第 29 卷第 2 期
2012 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 29 No. 2
Feb. 2012

文章编号: 1000−8152(2012)02−0177−06

基于信息熵理论的网络化集群系统的可靠性分析

黄大荣, 汪 鹏, 朱 波
(重庆交通大学 信息科学与工程学院 桥梁结构工程重点实验室, 重庆 400074)

摘要: 首先, 从信息论的角度借用信道容量概念定义了网络化集群系统的可靠度模型; 然后, 在已知一个节点可靠度和链接概率分布的条件下, 基于所建立的网络化工程系统的可靠度模型, 通过对拉格朗日微分方程的求解, 给出了网络节点链接失败概率总和达到最大时, 单节点链接失败概率的计算方法; 在此基础上, 基于已知一个节点可靠度的条件, 通过微分方程给出了网络节点链接失败概率总和达到最小时单节点链接失败概率的计算模型; 最后, 给出了一些具有导向性的结论.

关键词: 可靠性; 网络化集群系统; 信息熵; 信道容量; 链接概率分布
中图分类号: TB114.3　　**文献标识码**: A

Reliability of networked-group systems based on information entropy

HUANG Da-rong, WANG Peng, ZHU Bo
(Key Laboratory of Structural Engineering, College of Information Science and Engineering,
Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: The reliability model for evaluating the reliability of the networked-group systems is built based on the channel capacity. Given the reliability degree of a node and the link probability distribution of every node, we develop a method for computing the link-failure probability of that node when the total sum of the link-failure probabilities of all nodes in the network reaches the maximum. On this basis, when the reliability degree of a node is given, we also derive the method for computing the link-failure probability of that node when the total sum of the link-failure probabilities of all nodes in the network reaches the minimum. Proposals for further research are given.

Key words: reliability; networked-group systems; information entropy; channel capacity; link probability distribution

1 引言(Introduction)

近年来, 在役桥梁、机械、型号装备等大型工程集群化健康监测的需求凸现重要, 从而形成了大型工程健康的网络化集成系统, 可随着现代工业及科学技术的发展, 类似的网络化工程系统的功能越来越多、结构也越来越复杂, 其健康监测技术涉及到相互关联、相互制约的多个层次和众多因素, 而且其中有很多因素对于系统的正常运行来说并不是致命的, 一旦这些因素发生故障, 系统还会介入正常状态和故障状态之间带故障运行, 称之为“亚健康”状态[1]. 为了保证网络集群系统的正常运行, 国内外学者基于故障诊断及预测技术[2–6]的角度对网络化系统的控制模型进行了研究, 并取得了很好的研究效果. 然而, 随着技术手段不断地更新和发展, 网络化集群系统本身是否安全可靠已经成了影响大型工程集群化健康检测技术发展的瓶颈. 因此, 如何评价这种带有“亚健康”状态征兆的网络化集群系统运行状态的优劣, 便成了研究工作者和工程技术人员极为关心的问题.

网络化集群系统的可靠性分析作为可靠性工程领域的一个研究热点, 在最近几年得到了很快的发展, 现有的文献主要集中在计算机网络通信的可靠性评价及分析模型的研究[7–10]. 然而, 由于类似的网络化工程系统的复杂性, 其可靠性分析具有相当的难度, 尤其是对于大型工程集群化健康监侧所形成的网络化工程系统本身可靠性的评价及其度量方面的理论和工程应用研究显得更为复杂, 在理论模型及研究方法上都需要做进一步深入研究. 因此, 本文作者引入信息论的信道容量概念定义了网络化工程系统的相对可靠度模型, 然后, 基于所建立的网络化工程系统的可靠度模型, 在已知一个节点可靠度的条件下, 给出了网络节点链接失败概率总和达到最小时链接失败概率的计算方法; 并在同时给定链接概率分布的条件下, 分析了网络节点链接失败概率

收稿日期: 2011−05−04; 收修改稿日期: 2011−10−23.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61004118); 中国博士后科学基金资助项目(20060401018); 重庆交通大学(桥梁)结构工程重点实验室开放基金资助项目(CQSLBF−Y11−5); 重庆交通大学博士启动基金资助项目(07−01−12).

总和达到最大时, 单节点链接失败概率的计算方法; 最后, 给出了一些导向性的结论.

2 网络化工程系统可靠度模型的建立(Constructing reliability model of networked engineering systems)

在大型工程系统集群化健康监测的实际应用中, 网络化集群系统中的节点A总是与固定的节点集合$\Theta=\{A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots\}$中的节点发生联系, 并且在一个固定的时刻该节点可以与集合Θ中的任意一个节点A_i发生联系. 如果集合中Θ中有n个节点$\{A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots,A_n\}$, 则节点$A$与这个节点集合中的第$i$个节点$A_i$发生联系的概率为$p_i$; 令与第$i$个节点$A_i$链接的情况下链接成功的概率为$(1-q_i)$, 链接不成功的概率为$q_i$, 则网络化工程系统的节点链接示意图如1所示.

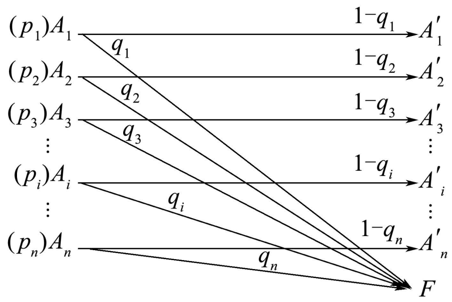

图 1 网络化工程系统节点链接示意图

Fig. 1 Node-linking structure of networked engineering systems

其中: A'_i表示节点A与第i个节点A_i链接成功的状态, F表示节点A与任意一个节点链接失败的状态. 特别地, 当$q_i=0$时, 图1就简化为无链接失败节点的网络化工程系统, 如图2所示.

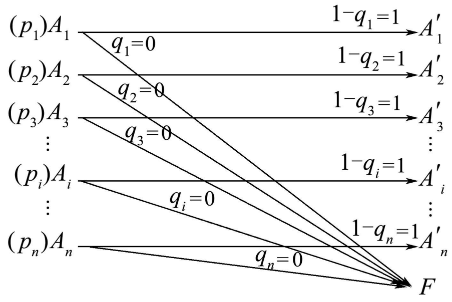

图 2 无链接失败的网络化工程系统节点链接示意图

Fig. 2 Node-linking structure of networked engineering systems without link fault

图1所示的模型可以用信息论中的离散信道数学模型来刻画: 输入信号集为

$$X=\{A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots,A_n\},$$

输出信号集为

$$Y=\{A'_1,A'_2,\cdots,A'_i,\cdots,A'_n,F\},$$

信源输出符号A_i的概率为p_i. 在输入符号A_i的情况下, 信宿接收到符号A'_i的概率为$(1-q_i)$; 接收到符号F的概率为q_i. 根据信息学理论[11], 网络化集群系统从Y中获得关于X的平均互信息$I(X;Y)$定义为

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y). \tag{1}$$

它表示网络化集群系统接收到输出信号Y之后消除关于X的平均不确定性的大小, 其中:

$$H(X)=\sum_X p(x)\log\frac{1}{p(x)},$$
$$H(X)=\sum_{X,Y} p(x,y)\log\frac{1}{p(x|y)}.$$

由于大型工程网络化集群健康监测系统的节点链接通道的信道容量越大, 则接收到输出信号Y之后系统消除的关于X的平均不确定性越多, 从而网络集群系统的可靠性越高. 反之, 网络集群系统的可靠性越小. 因此, 类似的网络化工程集群系统的可靠性可以用与信道容量相关的指标来衡量.

首先, 定义上述的网络集群系统节点链接信道的容量为

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}, \tag{2}$$

其中:

$$\begin{aligned}&I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=\\&\sum_X p(x)\log\frac{1}{p(x)}-\sum_{X,Y}p(x,y)\log\frac{1}{p(x|y)}=\\&-\sum_{i=1}^n p_i\log p_i+\sum_{i=1}^n(p_iq_i)\log(p_iq_i)-\\&(\sum_{i=1}^n p_iq_i)\log(\sum_{i=1}^n p_iq_i).\end{aligned} \tag{3}$$

一般而言, 如果任意两个固定节点的通信规模不同(即链接节点集合Θ中总数n不同), 信道容量就会出现差异, 但节点可靠性在某些情况下却可能达到一致. 即两个节点的规模分别为n_1和n_2, 且$n_1\neq n_2$, 信道容量

$$C_1=\log n_1\neq C_2=\log n_2,$$

可实际工程中却能使得节点的可靠度相同. 显然, 这对于大型工程的规模化集成健康监测来说显得并不合适. 因此, 为了协调这种冲突, 特定义规模为n的网络化集群系统任意节点的可靠度S为

$$S=\frac{C}{\log n}, \tag{4}$$

其中C对应网络的信道容量.

对于由r个节点组成的网络集成系统来说, 每一节点$A_j(j=1,2,\cdots,r)$都有一个与之对应的可靠度S_j, 而且在工程应用中每个节点链接的可信度存在差异. 那么, 网络系统整体可靠度D应根据节点权

值的动态变化来综合评价. 然而, 目前在役桥梁等工程的集群健康检测系统的结构十分复杂, 要赋予每个节点的动态权值非常困难. 因此, 为了分析方便, 本文将权值做简化处理, 赋予所有节点权值均为$\frac{1}{r}$, 定义由r个节点组成的网络系统整体可靠度D为

$$D=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{r}S_i, \tag{5}$$

其中S_i为第i个节点的可靠度.

由于信道容量C与输入信源的概率分布无关, 只与信道的统计特性有关, 而且对于某些特定的网络通道, 信道容量C并不随着输入信源的概率分布变化而改变. 那么, 上述定义的节点可靠度S与A_i的链接概率$p(x)$无关, 只依赖于第i个节点A_i的链接不成功的概率q_i. 因此, 在实际工程应用中, 只需要利用工程实验数据就可以通过式(5)的相对可靠度模型来刻画网络系统的可靠性, 进而为决策部门选择合适的集群监测措施提供技术支撑.

3　一些重要结果(Some important conclusions)

其一, 给定某节点的可靠度S和链接概率分布$p(x)$, 网络节点链接失败概率总和及单节点链接不成功概率计算方法:

定理 1　假定某个节点的可靠度S和链接的概率分布$p(x)$都已知, 则规模为n的网络集成系统达到既定可靠性标准的网络节点链接失败概率总和由

$$\sum_{i=1}^{n}\exp(\frac{M}{p_i}\cdot x)=1$$

确定, 各节点链接不成功的概率由

$$q_i=\frac{K}{p_i}\cdot\exp(\frac{M}{p_i}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i})=\frac{e^{(\frac{M}{p_i}\cdot H)}}{p_i\cdot H\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{e^{(\frac{M}{p_i}\cdot H)}}{p_i}}$$

计算确定, 其中

$$C+\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i=M,\ \sum_{i=1}^{n}p_iq_i=K,\ \sum_{i=1}^{n}q_i=\frac{1}{H}=\frac{1}{x}.$$

证　由于各节点的链接概率分布$p(x)$已知, 则链接规模大小是确定的, 假设为n. 则根据式(5)有

$$C=S\cdot\log n.$$

上述的极大值优化模型构建如下:

$$\begin{cases}\max\sum\limits_{i=1}^{n}q_i,\\ C=-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\ln p_i+\sum\limits_{i=1}^{n}(p_iq_i)\ln(p_iq_i)-\\ \quad(\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i)\ln(\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i).\end{cases} \tag{6}$$

令$C+\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\ln p_i=M$, 代入方程式(6)得

$$\begin{cases}\max\sum\limits_{i=1}^{n}q_i,\\ M=\sum\limits_{i=1}^{n}(p_iq_i)\ln(p_iq_i)-(\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i)\ln(\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i).\end{cases} \tag{7}$$

令

$$I(q_1,q_2,\cdots,q_n)=M-[\sum_{i=1}^{n}(p_iq_i)\ln(p_iq_i)-(\sum_{i=1}^{n}p_iq_i)\ln(\sum_{i=1}^{n}p_iq_i)],$$

则有

$$L=\sum_{i=1}^{n}q_i+\lambda I(q_1,q_2,\cdots,q_n).$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=1-\lambda p_i\ln(\frac{p_iq_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i})=0,\ i=1,\cdots,n, \tag{8}$$

则式(8)可改写为

$$q_i-\lambda p_iq_i\ln(\frac{p_iq_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i})=0,\ i=1,\cdots,n, \tag{9}$$

故而

$$\sum_{i=1}^{n}q_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}p_iq_i\ln(\frac{p_iq_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i})=0. \tag{10}$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}(p_iq_i)\ln(\frac{p_iq_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i})=M,$$

从而由式(10)得到$\lambda=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}{M}$. 代入式(8)得

$$1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}{M}p_i\ln(\frac{p_iq_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i})=0.$$

整理得

$$\frac{p_iq_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i}=\exp(\frac{M}{p_i}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}). \tag{11}$$

又因为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{p_iq_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i}=1,$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}\exp(\frac{M}{p_i}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i})=1. \tag{12}$$

令$1/(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i) = x$, 则有方程

$$\sum_{i=1}^{n} \exp(\frac{M}{p_i} \cdot x) = 1. \qquad (13)$$

由式(13)知道, 该方程有唯一解. 假设$x = H$, 则有$\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1/H$.

同理, 在式(11)中, 令$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i = K$, 整理得

$$\frac{p_i q_i}{K} = \exp(\frac{M}{p_i} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i}),$$

则有

$$q_i = \frac{K}{p_i} \cdot \exp(\frac{M}{p_i} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i}), \qquad (14)$$

整理得

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{K}{p_i} \cdot \exp(\frac{M}{p_i} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i}). \qquad (15)$$

将$H = 1/(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i)$代入式(15)得

$$\frac{1}{H} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K}{p_i} \cdot \exp(\frac{M}{p_i} \cdot H),$$

即

$$K = \frac{1}{H \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\exp(\dfrac{M}{p_i} \cdot H)}{p_i}}.$$

代入式(14)整理得

$$q_i = \frac{K}{p_i} \cdot \exp(\frac{M}{p_i} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i}) = \frac{\exp(\dfrac{M}{p_i} \cdot H)}{p_i \cdot H \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\exp(\dfrac{M}{p_i} \cdot H)}{p_i}}. \qquad (16)$$

由于M已知, 则通过式(13)和式(16)就可计算出$\sum\limits_{i=1}^{n} q_i$和$q_i$的值. 证毕.

例 1 已知某大型桥梁健康监测集群网络的规模为5, 各节点链接概率的分布为$p(x) = \{0.1139, 0.2626, 0.2574, 0.1152, 0.2509\}$, 某节点$A$的可靠度$S = 0.8$, 则由定理1可计算得到网络集群节点链接失败概率总和为0.808646.

注意, 此时所得到的结果并不能判断到底是$\max \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$还是$\min \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$, 需要进行对比才能得到.

例 2 已知某大型桥梁健康监测集群网络的规模为4, 某节点A的可靠度$S = 0.812236$, 当$q_i = q_j$ $(i \neq j)$时, $\sum\limits_{i=1}^{4} q_i = 4 \times (1 - S) = 0.7511$; 同时, 当链接转移概率矩阵$p = [0.1\ \ 0.25\ \ 0.3\ \ 0.15]$时, 其网络节点可靠度也为$S = 0.812236$, 此时$\sum\limits_{i=1}^{4} q_i = 0.8$, 由于$0.7511 < 0.8$, 所以当$q_i = q_j (i \neq j)$时, $\sum\limits_{i=1}^{4} q_i$为最小值.

特别地, 对于特殊情况可得到如下推论:

推论 1 当$q_i = q_j (i \neq j)$, 则有$q_i = 1 - C/H(x)$, 其中$C = S \cdot \ln n$, $H(x) = -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = n \cdot (1 - (C/H(x)))$, 那么

① 当$n \cdot (1 - \dfrac{C}{H(x)}) < \dfrac{1}{H}$时, 有$\dfrac{1}{H} = \max \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$, 则最小值必定在$q_i (i = 1, \cdots, n)$取值的边界上;

② 当$n \cdot (1 - \dfrac{C}{H(x)}) > \dfrac{1}{H}$时, 有$\dfrac{1}{H} = \min \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$, 则最大值必定在$q_i (i = 1, \cdots, n)$取值的边界上;

③ 当$n \cdot (1 - \dfrac{C}{H(x)}) = \dfrac{1}{H}$时, 则无法判断$\dfrac{1}{H}$到底为$\max \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$还是$\min \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$.

其二, 给定某节点的可靠度S, 网络节点链接失败概率总和及单节点链接不成功概率计算方法:

引理 1 令

$$\bar{I}(Q) = \max_{p(x)} -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i + \sum_{i=1}^{n} (p_i q_i) \ln(p_i q_i) - (\sum_{i=1}^{n} p_i q_i) \ln(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i),$$

其中$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$, 且$0 \leqslant Q \leqslant 1$, 则$\bar{I}(Q)$为严格单调减函数.

证 1) 证明当$Q_1 \neq Q_2$时, $\bar{I}(Q_1) \neq \bar{I}(Q_2)$.

反证法: 设存在两个数Q_1和Q_2, 且$Q_1 > Q_2$, 使得$\bar{I}(Q_1) = \bar{I}(Q_2)$, 由微分中值定理, 必存在$Q_3$ $(Q_1 > Q_3 > Q_2)$使得$\dfrac{\partial \bar{I}(Q_3)}{\partial Q_3} = 0$, 即

$$p_i \ln(\frac{p_i q_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i}) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

则$p_i = 0$或$p_i q_i / \sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i = 1$.

那么, 当$q_i (i = 1, \cdots, n)$中只有一个$q_k = 1 (n \geqslant k \geqslant 1)$时, $q_j = 0 (j \neq k)$. 这与$1 \geqslant Q_1 \geqslant Q_3 \geqslant Q_2 \geqslant 0$且$q_i \neq 1$矛盾.

所以, 当$Q_1 \neq Q_2$时, $\bar{I}(Q_1) \neq \bar{I}(Q_2)$.

2) 再证当$Q_1 < Q_2$时, $\bar{I}(Q_1) > \bar{I}(Q_2)$.

反证法: 设存在两个数Q_1和Q_2, 且$Q_1 < Q_2$, 使得$\bar{I}(Q_1) \leqslant \bar{I}(Q_2)$. 由于$\bar{I}(Q)$是关于$Q$的连续函数, 且$\bar{I}(1)=0$, 则在$[Q_2,1]$必存在一个$Q_3$使得$\bar{I}(Q_1)=\bar{I}(Q_3)$, 且满足$Q_1 < Q_2 \leqslant Q_3$. 这与1)矛盾.

所以, 当$Q_1 < Q_2$时, $\bar{I}(Q_1) > \bar{I}(Q_2)$.

综合1)和2), 结论成立. 证毕.

定理 2 假定某节点的可靠度S已知, 令

$$\bar{I}(Q)=\max_{p(x)}-\sum_{i=1}^{n}p_i\ln p_i+\sum_{i=1}^{n}(p_iq_i)\ln(p_iq_i)-(\sum_{i=1}^{n}p_iq_i)\ln(\sum_{i=1}^{n}p_iq_i),$$

其中$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$, 且$0 \leqslant Q \leqslant 1$, 则

$$\frac{\partial\bar{I}(Q)}{\partial q_i}=p_i\ln(\frac{p_iq_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i}),$$

其中p_i是$\bar{I}(Q)$达到最大值时$p(x)$的分量.

证 令$Q_1=\{q_1,\cdots,q_i,\cdots,q_n\}$, $Q_2=\{q_1,\cdots,q_i+\Delta t,\cdots,q_n\}$, $\bar{I}(Q_1)$取得最大值其分布为$p(x)=p_1(x)=\{p_{11},p_{12},\cdots,p_{1n}\}$, $I(Q_2)$取得最大值其分布为

$$p(x)=p_2(x)=\{p_{21},p_{22},\cdots,p_{2n}\},$$

$$I(p(x),Q)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\ln p_i+\sum_{i=1}^{n}(p_iq_i)\ln(p_iq_i)-(\sum_{i=1}^{n}p_iq_i)\ln(\sum_{i=1}^{n}p_iq_i),$$

则有$I(p_1(x),Q_1)=\bar{I}(Q_1), I(p_2(x),Q_2)=\bar{I}(Q_2)$, 即

$$I(p_2(x),Q_1)\leqslant\bar{I}(Q_1),\ I(p_1(x),Q_2)\leqslant\bar{I}(Q_2),$$

那么

$$I(p_2(x),Q_2)-I(p_2(x),Q_1)\geqslant\bar{I}(Q_2)-\bar{I}(Q_1)\geqslant I(p_1(x),Q_2)-I(p_1(x),Q_1). \tag{17}$$

由微分中值定理有

$$I(p_2(x),Q_2)-I(p_2(x),Q_1)=\frac{\partial I(p_2(x),Q')}{\partial q_i}=p_{2i}\ln(\frac{p_{2i}q_i'}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{2i}q_i'})\cdot\Delta t, \tag{18}$$

且$Q_2 > Q' > Q_1$, $Q'=(q_1,q_2,\cdots,q_i',\cdots,q_n)$, $q_i+\Delta t > q_i' > q_i$.

同理得

$$I(p_1(x),Q_2)-I(p_1(x),Q_1)=\frac{\partial I(p_1(x),Q'')}{\partial q_i}=p_{1i}\ln(\frac{p_{1i}q_i''}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{1i}q_i''})\cdot\Delta t, \tag{19}$$

且$Q_2 > Q'' > Q_1$, $Q''=(q_1,q_2,\cdots,q_i'',\cdots,q_n)$, $q_i+\Delta t > q_i'' > q_i$. 由式(17)得

$$\frac{I(p_2(x),Q_2)-I(p_2(x),Q_1)}{\Delta t}\geqslant\frac{\bar{I}(Q_2)-\bar{I}(Q_1)}{\Delta t}\geqslant\frac{I(p_1(x),Q_2)-I(p_1(x),Q_1)}{\Delta t}.$$

将式(18)–(19)代入上式可得

$$p_{2i}\ln(\frac{p_{2i}q_i'}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{2i}q_i'})\geqslant\frac{\bar{I}(Q_2)-\bar{I}(Q_1)}{\Delta t}\geqslant p_{1i}\ln(\frac{p_{1i}q_i''}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{1i}q_i''}).$$

对上式两边取极限, 可得

$$\lim_{\Delta t\to0}p_{2i}\ln(\frac{p_{2i}q_i'}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{2i}q_i'})\geqslant\lim_{\Delta t\to0}\frac{\bar{I}(Q_2)-\bar{I}(Q_1)}{\Delta t}=\frac{\partial\bar{I}(Q_1)}{\partial q_i}\geqslant\lim_{\Delta t\to0}p_{1i}\ln(\frac{p_{1i}q_i''}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{1i}q_i''}). \tag{20}$$

当$\Delta t\to0$时, 有$Q'\to Q_1$, $Q''\to Q_1$, $p_2(x)\to p_1(x)$, 则

$$\lim_{\Delta t\to0}p_{2i}\ln(\frac{p_{2i}q_i'}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{2i}q_i'})=p_{1i}\ln(\frac{p_{1i}q_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{1i}q_i}), \tag{21}$$

$$\lim_{\Delta t\to0}p_{1i}\ln(\frac{p_{1i}q_i''}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{1i}q_i''})=p_{1i}\ln(\frac{p_{1i}q_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{1i}q_i}). \tag{22}$$

将式(21)–(22)代入式(20)可得

$$p_{1i}\ln(\frac{p_{1i}q_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{1i}q_i})\geqslant\frac{\partial\bar{I}(Q_1)}{\partial q_i}\geqslant p_{1i}\ln(\frac{p_{1i}q_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{1i}q_i}),$$

即

$$\frac{\partial\bar{I}(Q_1)}{\partial q_i}=p_{1i}\ln(\frac{p_{1i}q_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{1i}q_i}).$$

从而得到$\dfrac{\partial\bar{I}(Q)}{\partial q_i}=p_i\ln(\dfrac{p_iq_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i})$. 证毕.

推论 2 对于满足上述条件的网络系统, 求解链接失败最大概率及最小概率和以及单节点链接失败概率由以下的极值方程组确定:

$$\begin{cases}\max\min\sum\limits_{i=1}^{n}q_i,\\ C=\max\limits_{p(x)}-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\ln p_i+\sum\limits_{i=1}^{n}(p_iq_i)\ln(p_iq_i)-\\ \quad(\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i)\ln(\sum\limits_{i=1}^{n}p_iq_i),\\ C=S\cdot\ln n.\end{cases}$$

推论 3 当$q_i=q_j(i\neq j)$, 当且仅当$p(x)$为均匀分布, 即$p_i=\dfrac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$时, $C=(1-q)$

$H(x)$取得最大值. 其中$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \doteq \ln n$, 且满足

$$\begin{cases} 1 - \lambda p_i \ln(\dfrac{p_i q_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j q_j}) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n, \\ C = \max\limits_{p(x)} -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln p_i + \sum\limits_{i=1}^{n} (p_i q_i) \ln(p_i q_i) - \\ \quad (\sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i) \ln(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i). \end{cases}$$

推论 4 当$q_i = q_j (i \neq j), p_i = \dfrac{1}{n} (i = 1, 2, \cdots, n)$时, 对于任意一个$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$, 如果满足

$$\bar{I}(Q) = \max_{p(x)} -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i + \sum_{i=1}^{n} (p_i q_i) \ln(p_i q_i) - (\sum_{i=1}^{n} p_i q_i) \ln(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i),$$

则必有$q = q_i = 1 - C/\ln n, i = 1, 2, \cdots, n$.

4 结论(Conclusion)

大型工程网络化集群健康监测系统本身的安全性对于大型工程健康监测及可靠性评价的实际应用起着越来越重要的支持作用, 特别是带着些微故障的网络化集群系统的可靠性评价工作显得尤为困难. 为了解决这个问题, 本文作者基于信道容量的相关概念定义了网络化集成系统的相对可靠度模型的概念, 刻画了单节点可靠度已知时网络链接失败概率总和及单节点失败概率的计算方法, 并在分布概率给定的条件下, 结合单节点可靠度已知的条件, 讨论了网络链接失败概率总和以及单节点失败概率的计算方法, 得到了一些有益的结果.

然而, 这仅仅是理论上的一些结论, 对于在役桥梁、道路设施、交通路网等工程集群化健康监测的实际需要来说, 还有很大差距. 特别是在实际工程应用中, 由于信道容量的大小和信息的反馈并不具备精确的正相关关系, 故而本文所提出的网络集群监测系统的可靠度刻画模型会存在些微误差. 而这种误差会给系统可靠度的综合评判造成误导, 必然会给工程应用带来一定的损失. 因此, 需要进一步深入研究网络化集群监测系统的结构和机理, 构建更加合理的可靠性评价模型.

而且, 由于大型工程集群化健康监测的影响众多, 比如随机因素的互信息, 数据采集过程中“异变”等等, 这些会导致网络化集成系统的崩溃. 故而, 如何考虑这些繁杂的因子, 得到更加合理的结论, 为大型工程的健康监测提供合理的技术支撑, 是工程和理论研究人员比较关心的问题. 目前, 笔者正在做进一步的研究, 限于篇幅, 将另文给出.

参考文献(References):

[1] GUPTA R A, CHOW M Y. Networked control system: overview and research trends[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, 57(6): 2527 – 2535.

[2] MAO Z H, JIANG B, SHI P. Observer based fault-tolerant control for a class of nolinear networked control systems[J]. *Journal of the Franklin Institute–Engineering and Applied Mathematic*, 2010, 374(6): 940 – 956.

[3] MAO Z H, JIANG B, SHI P. Fault detection for a class of nolinear networked control systems[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2010, 24(7): 610 – 622.

[4] YANG C X, GUAN Z H, HUANG J. Stochastic fault tolerant control of networked control systems[J]. *Journal of the Franklin Institute–Engineering and Applied Mathematic*, 2009, 346(10): 1006 – 1020.

[5] HE X, WANG Z D, ZHOU D H. Robust detection for networked systems with communicaiton delay and data missing[J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2634 – 2639.

[6] HE X, WANG Z D, ZHOU D H. Network-based robust fault detection with incomplete measurements[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2009, 23(8): 737 – 756.

[7] AI-DABBAGH A W, LU L X. Reliability modeling of networked control systems using dynamic floograph methodology[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2010, 95(11): 1202 – 1209.

[8] YANG D D, CAI K Y. Reliable H_∞ nonuniform sampling fuzzy control for nolinear systems with time delay[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2008, 38(6): 1606 – 1613.

[9] 费为银, 丁德锐, 夏登峰. 不确定系统D稳定与方差约束的鲁棒H_∞可靠控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(5): 917 – 919.
(FEI Weiyin, DING Derui, XIA Dengfeng. H-infinity control of uncertain systems with D-stability and variance constraints[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(5): 917 – 919.)

[10] TIAN E, YUE D, PENG C. Reliable control for networked control systems with probabilistic sensors and actuators faults[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(8): 1478 – 1488.

[11] 傅祖芸. 信息论—–基础理论与应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2007.
(FU Zuyun. *Information Theory — Fundation Theory and Application*[M]. Beijing: Electric Engineering Press, 2007.)

作者简介:

黄大荣 (1978—), 男, 博士, 副教授, 目前主要研究方向为可靠性工程、故障诊断及预测、容错控制, E-mail: hcx1978@163.com;

汪 鹏 (1984—), 男, 硕士研究生, 目前主要研究方向为可靠性工程, E-mail: apener1984@126.com;

朱 波 (1986—), 男, 硕士研究生, 目前主要研究方向为可靠性工程, E-mail: cqjtdxzhubo@yahoo.com.cn.