

具有迭代初始误差的高相对度线性离散系统的迭代学习控制

毛祖永, 李晓东

(中山大学 信息科学与技术学院; 智能传感器网络教育部重点实验室, 广东 广州 510006)

摘要: 本文针对具有迭代初始误差的高相对度线性多变量离散系统, 提出了一种P型的迭代学习控制算法. 通过将迭代学习控制系统的二维运动过程描述为一维的线性离散系统, 证明了该迭代学习控制算法的收敛性及其收敛的充要条件. 该迭代学习控制算法通过对系统前次重复运动过程中的输入和跟踪误差信号进行学习, 来不断地调整输入量, 使得系统在经过一定次数的学习以后, 在初始时间点以外的实际输出趋于期望输出. 数值仿真结果表明了所提出算法的有效性.

关键词: 迭代学习控制; 线性离散系统; 相对度; 充要条件

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Iterative learning control for linear discrete systems with high relative degree and iterative initial error

MAO Zu-yong, LI Xiao-dong

(School of Information Science and Technology; Key lab of Machine Intelligence and Sensor Network, Ministry of Education, Sun Yat-sen University, Guangzhou Guangdong 510006, China)

Abstract: This paper presents a P-type iterative learning control algorithm for linear multi-variable discrete systems with high relative degree and iterative initial errors. The convergence of the proposed iterative learning control algorithm with necessary and sufficient condition is proved by converting the two-dimensional iterative learning control process into a one-dimensional linear discrete system. The proposed iterative learning control method updates the control input iteratively by a learning mechanism using the information of errors and inputs in the preceding trials such that the tracking performance of the system outputs beyond the initial time point is improved. A numerical example is used to illustrate the effectiveness of the proposed iterative learning control technique.

Key words: iterative learning control; linear discrete systems; relative degree; necessary and sufficient condition

1 引言(Introduction)

迭代学习控制方法适用于在固定时间段上重复跟踪期望轨迹的动态系统, 其最大优点是不需要系统模型的精确信息. 迭代学习控制利用系统以前的控制经验, 不断调整控制输入, 使被控对象产生期望的运动. 迭代学习控制技术自产生以来, 逐步发展为智能控制领域一个新的研究方向^[1-2]. 然而, 目前已有的绝大部分迭代学习控制算法都是针对相对度为1或者为0的动态系统设计的^[1-4]. 由于高相对度动态系统的广泛存在, 近年来, 其迭代学习控制研究引起了控制界的较大关注, 如文献[5-7]等分别对单输入单输出的高相对度非线性离散系统和线性连续系统进行了相关的迭代学习控制研究. 尽管文献[8]提出过高相对度多输入多输出系统的迭代学习控制方法, 但其要求的多输入和多输出的个数必须是相同的, 因此有必要将高相对度动态系统的迭代学习控

制推广到更普遍的多输入多输出系统. 本文将针对具有迭代初始误差的高相对度线性多变量离散系统, 提出一种P型的迭代学习控制律, 并对其收敛性进行研究, 得到收敛的充要条件.

2 基于高相对度线性离散系统的迭代学习控制算法(Iterative learning control algorithm based on linear discrete systems with high relative degree)

考虑如下重复运动的多输入多输出线性离散系统:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) = Cx_k(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: 时间变量 $t = 0, 1, 2, \dots, N$, $x_k(t) \in \mathbb{R}^n$, $u_k(t) \in \mathbb{R}^l$ 和 $y_k(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统在第 k 次重复运动中的状态向量、输入向量和输出向量, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times l}, B_i = [B_{i,1} \ B_{i,2} \ \cdots \ B_{i,l}],$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, C_i = [C_{i,1} \ C_{i,2} \ \cdots \ C_{i,n}].$$

在系统(1)的迭代学习控制过程中, 设其期望输出为 $y_d(t) = [y_{d,1}(t) \ \cdots \ y_{d,m}(t)]^T = Cx_d(t) \in \mathbb{R}^m$, 对应的期望状态为 $x_d(t)$, 输出误差为 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$.

定义 1^[9] 对于线性多变量离散系统(1), 如果其系统Markov参数满足

$$\begin{cases} h_0 = 0, \\ h_i = C_j A^{i-1} B = 0, \ 1 \leq i \leq p_j - 1, \\ h_{p_j} = C_j A^{p_j-1} B \neq 0, \\ 1 \leq j \leq m, \end{cases}$$

则称系统(1)的相对度为 $p = (p_1, \dots, p_m)$.

推论 1 如果线性多变量离散系统(1)的相对度为 $p = (p_1, \dots, p_m)$, 则

$$\begin{cases} y_{k,j}(t+i) = C_j A^i x_k(t), \ 0 \leq i \leq p_j - 1, \\ y_{k,j}(t+p_j) = C_j A^{p_j} x_k(t) + C_j A^{p_j-1} B u_k(t), \end{cases}$$

其中 $y_{k,j}(t)$ 代表 $y_k(t)$ 的第 j 个分量.

此推论可由系统相对度的定义直接得到.

高相对度线性离散系统(1)的迭代学习控制是一个复杂的二维运动过程, 由于系统运动在有限的离散时间点上, 本文将应用文献[10]的方法, 通过将二维的迭代学习控制过程转化为一维的离散系统, 来研究高相对度系统(1)的迭代学习控制, 为此, 本文提出并证明下面的定理.

定理 1 对于相对度为 $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ 的线性多变量离散系统(1), 设其迭代初始状态 $x_k(0)$ 满足 $x_k(0) = x_0 (k = 0, 1, 2, \dots)$, 令

$$e_k(t) = [e_{k,1}(t) \ e_{k,2}(t) \ \cdots \ e_{k,m}(t)]^T,$$

选取迭代学习控制律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma e_k(t+p). \quad (2)$$

其中 $e_k(t+p) = [e_{k,1}(t+p_1) \ \cdots \ e_{k,m}(t+p_m)]^T$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0 (t = 1, 2, \dots, N)$ 的充要条件为 $\rho(G) < 1$

$$\rho(I - B\Gamma Q) < 1, \text{ 其中 } Q = \begin{bmatrix} C_1 A^{p_1-1} \\ C_2 A^{p_2-1} \\ \vdots \\ C_m A^{p_m-1} \end{bmatrix}.$$

证 令

$$\begin{cases} \Delta u_k(t) = u_{k+1}(t) - u_k(t), \\ \Delta x_k^*(t) = x_d(t) - x_k(t), \end{cases} \quad (3)$$

则由式(2)得

$$\begin{aligned} \Delta u_k(t) &= \Gamma e_k(t+p) = \\ &= \Gamma e_k(t+1+p-1). \end{aligned} \quad (4)$$

由系统(1)的表达式, 易得

$$x_k(t) = A^t x_k(0) + A^{t-1} B u_k(0) + A^{t-2} B u_k(1) + \cdots + A B u_k(t-2) + B u_k(t-1). \quad (5)$$

根据定理1中初始条件 $x_k(0) = x_0$ 和式(3)–(5), 可得如下关系式:

$$\begin{aligned} \Delta x_{k+1}^*(t) &= x_d(t) - x_{k+1}(t) = \\ \Delta x_k^*(t) - (x_{k+1}(t) - x_k(t)) &= \\ \Delta x_k^*(t) - A^{t-1} B \Delta u_k(0) - A^{t-2} B \Delta u_k(1) - \\ \cdots - A B \Delta u_k(t-2) - B \Delta u_k(t-1). \end{aligned} \quad (6)$$

根据式(2)(4)(6), 可进一步得

$$\begin{cases} \Delta x_{k+1}^*(1) = \Delta x_k^*(1) - B \Delta u_k(0) = \\ \Delta x_k^*(1) - B \Gamma e_k(1+p-1), \\ \Delta x_{k+1}^*(2) = \\ \Delta x_k^*(2) - A B \Delta u_k(0) - B \Delta u_k(1) = \\ \Delta x_k^*(2) - A B e_k(1+p-1) - \\ B \Gamma e_k(2+p-1), \\ \vdots \\ \Delta x_{k+1}^*(N) = \\ \Delta x_k^*(N) - (x_{k+1}(N) - x_k(N)) = \\ \Delta x_k^*(N) - A^{N-1} B \Delta u_k(0) - \\ A^{N-2} B \Delta u_k(1) - \cdots - \\ A B \Delta u_k(N-2) - B \Delta u_k(N-1) = \\ \Delta x_k^*(N) - A^{N-1} B \Gamma e_k(1+p-1) - \\ A^{N-2} B \Gamma e_k(2+p-1) - \cdots - \\ A B \Gamma e_k(N-1+p-1) - B \Gamma e_k(N+p-1). \end{cases} \quad (7)$$

根据推论1, 得

$$e_k(t+p-1) = \begin{bmatrix} e_{k,1}(t+p_1-1) \\ e_{k,2}(t+p_2-1) \\ \vdots \\ e_{k,m}(t+p_m-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 A^{p_1-1} \\ C_2 A^{p_2-1} \\ \vdots \\ C_m A^{p_m-1} \end{bmatrix} (x_d(t) - x_k(t)),$$

则 $e_k(t+p-1) = Q \Delta x_k^*(t)$, 根据该式和式(3), 式(7)进一步可化简成

$$\begin{aligned} \Delta x_{k+1}^*(1) &= \Delta x_k^*(1) - B \Gamma Q \Delta x_k^*(1) = \\ &= (I - B \Gamma Q) \Delta x_k^*(1), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_{k+1}^*(2) &= \\ \Delta x_k^*(2) - A B Q \Delta x_k^*(1) - B \Gamma Q \Delta x_k^*(2) &= \\ (I - B \Gamma Q) \Delta x_k^*(2) - A B Q \Delta x_k^*(1), \end{aligned} \quad (9)$$

⋮

$$\Delta x_{k+1}^*(N) = (I - B\Gamma Q)\Delta x_k^*(N) - A^{N-1}B\Gamma Q\Delta x_k^*(1) - A^{N-2}B\Gamma Q\Delta x_k^*(2) - \dots - AB\Gamma Q\Delta x_k^*(N-1). \quad (10)$$

由式(8)–(10)可以看出, $\Delta x_{k+1}^*(t) (t = 1, 2, \dots, N)$ 可以由 $\Delta x_k^*(1), \Delta x_k^*(2), \Delta x_k^*(3), \dots, \Delta x_k^*(t)$ 线性表示, 且 $\Delta x_k^*(t)$ 系数矩阵为 $I - B\Gamma Q$, 令 $G = I - B\Gamma Q$,

$$E_k = [\Delta x_k^{*T}(1) \Delta x_k^{*T}(2) \dots \Delta x_k^{*T}(N)]^T,$$

则将以上式(8)–(10)合并, 可得到以下形式的方程:

$$E_{k+1} = \Phi \cdot E_k, \quad (11)$$

其中: $\Phi = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & G & 0 & \dots & 0 \\ * & * & G & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & G \end{bmatrix}$ 为 $N \times N$ 的分块矩阵,

下三角矩阵 Φ 中的符号 * 表示块元素. 式(11)实际上构成了关于 k 的一维线性离散系统, 由一维线性离散系统稳定性理论可知 $E_k (k \rightarrow \infty)$ 收敛到零, 当且仅当矩阵 Φ 的所有特征值在单位圆内, 即 $\rho(G) = \rho(I - B\Gamma Q) < 1$. 由 $\lim_{k \rightarrow +\infty} E_k = 0$, 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta x_k^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_d(t) - x_k(t)) = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} C(t)\Delta x_k^*(t) = 0,$$

其中 $t = 1, 2, \dots, N$. 定理1得证. 证毕.

3 仿真研究(Simulation study)

为了验证上面定理的结果, 本文对以下的线性离散系统进行仿真实验:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = \begin{bmatrix} -0.0558 & -0.9966 & 0.0802 & 0.0415 \\ 0.5980 & -0.1150 & -0.0318 & 0 \\ -3.0500 & 0.3880 & -0.4650 & 0 \\ 0 & 0.0805 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k(t) + \begin{bmatrix} 0.0729 & -0.0001 \\ -4.7500 & 1.2300 \\ 1.5300 & 10.6300 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_k(t), \\ y_k(t) = \begin{bmatrix} y_k^{(1)}(t) \\ y_k^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k(t), \end{cases} \quad (12)$$

式中: $x_k(0) = [0.1 \ 0.012 \ 0.1 \ 0.07]^T$, $u_0(t) = [0 \ 0]^T$, 其中 $t = 0, 1, 2, \dots, 97$, 易知系统(12)的相对度为 $p = (1, 2)$, 设其迭代学习控制的期望输出为

$$y_d(t) = \begin{bmatrix} y_d^{(1)}(t) \\ y_d^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0208\sin(0.01\pi t) \\ 0.00016t^2(1 - 0.01t) \end{bmatrix},$$

$t = 0, 1, 2, \dots, 97$. 系统的迭代初始误差

$$e_k(0) = \begin{bmatrix} 0.012 \\ 0.07 \end{bmatrix}.$$

对系统(12)应用迭代学习控制律(2), 并取 $\Gamma = \begin{bmatrix} 0.00000001 & 0.012 \\ 0.0019 & 0.001 \end{bmatrix}$, 容易验证定理1的条件 $\rho(G) = \rho(I - B\Gamma Q) < 1$ 成立. 笔者用下面的跟踪误差平方和指标来表征迭代学习控制的跟踪精度:

$$EE^{(1)} = \sum_{t=1}^{97} [y_d^{(1)}(t) - y_k^{(1)}(t)]^2, \\ EE^{(2)} = \sum_{t=1}^{97} [y_d^{(2)}(t) - y_k^{(2)}(t)]^2.$$

图1和图2分别显示了应用迭代学习控制律(2)不同次数后, 系统输出分量 $y_k^{(1)}(t), y_k^{(2)}(t)$ 跟踪期望轨迹分量 $y_d^{(1)}(t), y_d^{(2)}(t)$ 的情况. 图3和图4则分别显示了跟踪误差指标 $EE^{(1)}$ 和 $EE^{(2)}$ 随迭代次数的变化情况. 图1–4的仿真结果表明本文针对高相对度线性多变量离散系统提出的P型迭代学习控制律具有良好的收敛特性.

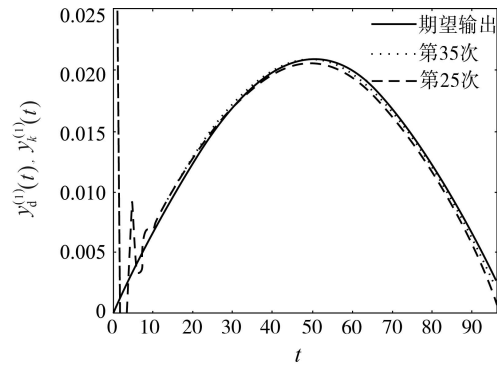


图1 迭代学习控制律(2)被执行不同的迭代次数时, 输出轨迹 $y_k^{(1)}(t)$ 跟踪期望轨迹 $y_d^{(1)}(t)$ 的情况

Fig. 1 Tracking performance of the ILC system output $y_k^{(1)}(t)$ to $y_d^{(1)}(t)$ at different iteration numbers using the proposed ILC rule (2)

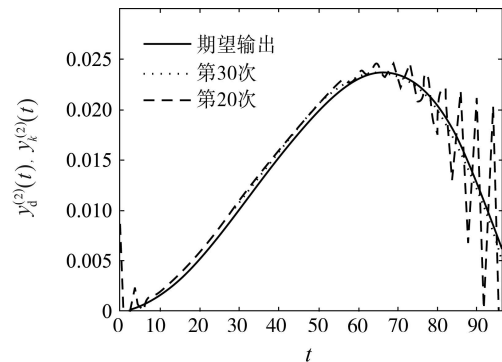


图2 迭代学习控制律(2)被执行不同的迭代次数时, 输出轨迹 $y_k^{(2)}(t)$ 跟踪期望轨迹 $y_d^{(2)}(t)$ 的情况

Fig. 2 Tracking performance of the ILC system output $y_k^{(2)}(t)$ to $y_d^{(2)}(t)$ at different iteration numbers using the proposed ILC rule (2)

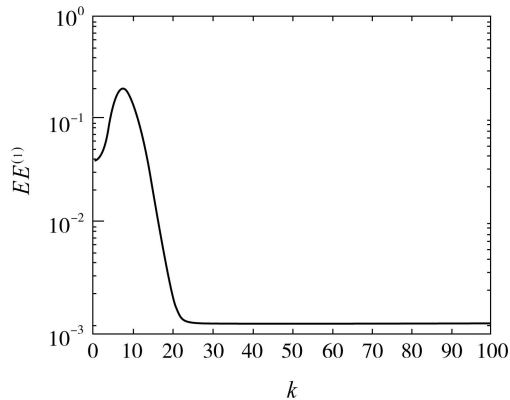


图 3 跟踪误差指标 $EE^{(1)}$ 随迭代次数的变化情况

Fig. 3 Tracking performance of the ILC system error index $EE^{(1)}$ at different iteration numbers using the proposed ILC rule (2)

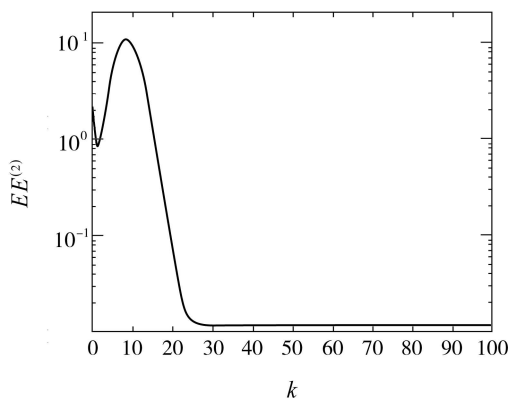


图 4 跟踪误差指标 $EE^{(2)}$ 随迭代次数的变化情况

Fig. 4 Tracking performance of the ILC system error index $EE^{(2)}$ at different iteration numbers using the proposed ILC rule (2)

4 结束语(Conclusions)

迭代学习控制本质上是一个二维运动的过程, 被控系统的高相对度为这种二维过程的设计增添了更高的复杂性. 本研究充分利用了离散系统迭代学习控制在有限个时间点上的重复运动特性, 将高相对度线性多变量离散系统的二维迭代学习控制过程表述为一维的线性离散系统, 从而利用一维线性离散系统的稳定性定理证明了所提出的P型学习控制律的收敛性, 仿真结果验证了这种学习控制算法的有

效性. 值得一提的是: 本文给出的P型学习控制律允许系统固定迭代初始误差的存在, 且给出的收敛条件是充分必要的.

参考文献(References):

- [1] CUGLIARI M, MARINO R, TOMEI P, et al. Global learning controls for uncertain relative degree one linear systems: a comparative study [C] // *American Control Conference*. New York: IEEE, 2009: 1628 – 1633.
- [2] LI Xiaodong, CHOW Tommy W S, HO John K L, et al. Iterative learning control with initial rectifying action for nonlinear continuous systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2009, 3(1): 49 – 55.
- [3] FANG Yong, CHOW Tommy W S. 2-D analysis for iterative learning controller for discrete-time systems with variable initial conditions [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, 50(5): 722 – 727.
- [4] LI Xiaodong, CHOW Tommy W S, HO John K L. 2-D system theory based iterative learning control for linear continuous systems with time-delays [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Regular Papers*, 2005, 52(7): 1421 – 1430.
- [5] CHIEN Chiangju, YAO Chiayu. An output-based adaptive iterative learning controller for high relative degree uncertain linear systems [J]. *Automatica*, 2004, 40(1): 145 – 153.
- [6] SUN Mingxuan, WANG Danwei. Initial shift issues on discrete-time iterative learning control with system relative degree [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(1): 144 – 148.
- [7] MARCELIN D, HOUCINE C, NICOLAS L. Unconstrained NCGPC with a guaranteed closed-loop stability: case of nonlinear SISO systems with the relative degree greater than four [C] // *28th Chinese Control Conference*. Shanghai: IEEE, 2009: 1980 – 1985.
- [8] SUN Mingxuan, WANG Danwei. Iterative learning control with initial rectifying action [J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1177 – 1182.
- [9] ILCHMANN Achim, MUELLER Markus. Time-varying linear systems: relative degree and normal form [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 840 – 851.
- [10] LI Xiaodong, HO John K L. Further results of iterative learning control with conditions for linear time-variant discrete Systems [J]. *International Journal of System Science*, 2011, 42(6): 989 – 996.

作者简介:

毛祖永 (1984–), 男, 研究方向主要是智能学习控制理论与应用;

李晓东 (1966–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制与智能计算、二维系统理论等, Email: lixd@mail.sysu.edu.cn, 通信作者.