC law is designed in the basis function space to ensure the control performance. A priori model is not required in this method because a simple version of system model can be identified in the basis function space. Compared with other model based ILC methods, this method alleviates the influence of the model uncertainty. The effectiveness of the method is verified through a simulation on a single-link flexible manipulator model, which is a typical non-minimum phase system.

Key words: iterative learning control; non-minimum phase system; stable inversion; extended Laguerre basis function

1 引言(Introduction)

针对重复运行的系统, 迭代学习控制将前几次有限运行时段内的系统信息合成为控制输入, 实现对目标轨迹的精确跟踪. 对于满足一定条件的系统, 经典PID型迭代学习律只需极少的模型信息, 即可获得系统对于给定跟踪轨迹的逆^[1]. 然而对于非最小相位系统, 由于右半平面零点的存在, 系统的逆是不稳定的, PID型迭代学习律的误差下降速度慢, 最终收敛误差较大, 甚至发散, 无法满足控制要求.

针对非最小相位系统的跟踪问题, Devasia等^[2]从非线性系统的内动态出发, 提出稳定逆理论. 该理论根据非最小相位系统内动态不稳定的特点, 将内动态分解为稳定和 unstable 两部分, 把在 $[0, +\infty]$ 上的内动态求解的初值问题放松为 $[-\infty, +\infty]$ 上的两点边值问题, 得到了稳定但非因果的系统逆. Zhao等^[3]证明稳定逆为非最小相位系统跟踪问题的唯一能量有界的解, 是理想的控制输入, 可解决非最小相位系统

的迭代学习控制问题, 在迭代中得到稳定逆. Ghosh等^[4-5]将系统模型的伪逆作为学习律, 采用迭代学习的方式求解稳定逆. Sogo等^[6]通过伴随系统进行系统误差的动态反馈, 在扩展的作用域上得到了系统的稳定逆. 刘山等^[7]从最优控制中的Hamilton函数出发, 通过非因果的方式求解稳定逆, 并与二次型最优迭代学习控制相结合, 得到了开闭环的非最小相位系统的迭代学习控制. 这类非最小相位系统的迭代学习控制方法虽然在理论上解决了学习控制律收敛的问题, 但都需要系统的精确模型, 受模型不确定性影响较大, 不适合实际应用. 另一类针对非最小相位系统的迭代学习控制算法更关注如何补偿非最小相位系统相位滞后. Jeong等^[8]针对离散系统, 提出了预先与期望轨迹进行卷积的学习律, 只需要知道系统相对阶和传递函数分母多项式的阶就可保证收敛, 但Cai等^[9]指出, 该学习律存在起始阶段的瞬态响应不理想的特点. Ye等^[10]提出了分数阶的学习律

设计,通过对上次迭代误差非因果的求解分数阶作用,得到提前 $\pi/2$,但不影响系统增益的控制律.此类方法虽不需要精确的系统模型,但并不能保证能够完全补偿非最小相位系统的所有的相位滞后,所能实现的控制效果有限.

鉴于模型信息在迭代学习律中的作用,Phan等^[11]提出了基函数型迭代学习控制.该方法选取一组时域内正交的基函数,将高维离散的输入输出信号映射到低维的基函数空间内.在运行之前,先以基函数作为输入进行实验,可辨识出在基函数空间内的输入输出静态模型,从而可以针对降维的模型进行迭代学习控制律的设计.运用类似的思想,Ye等^[12]提出了基于离散余弦变换(discrete cosine transform, DCT)的基函数迭代学习控制的设计方法.Hamamoto等^[13]和Sugie等^[14]将该方法应用到连续系统,提出了分解系统的逆.基函数迭代学习控制能以较小的成本得到适合迭代学习律设计的模型,并且不需要系统的模型和误差的导数,从而可以大大降低系统不确定性的影响.对于非最小相位系统,采用频域方法设计的基函数迭代学习律未考虑系统逆中的不稳定部分,故在实际运用中,存在最终的跟踪误差.

本文在频域中应用新型的扩展Laguerre函数逼近系统稳定逆.首先采用非因果型和因果型两类基函数分别逼近逆系统传递函数的正则部分与非正则部分,然后将期望轨迹与所得到的Laguerre函数进行卷积,得到有限维的基函数空间,并导出正交的基函数,在此基础上,通过迭代学习得到理想的系统稳定逆.进一步给出了基函数空间内的最优型迭代学习控制律,并拓展了参考轨迹以便算法能够在实际中应用.最后通过与传统方法在一般非最小相位系统以及单柔性机械臂模型上的仿真对比,验证了本文方法的有效性.

2 迭代学习控制问题描述(Iterative learning control problem statement)

考虑稳定的单入单出非最小相位线性系统

$$y(s) = G(s)u(s) + d(s). \quad (1)$$

其中: $G(s) = \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$ 为严格正则的传递函数, $u(s)$, $y(s)$ 和 $d(s)$ 分别为系统输入、输出和干扰, $n, m \in \mathbb{N}$ 且 $n > m$. 系统至少有一个零点位于复平面的右半平面.

本文中迭代学习控制的目标为: 给定参考轨迹 $y_d \in L_\infty[0, T] \cap C^r[0, T]$, r 为系统的相对阶, 系统每次运行的初始条件相同, 误差信号为

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t),$$

设计迭代学习控制律

$$u_{k+1} = u_k + K[e_k(t)],$$

使得 $k \rightarrow \infty$ 时, $|e_k(t)| \rightarrow 0$, 其中 K 为算子.

非最小相位系统 $G(s)$ 形式上的逆可表示为

$$G^{-1}(s) = D(s) + R(s), \quad (2)$$

其中 $D(s)$ 和 $R(s)$ 分别表示系统逆 $G^{-1}(s)$ 的非正则和正则部分, $D(s)$ 为有理多项式:

$$D(s) = a_r s^r + a_{r-1} s^{r-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (3)$$

阶数为 $G(s)$ 的相对阶 r . 系统正则部分 $R(s)$ 可分解为如下形式:

$$R(s) = R_S(s) + R_N(s), \quad (4)$$

其中: $R_S(s)$ 的所有极点都在复平面右半平面, $R_N(s)$ 的所有极点都在左半平面, 分别表示系统逆正则部分的稳定和不稳定部分.

迭代学习控制的实质是寻找能最终收敛到系统逆 $U_d(s) = G^{-1}(s)Y_d(s)$ 的学习律, 但对于非最小相位系统, 由于 $R_N(s)$ 不稳定, 故 $U_d(s)$ 不是有界稳定的. 传统迭代学习律正是由于这个原因无法应用于非最小相位系统的跟踪问题.

针对严格正则的非最小相位系统, 可采用稳定逆(stable inversion)结合基函数型迭代学习控制的思想解决系统逆的不稳定问题.

3 稳定逆和基函数迭代学习控制(Stable inversion and iterative learning control based basis function)

3.1 稳定逆(Stable inversion)

针对非最小相位系统的跟踪问题, Devasia等^[2]提出的稳定逆在线性系统中表述如下:

定义 1 考虑稳定的非最小相位线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx. \quad (5)$$

若给定的期望轨迹满足

$$y_d^{(i)} \in L_1 \cap L_\infty, i = 0, 1, \dots, n - m,$$

且系统传递函数 $G(s)$ 在虚轴上没有零点, 则存在有界的 $x_d(t)$ 和 $u_d(t)$, 满足

$$\dot{x}_d = Ax_d + Bu_d, y_d = Cx_d. \quad (6)$$

且当 $t \rightarrow \pm\infty$, 有 $u_d(t) \rightarrow 0$, $x_d(t) \rightarrow 0$. 称 $u_d(t)$ 和 $x_d(t)$ 为系统的稳定逆.

稳定逆实际上是将系统的求解由 $t > 0$ 扩展为 $-\infty < t < +\infty$, 将内动态不稳定的部分在 $(-\infty, 0]$ 区间内反向积分, 得到稳定有界的理想输入 $u_d \in (-\infty, +\infty)$.

系统稳定逆的计算需要精确的系统模型, 模型不确定性的影响对跟踪效果有着直接的影响. 迭代学习控制要求系统重复运行, 因此可利用系统的输入

输出信息解决稳定逆的模型依赖问题. 文献[4-7]均介绍了基于稳定逆的迭代学习控制方法, 并实现了系统的精确跟踪, 但是以上方法仍然依赖于系统的精确模型. 当系统的模型不精确已知时, 上述方法难以用于实际的非最小相位系统跟踪中.

本文采用基函数迭代学习控制方法解决非最小相位系统的跟踪问题, 仅通过简单的试运行方法, 将迭代学习控制转换在有限的输入输出空间中进行, 可不依赖精确的系统模型.

3.2 基函数迭代学习控制(Iterative learning control based basis function)

系统(1)的输入和输出信号属于如下由一组正交基函数张成的空间^[4]:

$$\text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_b\}, b \in \mathbb{N},$$

其中: $\phi_i(t) \in L_\infty[0, T]$, 基函数之间满足 $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \Delta_{ij}$, Δ_{ij} 为 Kronecker 积, 内积定义为

$$\langle u, v \rangle = \int_{t_0}^{t_f} u(t)v(t)dt.$$

不失一般性, 将输入输出用一组有限维的基函数 $\varphi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_b]^T$ 表示:

$$u(t) = \varphi^T \alpha, y(t) = \varphi^T \beta, \quad (7)$$

其中: $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_b]^T, \beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_b]^T$ 为输入输出在基函数空间中的参数表达. 且满足 $\alpha_i = \langle \phi_i(t), u(t) \rangle, \beta_i = \langle \phi_i(t), y(t) \rangle$. 不考虑干扰的影响, 基函数空间系统的输入输出模型可在基函数空间表示成 $\beta = H\alpha, H$ 为 $b \times b$ 矩阵, 其元素 h_{ij} 满足

$$h_{ij} = \langle \phi_i, g(t) * \phi_j \rangle, \quad (8)$$

$g(t)$ 为系统的脉冲响应. 式(8)给出了基函数空间模型的获取方法, 即在实际的迭代学习之前, 先将每一个基函数作为系统的输入, 运行得到输出后, 再与基函数作内积, 从而辨识出系统在基空间中的输入输出模型 H . 由于所得到是有限空间内的简单模型, 避免了传统的机理建模所需的大量的先验知识或是基于数据的控制方法所需要的大量的数据试验.

第 k 次迭代时, 将上次运行的输出误差信号转化为基函数空间表达

$$e_k(t) = \varphi^T \varepsilon_k, \quad (9)$$

其中: $\varepsilon_k = [\varepsilon_{1k} \ \varepsilon_{2k} \ \dots \ \varepsilon_{bk}]^T, \varepsilon_{ik} = \langle \phi_i(t), e_k(t) \rangle$. 本文在基函数空间内进行迭代学习, 对输入 α_k 在每一次运行后, 按式(10)调整:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + L_b \varepsilon_k, \quad (10)$$

其中 L_b 为基函数空间内的迭代学习律. 使用 H 的模型信息, 可得到系统运行的误差传递方程

$$\varepsilon_{k+1} = (I - HL_b)\varepsilon_k.$$

因此, 该学习律收敛的充要条件为

$$|\lambda_i(I - HL_b)| < 1, \forall i, \quad (11)$$

其中 λ_i 为矩阵 $I - HL_b$ 的第 i 个特征值.

基函数迭代学习控制是将传统迭代学习控制的输入信号 $u_d(t)$ 的收敛问题转换为基函数空间内的输入 α^* 的收敛问题. 由基函数的选取, 以及基函数的个数可决定系统总体的收敛误差. 最为理想的情况是基函数的选取涵盖整个理想输入的空间, 此时基函数空间内的收敛性能够保证系统的输出精确跟踪理想的参考轨迹.

对于系统的非正则部分, 由于

$$D(s)Y_d(s) = (a_r s^r + a_{r-1} s^{r-1} + \dots + a_1 s + a_0)Y_d(s),$$

实际上是参考轨迹及其在相对阶以内的各阶导数的线性组合, Hamamoto等^[13]提出使用参考轨迹及其各阶导数作为基函数, 形成 $\text{span}\{y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(r)}\}$, 用以涵盖系统的非正则部分. 对于最小相位系统的正则部分, 式(2)中的 $R(s) = R_S(s)$. Hamamoto等^[13]使用了满足以下形式的Laguerre基函数在频域中对这部分进行逼近:

$$L_i(s) = \left(\frac{\sqrt{2p}}{s+p}\right)\left(\frac{s-p}{s+p}\right)^{i-1},$$

其中: $p > 0, i \in \mathbb{Z}^+$. Laguerre函数可用于 $H_2(\text{Re}(s) > 0)$ 空间中的逼近问题^[15].

引理 1 若信号 $H(s) \in L_2(\mathbb{R}_+) \cap L_1(\mathbb{R}_+)$ 的系数 $\alpha_i = \langle L_i(s), H(s) \rangle$ 满足 $\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i < \infty$, 则式(12)成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|H(s) - \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(s)\|_\infty = 0. \quad (12)$$

上述引理表明, 在频域上可用Laguerre函数在 H_∞ 范数意义上逼近信号, 系统逆的正则稳定的部分 $R_S(s)$ 可用Laguerre函数逼近:

$$R_S(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(s),$$

再将参考轨迹进行滤波

$$R_S(s)Y_d(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(s)Y_d(s).$$

上式为 $L_i(s)Y_d(s)$ 的线性组合, 故基函数空间可设计成 $\text{span}\{L_1(s)y_d, \dots, L_n(s)y_d\}$. 这两部分基函数空间的直和即为理想输入的空间

$$\text{span}\{y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(r)}\} \oplus \text{span}\{L_1(s)y_d, \dots, L_n(s)y_d\}.$$

对于非最小相位系统, 由于Laguerre函数不能逼近不稳定的 $R_N(s)$, 上述空间无法完全涵盖理想输入. 文献[13]中的方法不能实现对系统理想输入的精确逼近. 因此, 针对非最小相位系统, 必须改进基函数空间. 本文基于稳定逆求非最小相位系统逆传

递函数的稳定解,提出了扩展Laguerre基函数,用以逼近系统的稳定逆,从而可以使用基函数的迭代学习控制来实现非最小相位系统的精确跟踪.

4 扩展Laguerre基函数迭代学习控制

(Extended Laguerre basis function based iterative learning control)

4.1 扩展Laguerre函数(Extended Laguerre basis function)

要得到非最小相位系统的稳定逆,需要将初值问题扩展为求 $(-\infty, +\infty)$ 上的边值问题.文献[16]利用双边Laplace逆变换,给出了线性时不变系统的稳定逆的频域表达:

$$\mathcal{L}^{-1}(R(s)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} e^{st} R(s) ds = \begin{cases} \sum_{\text{Re}(p_n) > \alpha} \text{Res}(e^{st} R(s), p_n), & t \geq 0, \\ \sum_{\text{Re}(p_m) < \alpha} -\text{Res}(e^{st} R(s), p_m), & t < 0, \end{cases} \quad (13)$$

其中: Res为留数运算, $\{p_n\}$ 和 $\{p_m\}$ 分别为传递函数稳定和不稳定的极点集合, $s = \alpha$ 是 $G(s)$ 收敛域的分界线,在系统传递函数为有理函数时, $\alpha = 0$. 为保证双边Laplace逆变换的计算稳定性,对于不稳定的 $R_N(s)$,可令 $s' = -s$,得到稳定的 $R_N(-s')$,然后再进行逆变换的积分运算

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[R_N(s)] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{-s't} R_N(-s') d(-s') = \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \int_{+j\infty}^{-j\infty} e^{-s't} R_N(-s') ds' = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{s'(-t)} R(-s') ds', \end{aligned}$$

即

$$\mathcal{L}^{-1}[R_N(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_N(-s')](-t). \quad (14)$$

因此,依照稳定逆的概念,系统的正则不稳定部分 $R_N(s)$ 的逆变换可以先求 $R_N(-s')$ 的Laplace逆变换,再进行时域上的反转,从而得到稳定有界的解.虽然Laguerre函数无法逼近不稳定的 $R_N(s)$,但是该函数可先逼近 $R_N(-s)$,然后再经过同样的双边Laplace逆变换与时域反转.这就是本文提出扩展Laguerre函数所采用的基本思想.

定义 2 称以下函数序列 $\{L_i^-(s)\}_{i=1, \dots, n_-}$ 和 $\{L_i^+(s)\}_{i=1, \dots, n_+}$ 为扩展Laguerre基函数:

$$\begin{aligned} L_i^-(s) &= \frac{\sqrt{2p}}{s-p} \left(\frac{s+p}{s-p}\right)^{i-1}, \\ L_i^+(s) &= \frac{\sqrt{2p}}{s+p} \left(\frac{s-p}{s+p}\right)^{i-1}, \end{aligned}$$

其中: $p \in \mathbb{R}^+$, $L_i^+(s)$ 为传统的定义在 $\text{Re}(s) > 0$ 上的Laguerre基函数, $L_i^-(s)$ 定义在 $\text{Re}(s) < 0$.

尽管 $L_i^-(s)$ 在 $\text{Re}(s) > 0$ 上不稳定,无法构成稳定的正交函数系,但是该组函数可用于在双边拉氏逆变换意义上实现对系统不稳定部分的逼近.

定理 1 对于正则传递函数 $R_N(s)$,若其所有极点均在右半平面,则存在实数序列 $\{\alpha_i | \alpha_i \in \mathbb{R}\}$,满足

$$\mathcal{L}^{-1}[R_N(s)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{L}^{-1}[L_i^-(s)]. \quad (15)$$

证 考虑传递函数 $R_N(-s) \in H_2(\text{Re}(s) > 0) \cap H_1(\text{Re}(s) > 0)$,根据引理1有

$$R_N(-s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i^+(s),$$

对上式进行双边Laplace逆变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[R_N(-s)] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{st} R_N(-s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{st} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i^+(s)\right) ds = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{st} L_i^+(s) ds. \end{aligned}$$

根据式(14)可知性质 $L_i^-(s) = -L_i^+(-s)$,由上式可知 $R_N(s)$ 的双边Laplace逆变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[R_N(s)] &= \mathcal{L}^{-1}[R_N(s)(-s')](-t) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{s'(-t)} \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i^+(s') ds' = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{st} \sum_{i=1}^n \alpha_i (-L_i^+(-s)) ds = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i^-(s)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{L}^{-1}[L_i^-(s)]. \end{aligned}$$

证毕.

利用该定理,可实现在双边Laplace逆变换意义下用扩展Laguerre基函数中的 $L_i^-(s)$ 逼近系统逆中不稳定的部分 $R_N(s)$.系统逆在频域中的表达为

$$U_d(s) = D(s)Y_d(s) + (R_N(s) + R_S(s))Y_d(s).$$

对应正则稳定部分可由 $R_S(s)$ 通过单边Laplace逆变换,再与参考轨迹进行卷积运算得到;对于不稳定的部分,则可如下求解:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[R_N(s)Y_d(s)] &= \\ \mathcal{L}^{-1}[R_N(-s')Y_d(-s')](-t). \end{aligned} \quad (16)$$

即不稳定部分针对期望轨迹的逆可通过将期望轨迹按时域反转,经过稳定的 $R_N(-s')$ 滤波后,再将卷积的结果按时域反转得到.上式的定义范围在 $(-\infty, +\infty)$,是双边Laplace逆变换结果,实质上是稳定逆.

在频域中用扩展Laguerre基函数逼近 $R_S(s)$ 和 $R_N(s)$,

$$\begin{aligned} (R_S(s) + R_N(s))Y_d(s) &\approx \\ \sum_{i=1}^{n_1} L_i^-(s)Y_d(s) + \sum_{i=1}^{n_2} L_i^+(s)Y_d(s). \end{aligned}$$

将频域基函数与参考轨迹的卷积作为基函数

$$\{b_i^-(t) | b_i^-(t) = \mathcal{L}^{-1}[L_i^-(s)Y_d(s)]\}_{i=1, \dots, n_1},$$

$$\{b_i^+(t)|b_i^+(t) = \mathcal{L}^{-1}[L_i^+(s)Y_d(s)]\}_{i=1,\dots,n_2},$$

因此, 系统正则的部分位于以下空间:

$$\text{span}\{b_1^-, b_2^-, \dots, b_{n_1}^-\} \oplus \text{span}\{b_1^+, b_2^+, \dots, b_{n_2}^+\}.$$

对于系统的非正则部分, 可按文献[13]的方法选择 $y_d(t)$ 及其 1 到 r 阶导数为基函数. 综合得到

$$\text{span}\{y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(r)}\} \oplus \text{span}\{b_1^-, \dots, b_{n_1}^-\} \oplus \text{span}\{b_1^+, \dots, b_{n_2}^+\}, \quad (17)$$

其中 3 部分空间别对应着稳定逆中的非正则部分、正则不稳定部分、正则稳定部分, 从而实现对整个稳定逆所在空间的覆盖.

当系统与给定的参考轨迹满足定义 1 的条件时, 总可以找到一组参数 $\{\alpha_i^- | \alpha_i^- \in \mathbb{R}\}_{i=1,\dots,n_1}$, $\{\alpha_i^+ | \alpha_i^+ \in \mathbb{R}\}_{i=1,\dots,n_2}$, $\{d_i\}_{i=0,1,\dots,r}$ 满足

$$u_d(t) = \sum_{i=0}^r d_i \bar{y}_d^{(i)} + \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^- \bar{b}_i^- + \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i^+ \bar{b}_i^+ \right), \quad (18)$$

其中 $\{\bar{y}_d^{(i)}\}$ 与 $\{\bar{b}_i^-\}$, $\{\bar{b}_i^+\}$ 是由空间(17)导出的正交函数系, 其定义域处于 $(-\infty, +\infty)$.

4.2 最优迭代学习律的设计(Optimal iterative learning control law design)

在系统模型未知的情况下, 使用扩展Laguerre基函数设计的迭代学习控制律可以保证收敛到系统的稳定逆.

在基函数空间内的, 迭代学习律的设计可以参考的重要信息是模型阵 H , 由收敛条件(11), 一种直观的设计是令学习律阵 $L_b = H^{-1}$, 但是 H 并不能保证是非奇异的. 本文采用模型最优迭代学习律的设计方法避免这一问题. 在基函数空间内, 考虑以下最优指标:

$$J_{k+1}(\alpha_{k+1}) = \|\varepsilon_{k+1}\|_{Q_w}^2 + \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_{R_w}^2 = \varepsilon_{k+1}^T Q_w \varepsilon_{k+1} + (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^T R_w (\alpha_{k+1} - \alpha_k). \quad (19)$$

注意到 $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - H(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$, 可以得到最优迭代学习律

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + [R_w + H^T Q_w H]^{-1} H^T Q_w \varepsilon_k. \quad (20)$$

在保证满足收敛条件(11)的同时, 可以调整矩阵 R_w , Q_w , 达到学习律的性能要求. 恰当选取的 R_w , Q_w 可在收敛速度和跟踪精度等指标上具有非常好的效果.

4.3 扩展Laguerre基函数个数的选取(Selection of the number of extended Laguerre basis functions)

在基函数的迭代学习控制中, 基函数个数的选取在保证输出跟踪精度方面具有重要的作用. 本文提

出的扩展Laguerre基函数控制应用 3 种基函数逼近稳定逆的非正则部分、正则稳定部分、正则不稳定部分. 其中非正则部分的输入空间, 是由参考轨迹及各阶导数项所张成, 在知道系统的相对阶的前提下, 取系统的参考轨迹与前 r 阶导数, 共 $r + 1$ 个基函数即可完备涵盖这部分空间. 对于系统正则稳定部分, 需要用Laguerre基函数在频域内逼近式(4)中的 $R_S(s)$. 文献[17-18]中给出了估计跟踪精度和基函数个数与参数选择的方法.

引理 2 若频域传递函数 $G(s) \in H_2$, 则存在 $N_\varepsilon > 0$, 满足

$$|G(s) - \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \alpha_i L_i(s)| < \varepsilon. \quad (21)$$

引理 3 若引理 2 成立, $R_S(s)$ 在虚轴上连续, 且可以找到 $\theta > 0$, 满足 $\alpha_i < \theta^i$, 则逼近误差满足

$$E(\omega) = \left| \sum_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} \alpha_i L_i \right| \leq M(\omega) \sum_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} \alpha_i \leq M(\omega) \sum_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} \theta^i = M(\omega) \frac{\theta^{N_\varepsilon}}{1 - \theta}, \quad (22)$$

其中 $M(\omega) = |L_i(j\omega)| \leq \sqrt{2/p}$, $i = 0, 1, \dots$.

对正则稳定的部分, 可利用引理 3, 根据 $M(\omega)$, θ 以及所期望的误差, 推出基函数的个数 N_ε .

对于正则不稳定部分, 可将期望轨迹 $y_d(t)$ 延拓到 $(-\infty, +\infty)$, 并按时域反转, 然后将 $y_d(-t)$ 通过稳定的 $R_N(-s)$ 滤波. 由于 $R_N(-s) \in H_2$, 满足引理 2, 因此, 也可应用引理 3 来根据所需要的逼近精度来确定所需要的基函数的个数.

4.4 控制的实际运行方式(Practical control mode)

非最小相位系统的扩展Laguerre基函数迭代学习控制的输入要求定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 实际上这是不能实现的. 注意到系统稳定逆在正负无穷两个方向上都趋近于 0, 一般的系统, 如果其极点不是非常靠近虚轴, 都可以在超出参考轨迹作用范围以外不远的地方收敛到很小的值. 因此, 为使控制能够实际运行, 将给定的参考轨迹在上作适当的延拓^[7]: 设迭代学习的控制输入 $u_d(t) \in [t_0, t_f]$, 其中 $t_0 < 0$, $t_f > T$, 将参考轨迹 $y_d \in [0, T]$ 延拓到 $t \in [t_0, 0]$ 与 $t \in [T, t_f]$ 上, 并满足下式:

$$y_r(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\infty, t_0], \\ r_1(t), & t \in [t_0, 0], \\ y_d(t), & t \in [0, T], \\ r_2(t), & t \in [T, t_f], \\ 0, & t \in [t_f, +\infty], \end{cases} \quad (23)$$

其中若 $y_d(t_0)$ 或 $y_d(t_f)$ 不为零, 则 $r_1(t)$ 或 $r_2(t)$ 设计成平滑过渡到 0 的形式. 这样对 $y_r(t)$ 的卷积运算得到的结果就可与稳定逆所在的区间一致.

在基函数的迭代学习控制时,需要在前期进行以基函数为输入的的辨识试验,实验次数与基函数维数相同.如果基函数数量较多,则需要付出较多的实际运行代价.而使用扩展Laguerre基函数,只需要进行很少次的辨识实验.

对于稳定部分的基函数,注意到Laguerre基函数的特殊形式

$$G(s)L_i(s)Y_d(s) = G(s)L_1(s)\left(\frac{s-p}{s+p}\right)^{i-1}Y_d(s) = \left(\frac{s-p}{s+p}\right)^{i-1}G(s)L_1(s)Y_d(s).$$

所以可将 $b_1^+ = L_1^+(s)Y_d(s)$ 输入系统,进行一次辨识实验,所得到的输出 $G(s)L_1(s)Y_d(s)$,再通过计算该输出通过滤波器 $\left(\frac{s-p}{s+p}\right)^{i-1}$ 的结果,得到第*i*组Laguerre基函数的实验数据.

同样,对于不稳定部分的基函数,可以将基函数 $b_1^- = L_1^-(s)Y_d(s)$ 输入系统,得到输出 y_1^- ;再将 y_1^- 经过 $\left(\frac{s-p}{s+p}\right)^{i-1}$ 滤波,得到 \tilde{y}_i^- ;然后将 \tilde{y}_i^- 按时域反转,得到第*i*次辨识实验的输出.

因此,采用扩展Laguerre基函数进行迭代学习控制,对于稳定和不稳定的基函数,分别只需做一次试验,就可以得到所有需要的辨识试验数据.与其他类型的基函数迭代学习控制相比,可以大大减少辨识实验的次数,降低运行成本.

算法实际运行时,若采样时间间隔为 T_S ,总采样数为 N ,则第*k*次迭代运行的输入 u_k 可离散化得到向量 \mathbf{u}_k :

$$\mathbf{u}_k \triangleq (u_k(0), u_k(T_S), \dots, u_k(NT_S))^T \in \mathbb{R}^{N+1},$$

通过同样的方式,可将迭代过程中的各变量 $y_k, y_d^{(i)}, b_i^+, b_i^-$ 和 e_k 分别离散化为相应的向量 $\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_d^{(i)}, \mathbf{b}_i^+, \mathbf{b}_i^-$ 和 \mathbf{e}_k

本文提出的非最小相位系统的扩展Laguerre基函数迭代学习控制算法总结如下:

- 1) 将参考轨迹进行延拓,计算出 $\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d, \dots, \mathbf{y}_d^{(r)}$;
- 2) 通过运行试验,得到 $\mathbf{b}_1^-, \mathbf{b}_1^+$;
- 3) 经过滤波得到整组基函数,并组成矩阵

$$\mathbf{B} = [\mathbf{y}_d \ \dot{\mathbf{y}}_d \ \dots \ \mathbf{y}_d^{(r)} \ \mathbf{b}_1^+ \ \dots \ \mathbf{b}_{n_1}^+ \ \mathbf{b}_1^- \ \dots \ \mathbf{b}_{n_2}^-].$$

将 \mathbf{B} 进行QR分解^[14]

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{R},$$

这里, \mathbf{Q} 为正交阵,可作为时域到基函数域的转换矩阵.令*k*为迭代的次数

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{Q}^T \mathbf{e}_k, \quad \boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}_k, \quad \boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{Q}^T \mathbf{y}_k,$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\alpha}_k$ 和 $\boldsymbol{\beta}_k$ 分别为系统的运行误差 e_k 、输入 \mathbf{u}_k

和输出 \mathbf{y}_k 在基空间上的表达;

- 4) 根据式(8),系统在有限的输入输出空间的模型为

$$\mathbf{G} = g(t) * \mathbf{B}, \tag{24}$$

使用转换矩阵 \mathbf{Q} ,可以得到基函数域中的输入输出模型阵

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}^T \mathbf{G};$$

- 5) 每次运行后,将误差 e_k 转换到基函数域,按照式(9)和式(10)进行迭代学习,直到误差 e_k 收敛到满意的范围为止.

整个迭代运行过程可简要用图1表示.

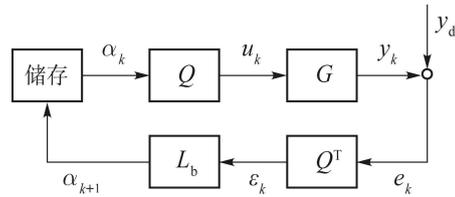


图1 Laguerre基函数迭代学习控制

Fig. 1 Laguerre basis function based iterative learning control

5 仿真研究(Simulation)

例1 考虑以下非最小相位系统的轨迹跟踪:

$$G(s) = \frac{(s+3)(s-2)}{(s+0.2948)(s^2+9.705s+27.14)}.$$

给定 $t \in [0, 6]$ 上的期望轨迹为

$$y_d(t) = 0.1t^2(6-t)\sin(0.5\pi t).$$

在扩展Laguerre基函数的迭代学习控制中,参考轨迹延拓为

$$y_r(t) = \begin{cases} y_d(t), & t \in [0, 6], \\ 0, & t \in [-2, 0] \cup [6, 8]. \end{cases}$$

Laguerre基函数的参数 $p = 1$,采用12个基函数.应用同样的参数设置,分别用传统Laguerre基函数迭代学习控制^[13]和本文提出的扩展Laguerre基函数迭代学习控制进行仿真.图2为用传统的Laguerre基函数迭代学习控制的跟踪结果,在整个轨迹跟踪的初始阶段的误差较大,且随着迭代的进行不能再减小.图3为扩展Laguerre基函数迭代学习控制的结果,系统输出已经与参考轨迹重合.

图4将两种方法的误差随迭代次数变化的情况进行了对比.传统的基函数迭代学习律在15次迭代后,误差就几乎停止减小,留有较大的余差.而扩展Laguerre基函数迭代学习律能保证消除余差.这是由于传统的基函数空间无法涵盖系统稳定逆的不稳定部分的空间,不管基函数个数取得如何多,总会存在较大的余差.而扩展Laguerre函数迭代学习律可以保证输入输出空间可以完全的被扩展基函数空间涵盖,因而可以有效消除余差,并在基函数个数足够

多的情况下可以实现极高的精度。

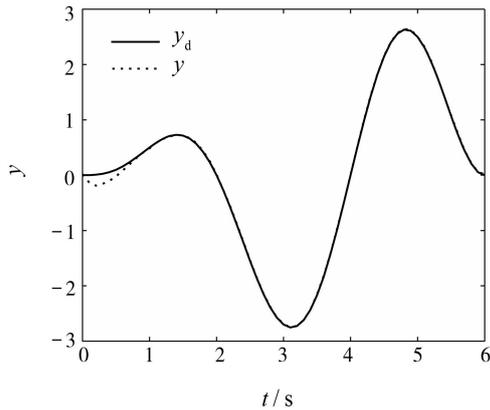


图 2 传统Laguerre基函数ILC的输出

Fig. 2 System output of traditional Laguerre basis function based ILC

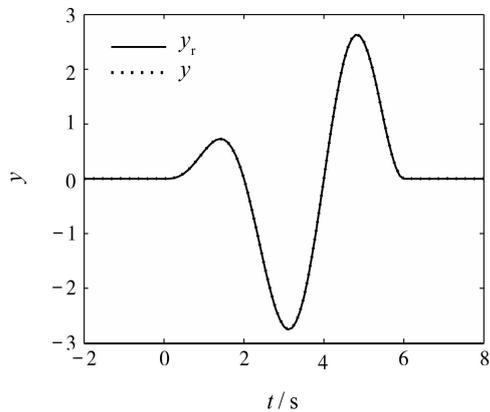


图 3 扩展Laguerre基函数ILC的输出

Fig. 3 System output of extended Laguerre basis function based ILC

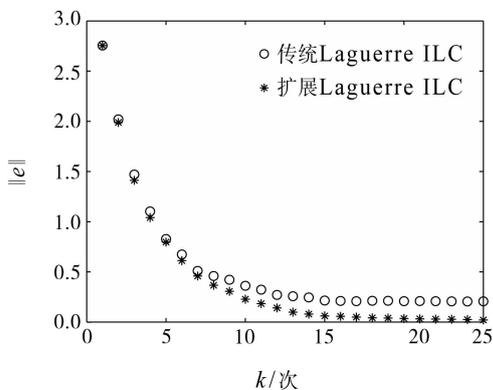


图 4 传统和扩展Laguerre基函数ILC的误差对比
Fig. 4 Error comparison between traditional and extended Laguerre basis function based ILC

例 2 输入为关节力矩 T , 输出为机械臂末端位置 Y 的柔性机械臂频域模型可表示为

$$\frac{Y(s)}{T(s)} = \frac{L}{I_T s^2} + \frac{1}{I_T} \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i(L)\phi_i'(0)}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2},$$

其中: L 为柔性机械臂的长度, I_T 为转动惯量, $\phi_i(x)$ 为第 i 个振动模式, ω_i 为第 i 个振动的自然角频率; ζ_i 是振动的阻尼比. 若 $L = 0.5 \text{ m}$, $I_T = 0.44 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 取前3个振动模式, 则得到的系统具有3个处于复平面右半平面的零点, 为典型的非最小相位系统. 假设 $t \in [0, 1]$ 上的末端参考轨迹为

$$y_d(t) = \frac{\pi}{2}[-f^6(t) + 3f^4(t) - 3f^2(t) + 1],$$

其中 $f(t) = 2(t - 0.5)$. 在扩展Laguerre基函数迭代学习控制中, 参考轨迹延拓为

$$y_r(t) = \begin{cases} y_d(t), & t \in [0, 1] \\ 0, & t \in [-1, 0] \cup [1, 2], \end{cases}$$

Laguerre基函数的参数 $p = 3$, 采用24个基函数. 应用同样的参数设置, 分别用本文提出的扩展Laguerre基函数迭代学习控制和传统Laguerre基函数迭代学习控制进行仿真. 图5为用传统的Laguerre基函数迭代学习控制的跟踪结果, 其中起始和结束阶段留有较大的余差. 而图6显示扩展Laguerre基函数迭代学习控制取得了精确的跟踪效果.

图7中给出了两种方法的误差随迭代次数变化的曲线, 可以看出扩展Laguerre基函数方法消除了传统的Laguerre基函数方法留下的余差.

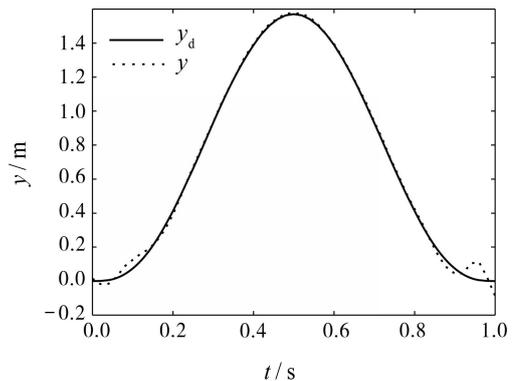


图 5 传统Laguerre基函数ILC的输出

Fig. 5 System output of traditional Laguerre basis function based ILC

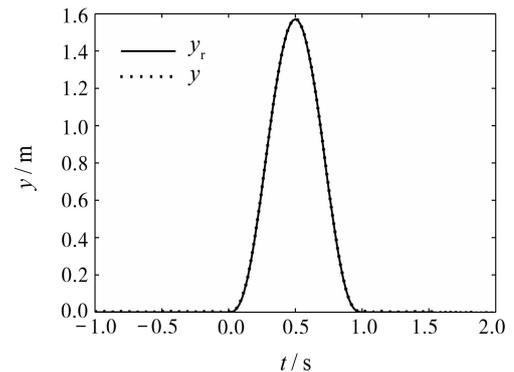


图 6 扩展Laguerre基函数ILC的输出

Fig. 6 System output of extended Laguerre basis function based ILC

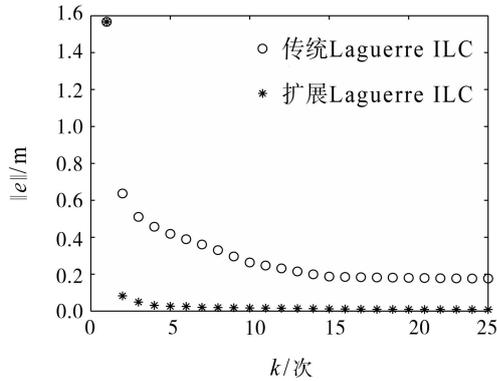


图7 传统和扩展Laguerre基函数ILC的误差对比

Fig. 7 Error comparison between traditional and extended Laguerre basis function based ILC

6 结论(Conclusions)

本文提出了一种新的基函数迭代学习控制算法,在基函数迭代学习控制的框架下,通过对Laguerre基函数进行扩展,使之在双边Laplace变换的意义下,实现对稳定逆的逼近.由于扩展Laguerre基函数所张成的空间能够包含系统稳定逆,从该空间所导出的基函数系经过迭代学习,使系统的输入最终收敛到稳定逆.从而可以在不精确知道系统模型条件下,解决非最小相位系统的迭代学习跟踪问题.并且通过对普通非最小相位模型和柔性机械臂模型进行了数值仿真,结果验证了该方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.
- [2] DEVASIA S, CHEN D, PADEN B. Nonlinear inversion-based output tracking [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(7): 930 – 942.
- [3] ZHAO H, CHEN D. A finite energy property of stable inversion to nonminimum phase nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(8): 1170 – 1174.
- [4] GHOSH J, PADEN B. A pseudo inverse-based iterative learning control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(5): 831 – 837.
- [5] GHOSH J, PADEN B. Iterative learning control for nonlinear non-minimum phase plants [J]. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 2001, 123(3): 21 – 30.
- [6] SOGO T, KINOSHITA K, ADACHI N. Iterative learning control using adjoint systems for nonlinear non-minimum phase systems [C] // *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney: IEEE, 2000, 4: 3445 – 3446.
- [7] 刘山, 吴铁军. 基于稳定逆的非最小相位系统的迭代学习控制 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(6): 831 – 837. (LIU Shan, WU Tiejun. Stable-inversion based iterative learning control for non-minimum phase plants [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 831 – 837.)
- [8] JEONG G M, CHOI C H. Iterative learning control for linear discrete time nonminimum phase systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(2): 287 – 291.
- [9] CAI Z L, FREEMAN C T, LEWIN P L, et al. Iterative learning control for a non-minimum phase plant based on a reference shift algorithm [J]. *Control Engineering Practice*, 2008, 16(6): 633 – 643.
- [10] YE Y Q, TAYEBI A, LIU X P. All-pass filtering in iterative learning control [J]. *Automatica*, 2009, 45(1): 257 – 264.
- [11] PHAN M Q, FRUEH J A. Learning control for trajectory tracking using basis functions [C] // *Proceedings of the 35th IEEE Decision and Control*. Kobe: IEEE, 1996, 3: 2490 – 2492.
- [12] YE Y Q, WANG D W. DCT basis function learning control [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2005, 10(8): 449 – 454.
- [13] HAMAMOTO K, SUGIE T. An iterative learning control algorithm within prescribed input-output subspace [J]. *Automatica*, 2001, 37(10): 1803 – 1809.
- [14] SUGIE T, SAKAI F. Noise tolerant iterative learning control for a class of continuous-time systems [J]. *Automatica*, 2007, 43(10): 1766 – 1771.
- [15] MAKILA P M, PARTINGTON J R. Robust approximation and identification in H_∞ [C] // *American Control Conference*. New York: IEEE, 1991, 1: 70 – 76.
- [16] SOGO T. An algebraic expression of stable inversion for nonminimum phase systems and its applications [C] // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea: [S.n.], 2008, 2: 1096 – 1100.
- [17] AGAMENNONI O, PAOLINI E, DESAGES A. On robust stability analysis of a control system using laguerre series [J]. *Automatica*, 1992, 28(4): 815 – 818.
- [18] MAKILA P M. Approximation of stable system by Laguerre filters [J]. *Automatica*, 1990, 26(3): 333 – 345.

作者简介:

刘山 (1970–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为迭代学习控制、机器人技术, E-mail: sliu@iipc.zju.edu.cn;

刘杰 (1984–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为迭代学习控制、柔性机械臂控制, E-mail: liujie@iipc.zju.edu.cn.