第 29 卷第 8 期
2012 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 29 No. 8
Aug. 2012

文章编号: 1000−8152(2012)08−1086−04

一阶强双曲分布参数系统的迭代学习控制

戴喜生[1,2], 田森平[2]

(1. 广西工学院 电子信息与控制工程系, 广西 柳州 545006; 2. 华南理工大学 系统工程研究所, 广东 广州 510640)

摘要: 研究了一阶强双曲分布参数系统的迭代学习控制问题. 首先利用Fourier变换和半群方法导出了系统状态的适应解. 进而基于强双曲条件和Plancheral定理, 在允许迭代过程中初值存在一定偏差条件下, 给出并证明了系统在P型迭代学习控制算法下的收敛条件. 最后应用实例说明了所提方法的有效性.

关键词: 迭代学习控制; 一阶双曲系统; Fourier变换

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Iterative learning control for first order strong hyperbolic distributed parameter systems

DAI Xi-sheng[1,2], TIAN Sen-ping[2]

(1. Department of Electronic Information and Control Egeineering, Guangxi University of Technology, Liuzhou, Guangxi 545006, China;
2. Systems Engineering Institute, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: An iterative learning control problem for first order strong hyperbolic distributed parameter systems is discussed. By means of Fourier transform and semigroup method, system state mild solution is built. Then, based on the strong hyperbolic condition and Plancheral theorem in Hilbert space, convergence conditions are given under P-type iterative learning control algorithms, where it is permitted to that the initial value of system state has some error in the iterative process. An example illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: iterative learning control; first order hyperbolic system; Fourier transform

1 引言(Introduction)

迭代学习控制是智能控制中具有严格数学描述的一个分支, 适用于具有重复运动性质的被控对象[1]. 迭代学习控制以极为简单的学习算法, 通过对被控对象进行控制尝试, 以输出轨迹与给定轨迹的偏差修正不理想的控制信号, 以产生新的控制信号使得系统的跟踪性能得以提高[2].

迭代学习控制算法自Arimoto等人于1984年提出以来便受到人们的重视, 现已成为热门的研究课题, 已发表许多研究成果, 且成功应用在诸如机器人系统、无缝钢管张减过程壁厚控制以及许多工业过程控制系统[3–7]. 现有关于迭代学习控制的研究大多是针对能用常微分方程描述的有限维系统进行的. 但在实际工程中, 分布参数系统(或无穷维系统)及其控制问题有着广泛的应用, 如化学反应中的扩散过程控制、热交换系统的控制等系统通常要用偏微分方程所代表的分布参数系统来描述, 而且对分布参数系统的控制问题研究也很多. 然而, 由于分布参数系统状态变量涉及无穷维函数空间, 所以到目前为止将迭代学习控制方法应用于分布参数系统的研究成果并不多. Qu[8]基于Lyapunov函数和边界控制首先将迭代学习控制方法应用于一类弹性系统的控制问题. 文献[9]利用半群方法和对抛物型分布参数系统的迭代学习控制进行了研究, 给出了基于算子不等式的P型和D型迭代学习控制收敛性条件, 文献[10]研究了一类非线性抛物型分布参数系统的稳态迭代学习控制问题, 分析了在P型学习算法下迭代学习过程的收敛速度及鲁棒性. 谢等[7]对非线性抛物型分布参数系统的迭代学习控制算法进行了探讨, 给出了二阶及高阶学习算法. Choi等在文献[11]中对一阶双曲系统的迭代学习控制问题进行了分析, 将系统延特征线离散化, 利用一般的常微分系统的迭代学习控制方法进行了研究, 但没有给出学习收敛条件及收敛性证明. 本文基于上述分布参数系统的迭代学习控制研究基础, 在严格意义的无穷维偏微分系统框架下, 利用P型学习算法, 给出并证明了与常微分系统类似的一阶强双曲分布参数系统迭代学习算法的收敛充分条件.

收稿日期: 2012−05−05; 收修改稿日期: 2012−06−13.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674034); 广西高等学校科研资助项目(201203YB125).

2 系统描述及准备(System statement and preliminary)

本文考虑无界区域上一阶线性双曲系统[12]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \sum\limits_{N=1}^{d} A^N \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x_N} - \\ \qquad \alpha Q(x,t) + Bu(x,t), \\ y(x,t) = CQ(x,t) + Du(x,t), \\ t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1}$$

其中: 常数$\alpha > 0$, $Q \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$分别表示系统状态、控制及输出向量, 而$C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $A^N = [a_{ij}^N] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$均为常数矩阵. 系统状态初始值为

$$Q(x,0) = h(x),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

系统(1)的第1式作为与热传导方程、波动方程及Laplace方程在数学物理中4类最基本的方程之一有很强的实际应用背景, 如电力系统中考虑分布参数形式的远距离传输线方程(组)、非等温管式反应器中的化学反应过程及声波传递的声波方程组等都可以其线性或非线性形式表示(本文研究的是线性形式).

对系统(1)第1式及上述初值条件的两边进行Fourier变换, 有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{Q}}{\partial t}(\xi,t) = [-iA(\xi) - \alpha I]\hat{Q}(\xi,t) + B\hat{u}(\xi,t), \\ \hat{Q}(\xi,0) = \hat{h}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2}$$

其中: $\hat{h}(\xi)$表示$h(x)$的傅里叶变换, $A(\xi) = \sum\limits_{N=1}^{d} \xi A^N$, I为单位矩阵. 当$|\xi| = 1$时, 如果$A(\xi)$的特征值$\lambda_1(\xi), \cdots, \lambda_n(\xi)$为$n$个互异的非零实特征值时, 则称系统(1)是强双曲的. 那么式(2)的适应解可表示为[13]

$$\hat{Q}(\xi,t) = \hat{K}(\xi,t)\hat{h}(\xi) + \int_0^t \hat{K}(\xi,t-s)B\hat{u}(\xi,s)\mathrm{d}s, \tag{3}$$

其中: $\hat{K}(\xi,t) = \mathrm{e}^{-tS(\xi)}$, $S(\xi) = \{iA(\xi) + \alpha I\}$, 对式(3)取Fourier逆变换, 得

$$Q(x,t) = (G_t h)(x) + \int_0^t (G_{t-s}Bu)(x,s)\mathrm{d}s, \tag{4}$$

这里, G_t为如下定义的格林算子:

$$(G_t g)(x) = (\frac{1}{2\pi})^{d/2} \int K(x-y,t)g(y)\mathrm{d}y,$$

$$K(x,t) = (\frac{1}{2\pi})^{d/2} \int \mathrm{e}^{ix\xi - S(\xi)t}\mathrm{d}\xi.$$

这里及下文关于空间变量的积分均表示在全空间$\mathbb{R}^d$上积分. 下面给出要用到的记号:

$|\cdot|$表示矩阵范数: $|A| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$. $L^2(\Omega)$为定义在开区域Ω上平方可积函数空间: 即若$Q \in L^2(\Omega)$, 则$||Q||_{L^2}^2 = \int_\Omega |Q(x)|^2\mathrm{d}x < \infty$. 对$Q_i \in L^2(\Omega)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, 记$Q = (Q_1,\cdots,Q_n) \in \mathbb{R}^n \cap L^2(\Omega)$, 那么

$$||Q||_{L^2}^2 = \int_\Omega Q^{\mathrm{T}}(x)Q(x)\mathrm{d}x.$$

对$f(x,t): \Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}^n$, $f(\cdot,t) \in \mathbb{R}^n \cap L^2(\Omega)$, $t \in [0,T]$, 及给定的常数λ, 定义其(L^2,λ)范数为

$$||f||_{(L^2,\lambda)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{(||f(\cdot,t)||_{L^2}^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\}.$$

3 迭代学习收敛性分析(Convergence analysis of iterative learning)

本节讨论分布参数系统(1)的迭代学习控制问题. 对给定的理想输出$y_{\mathrm{d}}(x,t)$, 本文的目标是通过学习控制的方法逐步寻找控制输入序列$\{u_k(x,t)\}$, 使得误差函数$e_k(x,t) = y_{\mathrm{d}}(x,t) - y_k(x,t)$满足

$$\lim_{k\to\infty} ||e_k(\cdot,t)||_{L^2} = 0,\ t \in [0,T]. \tag{5}$$

对系统(1), 采用P型迭代学习控制算法

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \varGamma e_k(x,t), \tag{6}$$

其中: k表示迭代次数, $\varGamma$是待寻的学习过程中的增益矩阵. 假设在学习过程中, 系统的初始状态允许有一定的误差, 即

$$Q_k(x,0) = h_k(x),\ x \in \Omega,\ k = 1,2,3,\cdots, \tag{7}$$

$$||h_{k+1}(x) - h_k(x)||_{L^2}^2 \leqslant lr^k,\ r \in [0,1),\ l > 0. \tag{8}$$

相应于$(L^2,\lambda(\xi))$, 当给定适当的常数ξ时, $(L^2,\lambda(\xi))$范数定义为[7]

$$||e_k(x,t)||_{(L^2,\lambda(\xi))} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{(||e_k(\cdot,t)||_{L^2}^2\mathrm{e}^{-\lambda t})\xi^k\}.$$

下面是本文的主要结果.

定理 1　对强双曲系统(1), 若算法(6)中的增益矩阵$\varGamma$满足

$$|I - D\varGamma|^2 \leqslant \rho \in [0,1),\ 2\rho + r < 1,$$

则由式(6)所确定的算法在$[0,T]$上一致收敛, 且

$$\lim_{k\to\infty} ||e_k(\cdot,t)||_{L^2} = 0,\ \forall t \in [0,T].$$

证　由算法(6), 可得

$$\begin{aligned} &e_{k+1}(x,t) = e_k(x,t) - y_{k+1}(x,t) + y_k(x,t) = \\ &e_k(x,t) - D(u_{k+1}(x,t) - u_k(x,t)) - \\ &C(Q_{k+1}(x,t) - Q_k(x,t)) = \\ &(I - D\varGamma)e_k(x,t) - \\ &C(Q_{k+1}(x,t) - Q_k(x,t)) = \\ &\bar{e}_k(x,t) + \bar{C}_k(x,t), \end{aligned} \tag{9}$$

其中:

$$\bar{e}_k(x,t) = (I - D\Gamma)e_k(x,t),$$
$$\bar{C}_k(x,t) = -C(Q_{k+1}(x,t) - Q_k(x,t)).$$

因此由

$$e_{k+1}^{\mathrm{T}}(x,t)e_{k+1}(x,t) =$$
$$(\bar{e}_k^{\mathrm{T}}(x,t) + \bar{C}_k^{\mathrm{T}}(x,t))(\bar{e}_k(x,t) + \bar{C}_k(x,t)) \leqslant$$
$$2\bar{e}_k^{\mathrm{T}}(x,t)\bar{e}_k(x,t) + 2\bar{C}_k^{\mathrm{T}}(x,t)\bar{C}_k(x,t) \tag{10}$$

及定理条件可得

$$|e_{k+1}(x,t)|^2 \leqslant 2\rho|e_k(x,t)|^2 + 2c|\bar{Q}_k(x,t)|^2.$$

这里定义

$$\bar{Q}_k(x,t) = Q_{k+1}(x,t) - Q_k(x,t),\ c = |C|^2.$$

利用L^2范数的三角不等式有

$$||e(\cdot,t)_{k+1}||_{L^2}^2 \leqslant 2\rho||e_k(\cdot,t)||_{L^2}^2 + 2c||\bar{Q}_k(\cdot,t)||_{L^2}^2, \tag{11}$$

因此从上式可知, 要估计$||e(\cdot,t)_{k+1}||_{L^2}^2$, 应先估计$||\bar{Q}_k(\cdot,t)||_{L^2}^2$, 由式(4)知

$$\bar{Q}_k(x,t) = Q_{k+1}(x,t) - Q_k(x,t) =$$
$$G_t(Q_{k+1}(x,0) - Q_k(x,0)) +$$
$$\int_0^t G_{t-s}B(u_{k+1}(x,s) - u_k(x,s))\mathrm{d}s =$$
$$G_t(Q_{k+1}(x,0) - Q_k(x,0)) +$$
$$\int_0^t G_{t-s}B\Gamma e_k(x,s)\mathrm{d}s.$$

注意到$|\hat{K}(\xi,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}$, 利用Plancheral定理, $\forall h \in L^2$, 有

$$||G_t h||_{L^2}^2 = ||\hat{K}(\xi,t)\hat{h}||_{L^2}^2 \leqslant \mathrm{e}^{-2\alpha t}||h||_{L^2}^2, \tag{12}$$

所以,

$$||\bar{Q}_k(\cdot,t)||_{L^2}^2 \leqslant$$
$$2||\bar{Q}_{k+1}(\cdot,0)||_{L^2}^2 + 2||\int_0^t G_{t-s}B\Gamma e_k(\cdot,s)\mathrm{d}s||_{L^2}^2 \leqslant$$
$$2lr^k + 2T\int_0^t ||G_{t-s}B\Gamma e_k(\cdot,s)||_{L^2}^2\mathrm{d}s \leqslant$$
$$2lr^k + 2T\int_0^t \mathrm{e}^{-2a(t-s)}||B\Gamma e_k(\cdot,s)||_{L^2}^2\mathrm{d}s \leqslant$$
$$2lr^k + 2T\int_0^t ||B\Gamma e_k(\cdot,s)||_{L^2}^2\mathrm{d}s. \tag{13}$$

式(13)第2个不等号利用了Hölder不等式. 选择适当大的λ, 并用$\mathrm{e}^{-\lambda t}$乘以两边有

$$||\bar{Q}_k(\cdot,t)||_{L^2}^2\mathrm{e}^{-\lambda t} \leqslant$$
$$2lr^k + 2T\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}||B\Gamma e_k(\cdot,s)||_{L^2}^2\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s \leqslant$$
$$2lr^k + 2T||B\Gamma e_k||_{(L^2,\lambda)}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\mathrm{d}s \leqslant$$
$$2lr^k + b_1\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda T}}{\lambda}||e_k||_{(L^2,\lambda)}, \tag{14}$$

其中$b_1 = 2T|B\Gamma|$. 则由式(11)(14)有

$$||e(\cdot,t)_{k+1}||_{L^2}^2\mathrm{e}^{-\lambda t} \leqslant$$
$$2\rho||e_k||_{(L^2,\lambda)}^2 + 2c||\bar{Q}_k(\cdot,t)||_{L^2}^2\mathrm{e}^{-\lambda t} \leqslant$$
$$2\rho||e_k||_{(L^2,\lambda)} + 2c(2lr^k + b_1\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda T}}{\lambda}||e_k||_{(L^2,\lambda)}) =$$
$$4clr^k + (2\rho + \frac{b_2}{\lambda})||e_k||_{(L^2,\lambda)}. \tag{15}$$

因为式(15)右端与t无关, 所以

$$||e_{k+1}||_{(L^2,\lambda)} \leqslant 4clr^k + (2\rho + \frac{b_2}{\lambda})||e_k||_{(L^2,\lambda)}. \tag{16}$$

由定理条件可知, 利用实数的连续性, 对充分大的λ, 有$2\rho + r + \frac{b_2}{\lambda} < 1$. 记$2\rho + \frac{b_2}{\lambda} = \eta$, 由式(16)得

$$||e_k||_{(L^2,\lambda)} \leqslant 4cl\sum_{j=1}^{k-1} r^j\eta^{k-j-1} + \eta^k||e_1||_{(L^2,\lambda)}. \tag{17}$$

由于$\eta + r < 1$, 则存在$\xi > 1$, 使得$\xi(\eta + r) < 1$, 则

$$(||e_k||_{(L^2,\lambda)})\xi^k \leqslant$$
$$4cl\xi\sum_{j=1}^{k-1}(\xi r)^j(\xi\eta)^{k-j-1} + (\xi\eta)^k||e_1||_{(L^2,\lambda)} \leqslant$$
$$4cl\xi(\xi r + \xi\eta)^{k-1} + (\xi\eta)^k||e_1||_{(L^2,\lambda)} \leqslant$$
$$4cl\xi + ||e_1||_{(L^2,\lambda)}, \tag{18}$$

从而

$$||e_k||_{(L^2,\lambda)} \leqslant (4cl\xi + ||e_1||_{(L^2,\lambda)})\xi^{-k}. \tag{19}$$

故

$$||e_k(\cdot,t)||_{L^2}^2 \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\sup_{1\leqslant j\leqslant k}||e_j||_{(L^2,\lambda)} \leqslant$$
$$\xi^{-k}\mathrm{e}^{\lambda T}(4cl\xi + ||e_1||_{(L^2,\lambda)}). \tag{20}$$

由于$\xi > 1$, 则得到所要求证明的结果

$$\lim_{k\to\infty}||e_k(\cdot,t)||_{L^2} = 0,\ t \in [0,T].$$

证毕.

4 例子(Example)

考虑下面的系统:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\alpha v + u_1(x,t),$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_0\frac{\partial p}{\partial x} + \kappa^2\rho\frac{\partial v}{\partial x} = -\alpha p + u_2(x,t),$$
$$v(x,0) = h_1(x),\ p(x,0) = h_2(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0.$$

如果令$Q_1 = v,\ Q_2 = p$, 则对应于系统(1), $d = 1$, $n = 2$的情形

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = A\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \alpha Q(,x,t) + Bu(x,t), \\ Q(x,0) = h(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0. \end{cases} \tag{21}$$

这里,

$$A = -\begin{bmatrix} \upsilon_0 & 1/\rho \\ \kappa^2\rho & \upsilon_0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

容易知道矩阵A有两个不相同的非0实特征值: $\lambda_{1,2} = \upsilon_0 \pm \kappa(\upsilon_0 \neq \kappa)$, 因此系统(21)是强双曲的; 进一步取

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \varGamma = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix},$$

所以对给定的输出, 可以按照算法(6)进行迭代学习.

5 结论(Conclusions)

目前对分布参数系统迭代学习控制的研究主要集中于抛物型系统, 本文则研究了双曲型分布参数系统的迭代学习控制问题(正则情形). 基于适应解在希尔伯特空间的抽象表达式, 充分利用系统强双曲性质, 从而可以得到类似于常微分系统解的逐项估计不等式, 最终导出了系统P型迭代学习控制收敛性条件. 本文结果无本质困难的可推广到Lipschitz非线性的情形, 同时本文研究过程中不需求出解的精确表达式, 方法具有一般性, 拓宽了迭代学习控制方法在分布参数系统上的应用范围, 对分布参数系统迭代学习控制研究具有重要的理论和实际意义. 未来进一步可考虑二阶双曲分布参数系统的迭代学习控制问题.

参考文献(References):

[1] 林辉, 王林. 迭代学习控制理论 [M]. 西安：西北工业大学出版社, 1998.
(LIN Hui, WANG Lin. *Iterative Learning Control* [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998.)

[2] 孙明轩, 黄宝键. 迭代学习控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
(SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1999.)

[3] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robotics by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.

[4] 李俊民, 王元亮, 李新民. 未知时变时滞非线性参数化系统自适应迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(6): 861 – 868.
(LI Junmin, WANG Yuanliang, LI Xinmin. Adaptive iterative learning control for nonlinear parameterized-systems with unknown time-varying delays [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(6): 861 – 868.)

[5] RUAN X, BIEN Z Z, PARK K H. Decentralized iterative learning control to large-scale industrial processes for nonrepetitive trajectory tracking [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A*, 2008, 38(1): 238 – 252.

[6] YIN Chenkun, XU Jianxin, HOU Zhongsheng. Iterative learning control design for tracking iteration-varying trajectories with high-order internal model [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010, 8(3): 309 – 316.

[7] 谢胜利, 田森平, 谢振东. 迭代学习控制的理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
(XIE Shengli, TIAN Senping, XIE Zhendong. *Theory and Application of Iterative Learning Control* [M]. Beijing: Science Press, 2005.)

[8] QU Zhihua. An iterative learning algorithm for boundary control of a stretched moving string [J]. *Automatica*, 2002, 38(5): 821 – 827.

[9] CHAO Xu, ARASTOO R, SCHUSTER E. On iterative learning control of parabolic distributed parameter systems [C] //*The 17th Mediterranean Conference on Control & Automation*. New York: IEEE, 2009: 510 – 515.

[10] HUANG Deqing, XU Jianxin. Steady-state iterative learning control for a class of nonlinear PDE processes [J]. *Journal of Process Control*, 2011, 21(8): 1155 – 1163.

[11] CHOI J, SEO B J, LEE K S. Constrained digital regulation of hyperbolic PDE: a learning control approach [J]. *Korean Journal of Chemical Engineering*, 2001, 18(5): 606 – 611.

[12] COURANT R, HILBERT D. *Method of Mathematical Physics II* [M]. New York: Interscience, 1962.

[13] PAZY A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

作者简介:

戴喜生 (1976–), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, 目前感兴趣的研究方向为迭代学习控制与随机控制, E-mail: mathdxs@163.com;

田森平 (1961–), 男, 博士, 教授, 目前感兴趣的研究方向是迭代学习控制理论与算法, E-mail: ausptian@scut.edu.cn, 通讯作者.