

## 自适应噪声定界的改进集员辨识算法

周波, 戴先中

(复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

**摘要:** 集员辨识所需的系统噪声边界在现实应用中往往难于精确确定, 通常采取的过估边界将导致算法性能的退化. 本文针对缺乏足够先验噪声边界知识下的集员辨识问题进行了相应的研究, 通过对输入干扰和测量误差的有界假设, 将系统噪声边界建模为一个依赖于模型参数的时变量, 由此提出了一种根据估计参数自适应调定噪声边界的改进最优定界椭圆辨识算法, 避免了过估噪声边界假设引起的保守性增大的缺陷, 提高了算法的收敛速度. 仿真中将本文提出的改进算法和带固定过估噪声边界的原始算法进行了比较, 表明了该方法的有效性.

**关键词:** 集员辨识; 未知但有界误差; 最优定界椭圆; 噪声调定

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## Improved set-membership identification algorithm with adaptive noise bounding

ZHOU Bo, DAI Xian-zhong

(Key Laboratory of Measurement and Control of Complex Systems of Engineering of Ministry of Education, School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

**Abstract:** In the set-membership identification (SMI), it is difficult to precisely determine the bounds of the system noise in most real applications. The widely used over-estimated bounds will deteriorate the performance of the algorithm. We investigate this problem when the a priori knowledge of the noise bound is insufficient. Under the assumptions of bounded system inputs and measurement errors, we model the noise bound as a time-varying variable depending on some model parameters. We propose an enhanced optimal bounding ellipsoid (OBE) identification algorithm with adaptive bound-tuning to adjust the noise bound based on the estimated parameters, which prevents the increased conservatism from the overestimated bound assumption and improves the convergence rate of the algorithm. Simulation results show higher effectiveness of the proposed algorithm than that of the conventional algorithm with fixed over-estimated noise bound.

**Key words:** set-membership identification; unknown-but-bounded noise; optimal bounding ellipsoid; noise-tuning

### 1 引言(Introduction)

传统的系统辨识问题是在给定系统模型结构的前提下, 利用输入数据和系统响应的输出数据, 按照一定的优化准则(例如最小二乘准则)估计模型中存在的未知参数的过程. 然而实际应用中的输入数据和输出的观测数据往往都存在着不确定性, 因此在利用这些数据进行参数辨识时, 必须考虑各种不确定性的影响. 目前的主流方法是模型中存在的未知参数假定为满足某种概率分布假设的随机过程, 从而可采用常规的随机概率估计方法, 例如Kalman滤波<sup>[1]</sup>或粒子滤波<sup>[2]</sup>等, 来对系统参数进行估计. 此类概率辨识方法的主要缺陷在于所需的概率分布假设在现实很难得到满足, 由此导致了基于更为合理的未知但有界噪声(unknown-but-bounded, UBB)假设的集员辨识方法的广泛应用<sup>[3]</sup>.

与概率辨识方法相比, 集员辨识(SMI)方法无需

太多的先验条件, 仅仅要求噪声满足UBB假设, 这一点在实际系统中通常能够得到保证. 另一方面, 集员辨识方法并非估计单独的一个参数值, 而是能够获得保证包含真实模型参数的可行解集, 从而可提供参数的严格边界估计, 便于实现与鲁棒控制方法和最优规划方法的结合. 大体上集员辨识方法可根据可行解集的近似形式分类为棱正交体定界方法<sup>[4]</sup>、椭圆定界方法<sup>[5-6]</sup>、超平行体定界方法<sup>[7]</sup>和全对称多胞形定界方法<sup>[8-9]</sup>等等, 其中椭圆算法以其形式简洁和便于计算的优点应用最广泛. 椭圆定界辨识方法具有统一的形式<sup>[3]</sup>, 然而参数的选择随优化准则的选取各不相同, 例如最小椭圆体积方法、最小椭圆迹方法以及最小性能指标上界方法等等<sup>[5-6]</sup>.

上述集员辨识方法大都针对噪声边界已知的情形, 然而对于现实中大多数应用来说, 噪声边界一般很难精确确定, 如果采用过估计的方法将会导致算

法的性能出现退化. 为了解决这个问题, 有必要对噪声自身的边界进行估计<sup>[10-11]</sup>. 由此, 本文提出了一种基于自适应噪声定界机制的改进集员辨识算法, 通过对输入数据和测量数据的有界误差假设, 将噪声边界表示为一个与待估参数相关的变量, 从而可自适应地对噪声边界进行估计和调节, 克服了传统集员辨识方法采用过估边界带来的性能退化问题.

## 2 椭球集员辨识方法(Ellipsoidal SMI)

### 2.1 集员辨识框架(Uniform framework of SMI)

考虑具有如下参数线性化形式的SISO线性回归系统模型:

$$y_k = a_1 y_{k-1} + \dots + a_p y_{k-p} + b_0 u_k + \dots + b_q u_{k-q} + \epsilon_k, \quad (1)$$

其中:  $a_1, a_2, \dots, a_p$  和  $b_0, b_1, \dots, b_q$  为  $n = p + q + 1$  个需要辨识的未知模型参数;  $\{u_k, k = 1, 2, \dots\}$  为输入量序列;  $\{y_k, k = 1, 2, \dots\}$  为输出的观测序列;  $\{\epsilon_k, k = 1, 2, \dots\}$  为模型干扰或噪声序列, 且满足如下的有界误差条件:

$$|\epsilon_k| \leq \gamma_k. \quad (2)$$

如果令

$$\mathbf{x}_k = [y_{k-1} \ \dots \ y_{k-p} \ u_k \ \dots \ u_{k-q}]^T, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1 \ \dots \ a_p \ b_0 \ \dots \ b_q]^T, \quad (4)$$

则可将式(1)转化为如下的模型辨识标准形式:

$$y_k = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}_k + \epsilon_k, \quad (5)$$

其中:  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$  为需要辨识的未知参数矢量, 而  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  为由已知的输入量和输出量构成的观测矢量.

集员辨识的基本思想即在有界误差假设下, 在参数空间求解一个与输入数据序列  $\{u_k\}$ 、测量数据序列  $\{y_k\}$  和噪声边界条件(2)相一致的可行解集(feasible solution set, FSS). 从上文可以得出, 参数在  $k$  时刻观测得到的可行解集具有如下的带(strip)形式:

$$S_k = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n \mid \|y_k - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}_k\| \leq \gamma_k\}. \quad (6)$$

现假设参数的先验信息为  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ , 其中  $\Theta_0$  为参数空间的一个有界集合, 则参数在  $k$  时刻的可行解集由  $\Theta_0$  和所有带  $S_i (i = 1, 2, \dots, k)$  的交集构成, 即有

$$\text{FSS}_k = \Theta_0 \cap \left( \bigcap_{i=1}^k S_i \right). \quad (7)$$

上式可通过迭代的方式进行求解. 在一定条件下, 随着样本容量的增大, 可行解集会逐渐收敛于真实参数值或其附近的一个邻域, 则可称集员辨识方法是收敛的.

### 2.2 最优定界椭球集员辨识(OBE based SMI)

考虑到可行解集  $\text{FSS}_k$  的形状一般无法确定, 甚至可能是非凸的, 因此直接对其进行计算比较困难.

一种替代方案是采用规则集合来近似可行集, 例如棱正交体、椭球、超平行体和全对称多胞形等等. 其中椭球方法由于其计算的简便性使用最为广泛, 其基本思想是采用如下形式的椭球对可行解集进行外包近似:

$$\text{FSS}_k \subseteq E(\boldsymbol{\theta}_k, P_k) = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_k)^T P_k^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_k) \leq 1\}, \quad (8)$$

其中:  $\boldsymbol{\theta}_k$  为椭球中心, 一般视为参数的点估计结果; 包络矩阵  $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  决定椭球的形状, 且需要满足对称正定性. 此外可定义协方差矩阵为  $C_k = P_k^{-1}$ . 由此参数的可行解集可通过迭代形式的最优定界椭球方法进行求解.

设  $k-1$  时刻的参数可行解集为  $E(\boldsymbol{\theta}_{k-1}, P_{k-1})$ , 则  $k$  时刻的参数可行解集  $E(\boldsymbol{\theta}_k, P_k)$  可计算如下<sup>[3]</sup>:

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \lambda_k P_k \mathbf{x}_k e_k, \quad (9)$$

$$P_k = \frac{\kappa_k}{\alpha_t} \left[ P_{k-1} - \frac{\lambda_k P_{k-1} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T P_{k-1}}{\alpha_k + \lambda_k G_k} \right], \quad (10)$$

其中:

$$G_k = \mathbf{x}_k^T P_{k-1} \mathbf{x}_k, \quad (11)$$

$$e_k = y_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1}^T \mathbf{x}_k, \quad (12)$$

$$\kappa_k = \alpha_k \kappa_{k-1} + \lambda_k \gamma_k^2 - \frac{\alpha_k \lambda_k e_k^2}{\alpha_k + \lambda_k G_k}, \quad (13)$$

而协方差矩阵的更新形式为

$$C_k = P_k^{-1} = \alpha_k C_{k-1} + \lambda_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T. \quad (14)$$

OBE算法的初值一般可根据  $\Theta_0$  的外包椭球参数进行选取. 当  $\Theta_0$  未知时一种保守的选取方式为

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}, \quad \kappa_0 = 1, \quad P_0 = \frac{1}{\mu} I, \quad (15)$$

其中:  $I$  表示  $n$  维单位矩阵;  $\mu$  为一个较小的正数, 一般取值为  $\mu = 10^{-4}$ .

需要注意的是OBE算法中存在两个参数  $\alpha_k$  和  $\lambda_k$ , 其选取关系到最终可行解集的大小, 因此需要根据某种椭球优化准则进行求解, 例如最小体积椭球准则  $\min \det(P_k)$ 、最小迹椭球准则  $\min \text{tr}(P_k)$  和最小性能指标上界优化准则  $\min \sup(\kappa_t)$  等优化原则. 详细的计算过程可参考文献[5-6].

## 3 自适应噪声定界(Adaptive noise bounding)

现实中可获取的噪声边界的先验知识往往并不是完备的, 导致噪声的边界很难精确确定. 一般可采用过估计的方法对噪声边界作出远大于实际情况的假设. 这种过估计方法会大大影响集员辨识算法的性能, 使可行解集的保守性增大, 并降低算法的收敛速度. 为此本文考虑对系统噪声边界  $\gamma$  进行自适应估计和调节, 一个较为合理的假设是噪声边界依赖于

模型参数, 即

$$|\epsilon_k| \leq \gamma_k(\theta). \quad (16)$$

辨识模型中的系统噪声 $\epsilon_k$ 一般来源于系统的输入噪声、测量噪声和模型误差. 这里为了简化问题, 仅仅考虑只存在输入噪声和测量噪声的情形, 两者在实际应用中可根据执行器和传感器的物理性能而获得较为准确的边界. 对于可加性输入噪声的情形, 假设存在输入噪声 $v_k$ , 使得 $u'_k = u_k + w_k$ , 其中输入噪声满足如下有界条件:

$$|w_k| \leq \beta_k. \quad (17)$$

对于测量噪声, 则可将其假设为有界噪声

$$|v_k| \leq \eta_k. \quad (18)$$

将上面两个假设条件代入系统模型(1)得到

$$y_k = \theta^T x_k + \epsilon'_k, \quad (19)$$

其中真实系统噪声 $\epsilon'_k$ 由两部分构成

$$\epsilon'_k = b_0 w_k + \cdots + b_q w_{k-q} + v_k = \theta_{p+1:n}^T [w_k \cdots w_{k-q}]^T + v_k, \quad (20)$$

式中 $\theta_{p+1:n}$ 表示由参数的后 $q+1$ 个分量组成的矢量. 上式表明了系统噪声 $\epsilon'_k$ 的边界并不是固定的, 而是依赖于待估计的参数, 即验证了假设(16)的合理性. 进一步推导可得

$$\begin{aligned} |\epsilon'_k| &= |b_0 w_k + \cdots + b_q w_{k-q} + v_k| \leq \\ &|b_0| |w_k| + \cdots + |b_q| |w_{k-q}| + |v_k| \leq \\ &\beta_k (|b_0| + \cdots + |b_q|) + \eta_k. \end{aligned} \quad (21)$$

从而将原问题转化为求如下的优化问题求解:

$$\begin{aligned} \max \|\theta_{p+1:n}\|_1 &= |b_0| + \cdots + |b_q|, \\ \text{s.t. } \theta &\in E(\theta^*, P^*), \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $E(\theta^*, P^*)$ 表示参数的可行椭球解集, 在迭代中可采用当前参数可行椭球解集 $E(\theta_k, P_k)$ 来表示, 从而每一步迭代的噪声边界可以通过求解上述半定优化(semidefinite programming, SDP)问题<sup>[12]</sup>进行估计. 本文给出了一种近似边界估计方法如下.

根据 $k$ 时刻的参数估计椭球, 可得到各个参数分量的边界为(对于 $j = 0, 1, \cdots, q$ )

$$b_{k,j} - \sqrt{d_{k,j}} \leq b_j \leq b_{k,j} + \sqrt{d_{k,j}}, \quad (23)$$

其中:  $b_{k,j}$ 为 $k$ 时刻椭球中心的第 $p+j+1$ 个分量, 而 $d_{k,j}$ 为对应包络矩阵 $P_k$ 的第 $j$ 个对角线元素. 进而有

$$\begin{aligned} b_{k,j}^* &= \max\{|b_{k,j}|\} = \\ &\begin{cases} b_{j,\max}, & b_{j,\min} \geq 0, \\ \text{abs}(b_{j,\min}), & b_{j,\max} \leq 0, \\ \min(\text{abs}(b_{j,\min}), b_{j,\max}), & \text{其他}, \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

其中:

$$b_{j,\min} = b_{k,j} - \sqrt{d_{k,j}}, \quad b_{j,\max} = b_{k,j} + \sqrt{d_{k,j}}.$$

从而可取系统噪声的自适应边界为

$$\gamma_k(\theta) = \beta_k (b_{k,0}^* + \cdots + b_{k,q}^*) + \eta_k. \quad (25)$$

通过式(25), 系统噪声的边界可根据当前的参数估计进行自适应调定, 从而降低了可行解集的保守性, 提高了算法的收敛速度. 由于参数的可行解集将最终收敛于真实参数值或者附近的一个邻域, 因此根据式(25), 系统噪声的边界估计也必将收敛于真实值或者其附近的一个邻域, 从而保证了本噪声边界自适应调整算法的收敛性.

#### 4 仿真实验(Simulation experiments)

仿真中考虑如下的SISO系统:

$$y_k = -y_{k-1} + u_k + \epsilon_k, \quad (26)$$

其中真实参数值为 $\theta = (-1, 1)^T$ ; 输入量 $u_k$ 为一个高斯分布 $N[0, 1]$ 产生的随机信号; 测量噪声假设为 $[-1, 1]$ 上的均匀分布, 即有 $\eta_k = 1$ ; 输入噪声为零均值的均匀分布, 其边界分 $\beta_k = 0.01, 0.1, 1$ 这3个级别分别进行仿真; 初始输出测量值设为 $y_1 = 0.2, y_2 = 0.4$ ; 真实的系统误差 $\epsilon'_k = w_k + v_k$ 为边界值等于 $\beta_k + \eta_k$ 的零均值均匀分布. 仿真中将本文提出的具有自适应噪声边界调整机制的改进集员辨识方法(adptive SMI, ASMI)与传统的具有固定过估计系统噪声边界的集员辨识方法(SMI)进行比较, 两种辨识方法的初始取值按式(15)进行设定, 噪声的过估计边界值取为 $\gamma_k = 2(\beta_k + \eta_k)$ . 仿真中的迭代总步数为 $N = 5000$ .

图1-6给出了 $\beta_k = 0.01$ 时两种方法的比较结果, 包括参数 $\theta_2$ 估计值(取椭球中心为估计值)和边界的比较、算法收敛性的比较、性能指标 $\kappa_k$ 的比较以及最终得到的可行解集的比较. 其它不同 $\beta_k$ 值的比较结果与之类似. 相应的定量比较例如参数估计的最小均方差(MSE)、迭代时间和可行解椭球体积 $V$ 的比较如表1所示, 其结果取20次计算的平均值.

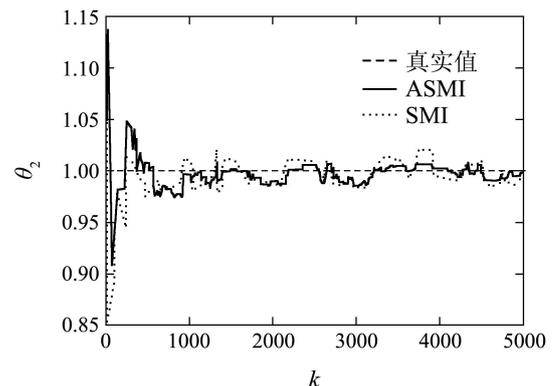


图1 参数估计

Fig. 1 Parameter estimation

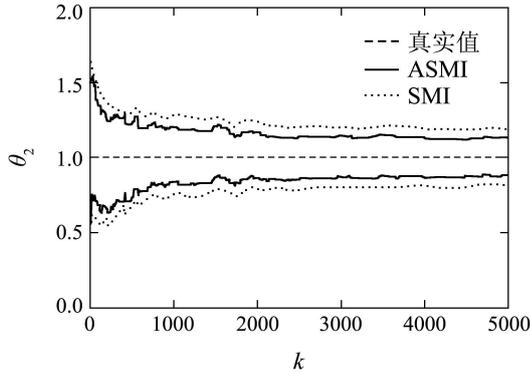


图2 参数边界估计

Fig. 2 Parameter bounds estimation

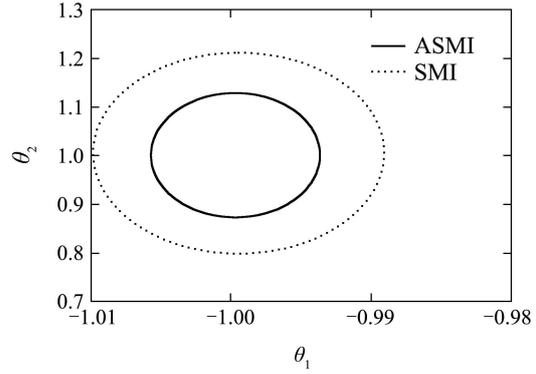


图6 可行解集比较

Fig. 6 Feasible sets comparison

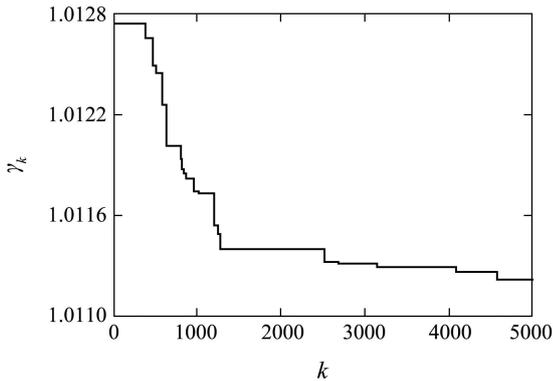


图3 ASMI的噪声边界调定

Fig. 3 Noise bounds tuning of ASMI

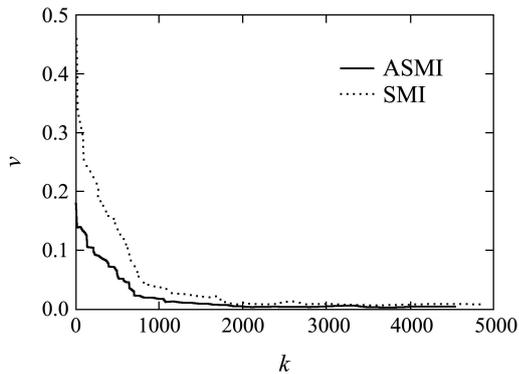


图4 收敛性比较

Fig. 4 Convergence comparison

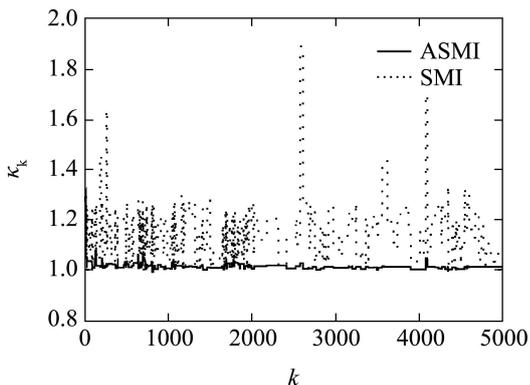


图5 性能指标比较

Fig. 5 Performance index comparison

表1 ASMI和SMI比较

Table 1 Comparison between ASMI and SMI

$\beta_k$	算法	MSE( $\theta_1$ )	MSE( $\theta_2$ )	时间/s	体积V
0.01	SMI	0.0009	0.0011	0.2322	0.0058
0.01	ASMI	0.0005	0.0006	0.2394	0.0021
0.1	SMI	0.0013	0.0021	0.2415	0.0055
0.1	ASMI	0.0008	0.0009	0.2427	0.0032
1	SMI	0.0027	0.0022	0.2436	0.0081
1	ASMI	0.0012	0.0016	0.2456	0.0044

从上述比较来看,两种方法均能够逐渐收敛到真实参数,且所需要的迭代时间基本相当,从算法来看,两者的时间复杂度相同,但ASMI算法由于其采用的噪声边界自适应调定导致迭代时间略高.从图3中可观察到ASMI对噪声边界 $\gamma_k$ 的估计逐渐收敛于真实值 $\beta_k + \eta_k$ ,表明了参数自适应机制的有效性,由此带来的ASMI方法相对于SMI的优越性主要体现在:①可行解集具有更低的保守性,表现在参数边界更小(见图2)、每步迭代得到的椭球体积更小(见图4),且最终可行解集体积更小(见图6和表1的体积比较);②ASMI估计得到的参数的MSE往往优于SMI(见表1的参数MSE比较),注意这是20次运行结果取平均得到的结论,单个运行结果并不能保证这一点.另外需要注意的是,对于集员方法而言,椭球内的各个可能的估计点均为等概率的,这里的参数估计结果取的是椭球的中心点,事实上椭球的边界估计结果更有意义;③ASMI算法的性能指标 $\kappa_k$ 要优于SMI,其值更小且更为稳定(见图5);④ASMI算法的收敛速度更快(见图4).这些方面的比较均表明了本文所提出的方法的有效性和相对于传统方法的优越性.

### 5 结论(Conclusion)

本文提出了一种带有自适应噪声边界调整机制的集员辨识方法,通过对噪声来源的分析将其边界值表达为依赖于参数的时变量,从而使得估计得到的噪声边界收敛于真实的系统噪声,克服了传统方

法由于噪声边界过估所引起的性能退化问题, 改进了可行解集的保守性和收敛速度. 由于现实应用中的输入噪声和观测噪声往往能够根据执行器和传感器准确确定, 因此本文中所提出的噪声来源假设和相应的噪声自适应调定机制较之过估计更为合理, 改进了常规集员辨识的性能, 具有很好的实用性.

### 参考文献(References):

- [1] BAR-SHALOM Y, LI X R, KIRUBARAJAN T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*[M]. New York: Willey, 2002.
- [2] ARULAMPALAM M S, MASKELL S, GORDON N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(2): 174 – 188.
- [3] DELLER J R, GOLLAMUDI S, NAGARAJ S, et al. Convergence analysis of the quasi-OBE algorithm and related performance issues[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2007, 21(6): 499 – 527.
- [4] KIEFFER M, JAULIN L, WALTER E. Guaranteed recursive nonlinear state bounding using interval analysis[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, 16(3): 193 – 218.
- [5] JOCACHIM D, DELLER J R. Multi-weight optimization in optimal bounding ellipsoid algorithms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(2): 679 – 690.
- [6] ZHOU B, HAN J D, LIU G J. A UD factorization-based nonlinear adaptive set-membership filter for ellipsoidal estimation[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, 18(16): 1513 – 1531.
- [7] CHISCI L, GARULLI A, VICINO A, et al. Block recursive parallelotopic bounding in set membership identification[J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 15 – 22.
- [8] ALAMO T, BRAVO J M, REDONDO M J, et al. A set-membership state estimation algorithm based on DC programming[J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 216 – 224.
- [9] 柴伟, 孙先仿. 改进的全对称多胞形集员状态估计算法[J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(2): 273 – 277.  
(CHAI Wei, SUN Xianfang. An improved estimation algorithm for set membership states by zonotopes[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(2): 273 – 277.)
- [10] GUO L, HUANG Y F. Set-membership adaptive filtering with parameter-dependent error bound tuning[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. New York: IEEE, 2005, 4: 369 – 372.
- [11] LIN T M, NAYERI M, DELLER J R. A consistently convergent OBE algorithm with automatic estimation of error bounds[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Process*, 1998, 12(4): 305 – 324.
- [12] VANDENBERGHE L, BOYD S. Semidefinite programming[J]. *SIAM Review*, 1996, 38(1): 49 – 95.

### 作者简介:

周波 (1981—), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为非线性辨识和估计、机器人技术等, E-mail: zhoubo@seu.edu.cn;

戴先中 (1954—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为复杂非线性系统控制、电力系统控制和机器人技术等, E-mail: xzdai@seu.edu.cn.