

# 计算机数控系统光滑时间最优轨迹规划

李树荣, 张 强

(中国石油大学(华东) 信息与控制工程学院, 山东 青岛 266555)

**摘要:** 基于控制向量参数化(CVP)方法, 研究了计算机数控(CNC)系统光滑时间最优轨迹规划方法. 通过在规划问题中引入加加速度约束, 实现轨迹的光滑给进. 引入时间归一化因子, 将加加速度约束的时间最优轨迹规划问题转化为固定时间的一般性最优控制问题. 以路径参数对时间的三阶导数(伪加加速度)和终端时刻为优化变量, 并采用分段常数近似伪加加速度, 将最优控制问题转化为一般的非线性规划(NLP)问题进行求解. 针对加加速度、加速度等过程不等式约束, 引入约束凝聚函数, 将过程约束转化为终端时刻约束, 从而显著减少约束计算. 构造目标和约束函数的Hamiltonian函数, 利用伴随方法获得求解NLP问题所需的梯度.

**关键词:** 轨迹规划; 时间最优; 加加速度约束; 非线性规划; 计算机数控

**中图分类号:** TP29      **文献标识码:** A

## Smooth and time-optimal trajectory planning for computer numerical control systems

LI Shu-rong, ZHANG Qiang

(College of Information and Control Engineering, China University of Petroleum (East China), Qingdao Shandong 266555, China)

**Abstract:** On the basis of the control vector parameterization (CVP) method, we investigate the numerical approach for solving the smooth and time-optimal trajectory planning problem of computer numerical control (CNC) systems. The jerk constraints are considered in the problem to realize the smooth feeding-rate of the trajectory. By using a time normalization factor, we reformulate the original jerk constrained time-optimal trajectory planning problem as a time-independent optimal control problem. The third derivative of the path parameter with respect to time, also known as pseudo-jerk, and the terminal time are taken as optimization variables. The piece-wise constant approximation method is used to approach the pseudo-jerk, and the optimal control problem is converted into a general nonlinear programming (NLP) problem. Constraint aggregation functions are introduced to approximate the process constraints (i.e., jerk and acceleration constraints) as final time constraints, and the computation load of constraints can be reduced significantly. By constructing the Hamiltonian functions of objective and constraint functions, and employing the adjoint approach, we obtain the gradients which are required in the process of NLP solution.

**Key words:** trajectory planning; time-optimal; jerk constraints; nonlinear programming; CNC

### 1 引言(Introduction)

高速高精度加工一直是现代计算机数控系统(CNC)中亟待解决的问题. 受加工刀具、执行器、伺服驱动器等性能的限制, 刀具的速度、加速度、加加速度不能任意变化而是存在确定约束. 在保证加工精度的条件下, 通过优化刀具轨迹, 使系统在约束允许的范围内发挥最大性能, 实现对工件的高速加工. 当前CNC系统的加工给进方法主要基于一定的加减速控制模式, 如梯形、抛物线、S型、指数型等, 因给进结构固定, 无法保证加工的时间最优性.

时间最优轨迹规划(TOTP)问题的研究最先源于运载火箭<sup>[1]</sup>和机器人机械臂的控制<sup>[2]</sup>, 其目标为在执行器动态性能允许的范围内, 规划最优可行轨迹, 使任务时间最小. 文献[3-4]基于最优控制理论, 将

机械臂的时间最优轨迹规划问题表述为一个时间最优控制问题, 通过求解最优性必要条件导致的两点边值问题获得最优解. 文献[2-5]首次采用相平面分析的方法求解了机械臂的时间最优轨迹规划问题, 并获得时间最优轨迹满足的最优性条件: 时间最优轨迹应具有“bang-bang”的约束结构, 即在任意时刻, 至少有一个过程不等式约束为活动约束.

在数控加工领域, 文献[6]针对参数化加工路径, 基于相平面分析法求解了分轴加速度约束下的CNC系统TOTP问题. 和相平面法类似, 文献[7]采用一种双向搜索算法实现了分轴加速度约束下的时间最优轨迹规划. 仅考虑加速度约束, 文献[6-7]优化得到的加速度均具有不连续结构. 由于实际刀具具有弹性储能且驱动器无法产生不连续的加速度/力矩, 因

此不连续加速度导致驱动器高频振动, 缩短刀具寿命且影响加工精度. 因此在刀具加工轨迹规划过程中有必要考虑加速度为连续的轨迹, 并称这类轨迹为“光滑”轨迹.

光滑轨迹规划方法主要有3种: 第1种为在轨迹规划中引入时间-能量最优指标, 可以使得加速度为连续的<sup>[8-9]</sup>. 通过调节时间项和能量项的权重可以实现轨迹快速性和光滑性的调节. 第2种为采用高阶样条函数近似轨迹<sup>[10-11]</sup>. 第3种为在问题中引入加加速度约束, 从而使得加速度为连续的<sup>[12]</sup>. 文献[13]基于相平面分析的方法求解了加加速度约束下的TOTP问题. 相平面方法需在三维空间构建速度限制曲面(VLS). 对复杂路径, VLS在分析上非常繁琐, 因此文献[13]仅实现了简单的直线和圆弧路径的轨迹规划. 文献[14]提出了一种“贪婪”算法求解加加速度约束TOTP问题. CNC系统TOTP问题被转化为一组单值优化子问题进行求解, 但大量的前向和反向搜索限制了该方法的应用, 特别对于复杂长路径<sup>[13]</sup>.

时间最优轨迹规划问题可以表述为最优控制问题进行求解. 控制向量参数化(CVP)是求解最优控制问题常用的数值方法, 基本思想是将最优控制问题转化为非线性规划(NLP)问题进行求解<sup>[15-16]</sup>. 相比于相平面分析法, CVP方法处理的轨迹规划问题更加广泛, 可以处理同时包含速度、加速度和加加速度等约束的问题.

本文基于CVP方法, 研究CNC系统沿给定路径的光滑时间最优轨迹规划. 通过限制加加速度以实现加速度的连续变化, 进而使得生成的轨迹为光滑的. 将控制参数化, 以有限个决策参数近似优化问题的优化变量, 从而将时间域上无穷维轨迹规划问题转化为有限维的NLP问题进行求解. 这种转化求解的方法避免了对VLS的分析, 因此可以求解复杂路径的TOTP问题并且可以方便地考虑多种约束.

## 2 问题描述(Problem formulation)

CNC系统时间最优轨迹规划的目标是在不违背给定约束的条件下, 以最短时间驱动刀具完成对给定路径的加工. 通过在问题中引入加加速度约束, 保证最优的刀具轨迹具有连续的加速度, 从而降低加工误差和机件磨损.

定义参数化路径 $\mathbf{C}(\beta) = [x(\beta) \ y(\beta) \ z(\beta)]^T$ , 其中 $\beta$ 为路径参数,  $\beta \in [0, 1]$ . 任意变量 $\theta$ 对参数 $\beta$ 的导数记为 $\theta'(\beta)$ , 对时间 $t$ 的导数记为 $\dot{\theta}(t)$ . 定义路径参数对时间的一阶导数为参数速度 $\dot{\beta}(t) = \frac{d\beta}{dt}$ , 同理参数加速度和参数加加速度分别表述为

$$\ddot{\beta}(t) = \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \dddot{\beta}(t) = \frac{d^3\beta}{dt^3}.$$

根据微分链式法则, 分轴速度、加速度和加加速度可分别表述为

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{C}'\dot{\beta}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{C}'\ddot{\beta}(t) + \mathbf{C}''\dot{\beta}^2(t), \quad (2)$$

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{C}'\dddot{\beta}(t) + 3\mathbf{C}''\ddot{\beta}(t)\dot{\beta}(t) + \mathbf{C}'''\dot{\beta}^3(t), \quad (3)$$

其中:

$$\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T, \quad \mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T,$$

$$\mathbf{J} = [J_x \ J_y \ J_z]^T,$$

$$\mathbf{C}' = \frac{d\mathbf{C}}{d\beta}, \quad \mathbf{C}'' = \frac{d^2\mathbf{C}}{d\beta^2}, \quad \mathbf{C}''' = \frac{d^3\mathbf{C}}{d\beta^3},$$

则CNC系统光滑时间最优轨迹规划问题可表述为如下最优控制问题:

$$\begin{aligned} \min J &= \int_{t_0}^{t_f} 1 dt, \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad \mathbf{X}(t_f) = \mathbf{X}_f, \\ v_{i,\min} \leq v_i(t) \leq v_{i,\max}, \\ a_{i,\min} \leq a_i(t) \leq a_{i,\max}, \\ J_{i,\min} \leq J_i(t) \leq J_{i,\max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $i = x, y, z$ 为坐标轴索引, 状态向量 $\mathbf{X} = [\beta \ \dot{\beta} \ \ddot{\beta}]^T$ , 控制变量 $u = \ddot{\beta}$ ,  $v_i, a_i, J_i$ 可通过解式(1)-(3)获得,  $v_{i,\max}, v_{i,\min}$ 分别为速度约束的上下限,  $a_{i,\max}, a_{i,\min}$ 分别为加速度约束的上下限,  $J_{i,\max}, J_{i,\min}$ 分别为加加速度约束的上下限,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [0 \ 0 \ 1]^T.$$

优化指标 $\min J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt$ 为最小化加工时间. 轨迹起点及终点处速度与加速度设定值分别为 $\mathbf{v}(0) = 0, \mathbf{v}(t_f) = 0, \mathbf{a}(0) = 0, \mathbf{a}(t_f) = 0$ . 则根据式(1)-(2)的表述, 问题(4)的状态初值与终值分别为 $\mathbf{X}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T, \mathbf{X}_f = [1 \ 0 \ 0]^T$ .

下面讨论问题(4)的表述对原始TOTP问题是否完备. 由问题(4)的表述, 规划的轨迹满足运动学上的分轴速度、加速度、加加速度约束, 但没有显式说明轨迹能否按指定路径遍历.

由 $\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{C}'(\beta)\dot{\beta}(t)$ 且给定路径起点 $\mathbf{C}(0)$ 已知, 则 $\mathbf{C}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{C}'(\beta)\dot{\beta}(t)dt + \mathbf{C}(0)$ , 而 $\mathbf{C}'(\beta)$ 是已知的, 因此可以保证优化得到的轨迹在任意时刻是沿给定路径遍历的.

由路径的起点未体现在问题(4)的约束条件中, 因此优化问题(4)所得到的最优轨迹适用于任意起点 $\mathbf{C}(0)$ 不同, 但具有相同 $\mathbf{C}'(\beta)$ 的路径. 从另一方面说, 空间任意路径经平移后, 其最优参数轨迹 $\beta^*(t)$ 不变, 路径的最优轨迹 $\mathbf{C}(\beta^*(t))$ 进行相应平移

获得.

由问题(4)可知, 系统动态为线性, 过程约束通常为非线性, 因此CNC系统TOTP问题实际上可以表述为一个非线性过程约束的线性系统时间最优控制问题. 根据时间最优轨迹的最优性条件<sup>[3][2]</sup>, 时间最优轨迹应当具有“bang-bang”的约束结构, 即刀具运动的任意时刻至少有一个约束达到其容许的极值.

### 3 求解策略(Solution strategy)

问题(4)是一个无穷维最优控制问题, 直接求解存在困难, 通常是将其参数化为有限维非线性规划问题进行求解. 控制向量参数化是常用的最优控制问题参数化方法. 通过将无穷维控制离散化为有限个参数点, 实现问题从无穷维到有限维的转化, 而系统状态可以采用标准微分方程求解器获得.

将控制参数化为 $N$ 段, 则共有 $N + 1$ 个控制节点, 分别为

$$t_0 = T_1 < T_2 < \cdots < T_N < T_{N+1} = t_f. \quad (5)$$

对控制参数化, 其一般数学表述为

$$u(t) = \sum_{j=1}^N \hat{u}_j \psi_j^{(r)}(t), \quad (6)$$

式中:  $\hat{u}_j$ 为标量, 表示控制在第 $j$ 个时间段的参数,  $N$ 为控制变量 $u(t)$ 离散化后参数个数.  $B$ -spline基函数定义为

$$\psi_j^{(1)}(t) := \begin{cases} 1, & T_j \leq t < T_{j+1}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$\psi_j^{(r)}(t) := \frac{t - T_j}{T_{j+r-1} - T_j} \psi_j^{(r-1)}(t) + \frac{T_{j+r} - t}{T_{j+r} - T_{j+1}} \psi_{j+1}^{(r-1)}(t),$$

其中:  $T_j$ 为第 $j$ 个分段结点,  $r \geq 1$ 为基函数阶数, 通常选择 $r = 1$ .

通常控制节点为等距选取的. 通过求解

$$T_j = t_0 + (j - 1) \frac{t_f - t_0}{N}$$

确定节点的位置. 因此, CVP方法求解固定时间最优控制问题十分方便. 但对于终端时刻 $t_f$ 未知的时间最优问题, CVP方法不能直接使用, 有必要将时间最优控制问题表述为固定时间最优控制问题来求解.

#### 3.1 问题重构(Problem reformulation)

问题(4)为自由时间最优控制问题, 通过在问题中引入归一化时间变量 $\tau$ , 实现自由时间最优控制问题到固定时间最优控制问题的转化.

归一化时间变量 $\tau$ 满足

$$\tau = \frac{1}{t_f} t. \quad (7)$$

由 $t \in [0, t_f]$ , 则 $\tau \in [0, 1]$ , 则时间最优指标变为

$$\min J = \int_0^1 t_f d\tau.$$

$\tau$ 时间域内的参数动态满足

$$\dot{\beta}(\tau) = t_f \dot{\beta}(t), \quad \ddot{\beta}(\tau) = t_f \ddot{\beta}(t), \quad \dddot{\beta}(\tau) = t_f \dddot{\beta}(t),$$

即

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau) = t_f \dot{\mathbf{X}}(t) = t_f \mathbf{A} \mathbf{X}(t) + t_f \mathbf{B} u(t),$$

则问题动态在归一化时间域内表述为

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau) = f(\mathbf{X}, t_f, u(\tau)), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad (8)$$

其中 $f(\mathbf{X}, t_f, u(\tau)) = t_f \mathbf{A} \mathbf{X}(\tau) + t_f \mathbf{B} u(\tau)$ .

将 $t_f$ 和 $u(\tau)$ 作为优化变量, 则 $t$ 时间域的光滑TOTP问题转化为如下 $\tau$ 时间域内的固定时间最优控制问题.

$$\min_{u(\tau), t_f} J = \int_0^1 t_f d\tau,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(\tau) = f(\mathbf{X}, t_f, u(\tau)), \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \\ v_{i,\min} \leq v_i(\mathbf{X}) \leq v_{i,\max}, \\ a_{i,\min} \leq a_i(\mathbf{X}) \leq a_{i,\max}, \\ J_{i,\min} \leq J_i(\mathbf{X}, u) \leq J_{i,\max}, \\ i = x, y, z, \\ \mathbf{X}(1) = \mathbf{X}_f, t_f > 0. \end{cases} \quad (9)$$

#### 3.2 约束处理(Constraints handling)

由于速度、加速度、加加速度约束存在于整个时间域, 因而约束是“无穷”的. 优化时通常只能考虑有限点处的约束, 以近似表述整个过程的约束<sup>[9]</sup>. 很显然, 如果要增加约束的精度, 需要考虑的约束点数应相应增加, 计算量也会增大. 参考文献[17]的做法, 通过引入KS函数, 将存在于整个时间域的过程约束近似转化为终端时刻约束, 从而显著减少约束计算.

为表述方便, 定义

$$\mathbf{g}(\tau) = [g_1(\tau) \ g_2(\tau) \ \cdots \ g_m(\tau)], \quad (10)$$

$\mathbf{g}(\tau) \in \mathbb{R}^m$ 为所有过程约束函数组成的向量. 以 $x$ 轴速度约束为例, 其一般形式可写为

$$g_i(\tau) = v_x - v_{x,\max}, \quad g_{i+1}(\tau) = v_{x,\min} - v_x.$$

对本文速度, 加速度, 加加速度约束问题,  $m = 18$ .

原始多约束优化问题可采用最大约束优化问题代替, 即过程约束 $g_k(\tau) \leq 0, k = 1, 2, \dots, m$ 等价于最大约束 $\max[g_k(\tau)] \leq 0$ . 如果采用基于梯度的优化方法求解问题,  $\max[g_k(\tau)]$ 必须为连续可微的, 因此, 本文采用可微的KS函数<sup>[18]</sup>近似最大约束.

KS函数的表述形式为

$$\text{KS}(\mathbf{g}(\tau), \rho) = \frac{1}{\rho} \ln \left[ \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n e^{\rho g_k(\tau_j)} \right], \quad (11)$$

其中:  $\rho$ 为给定常数,  $m$ 为过程约束的个数,  $n$ 为过程约束离散化后参数个数.

KS函数能够产生一个包络表面, 可以保守地估计函数集 $\{g(\tau)\}$ 中的最大函数, 且具有如下性质:

1) 对于任意 $\rho > 0$ , 存在

$$\max[g(\tau)] \leq \text{KS}(g(\tau), \rho) \leq \max[g(\tau)] + \frac{1}{\rho} \ln m,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{KS}(g(\tau), \rho) = \max[g(\tau)]$$

成立.

2) 对于 $\rho_2 > \rho_1 > 0$ , 存在

$$\text{KS}(g(\tau), \rho_1) \geq \text{KS}(g(\tau), \rho_2).$$

原始KS函数为累加和的形式, 为了能处理本问题的无穷维约束, 本文给出其连续形式:

$$\text{MKS}(g(\tau), \rho) = \frac{1}{\rho} \ln \left[ \sum_{k=1}^m \int_0^1 e^{\rho g_k(\tau)} d\tau \right]. \quad (12)$$

采用KS凝聚方法, 将过程约束凝聚为终端时刻约束, 理论上可将所有不等式约束凝聚为1个, 但此时凝聚的KS函数具有很强的非线性. 本文采用一个KS函数对应一个过程约束的方法. 在实际计算中, MKS的积分采用分段常数近似处理. 定义积分步长 $h$ , 则 $h * n = 1$ . 在本文中取 $n = N$ , 即过程约束与控制取相同的离散个数. 采用一个KS函数对应一个过程约束的方法, 第 $k$ 个MKS可重写为

$$\text{MKS}(g_k(\tau), \rho_k) \approx \frac{1}{\rho_k} \ln \left[ \sum_{j=1}^n e^{\rho_k g_k(\tau_j)} h \right] =$$

$$\text{KS}(g_k(\tau), \rho_k) + \frac{1}{\rho_k} \ln h. \quad (13)$$

基于KS函数的性质1), 以KS函数近似最大约束, 即 $\text{KS}(g_k(\tau), \rho_k) \approx \max[g_k(\tau)] \leq 0$ , 进而式(13)等价于

$$\text{MKS}(g_k(\tau), \rho_k) \leq \frac{1}{\rho_k} \ln h. \quad (14)$$

展开式(14), 获得

$$\int_0^1 (e^{\rho_k g_k(\tau)} - h) d\tau \leq 0. \quad (15)$$

定义新的标量 $p_k$ , 满足

$$\dot{p}_k(\tau) = f_{p_k} = e^{\rho_k g_k(\tau)} - h, \quad p_k(0) = 0, \quad (16)$$

则式(15)可写为 $\int_0^1 \dot{p}_k d\tau = p_k(1) \leq 0$ , 因此第 $k$ 个过程约束凝聚为如下终端时刻约束:

$$p_k(1) \leq 0. \quad (17)$$

因此, 原始时间最优控制问题(4)最终转化为如下含终端约束的固定时间最优控制问题:

$$\min_{u(\tau), t_f} J = \int_0^1 t_f d\tau,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(\tau) = f(\mathbf{X}, t_f, u(\tau)), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \\ \dot{p}_k(\tau) = f_{p_k} = e^{\rho_k g_k(\tau)} - h, \quad p_k(0) = 0, \\ p_k(1) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ \mathbf{X}(1) = \mathbf{X}_f, \quad t_f > 0. \end{cases} \quad (18)$$

### 3.3 梯度表述(Gradient formulae)

通过参数化控制, 最优控制问题(18)转化为一个小尺度NLP问题, 因此可以采用一般NLP求解器求解. NLP问题求解的困难在于如何高效求解目标和约束函数的梯度. 常用的梯度求解方法有3种: 有限差分, 灵敏度方程, 和伴随方程. 灵敏度和伴随方法均可以获得精确梯度. 灵敏度方法推导方便, 但对于多状态变量问题计算大. 而伴随方法对状态个数不敏感. 本文基于伴随的方法求解目标和约束函数的梯度, 通过分别构造目标和约束函数的伴随方程, 获得梯度的精确值<sup>[19]</sup>.

对于问题(18), 定义目标函数的Hamiltonian函数为 $H = t_f + \lambda^T f$ . 通过正向求解状态方程(8)和反向求解如下伴随方程:

$$\dot{\lambda}(\tau) = -\lambda^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}, \quad \lambda(1) = 0. \quad (19)$$

增广目标函数的一阶变分简化为

$$\delta J = \int_0^1 (\lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} \delta u + (1 + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial t_f}) \delta t_f) d\tau. \quad (20)$$

采用分段常数法参数化控制, 即

$$u(\tau) = \sum_{j=1}^N \hat{u}_j \psi_j^{(1)}(\tau), \quad (21)$$

则目标函数 $J$ 对参数 $\hat{u}_j$ 和终端时刻 $t_f$ 的梯度可分别表述为

$$\begin{cases} \frac{dJ}{d\hat{u}_j} = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} d\tau, \\ \frac{dJ}{dt_f} = \int_0^1 (1 + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial t_f}) d\tau, \end{cases} \quad (22)$$

其中:  $\tau_j$ 为第 $j$ 个控制分段结点, 且满足 $0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N < \tau_{N+1} = 1$ .

本问题通过引入KS函数, 将各过程约束分别转化为终端时刻约束. 终端时刻约束函数受系统状态方程的支配, 则第 $k$ 个终端时刻约束函数可写为如下增广的形式:

$$p_k(1) =$$

$$p_k(1) + \int_0^1 (\gamma_k^T (f - \dot{\mathbf{X}}) + (f_{p_k} - \dot{p}_k)) d\tau. \quad (23)$$

定义约束函数的Hamiltonian函数 $\Gamma_k = \gamma_k^T f + f_{p_k}$ , 则约束函数的伴随方程可写为

$$\dot{\gamma}_k(\tau) = -(\gamma_k^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial f_{p_k}}{\partial \mathbf{X}}), \quad \gamma_k(1) = 0. \quad (24)$$

约束函数对控制参数 $\hat{u}_j$ 和终端时刻 $t_f$ 的梯度可分别表述为

$$\begin{cases} \frac{dp_k(1)}{d\hat{u}_j} = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\gamma_k^T \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f_{p_k}}{\partial u}) d\tau, \\ \frac{dp_k(1)}{dt_f} = \int_0^1 (\gamma_k^T \frac{\partial f}{\partial t_f} + \frac{\partial f_{p_k}}{\partial t_f}) d\tau. \end{cases} \quad (25)$$

### 4 优化算法(Optimization algorithm)

基于CVP方法, 无穷维最优控制问题的求解转化为一个有限维NLP问题. NLP问题求解过程中, 每次迭代均需要内部求解状态初值问题. 因此最优控制问题(18)可分解为辅助初值问题(8)(16)和如下主NLP问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{u}}} J(\hat{\mathbf{u}}), \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{X}(1) = \mathbf{X}_f, t_f > 0, \\ p_k(1) \leq 0, k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

式中:  $J$ 为目标函数,  $\mathbf{X}(1)$ 为等式约束函数,  $p_k(1)$ 为不等式约束函数,  $\hat{\mathbf{u}}$ 为优化参数向量, 具体表述为

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1 \ \hat{u}_2 \ \dots \ \hat{u}_{N-1} \ \hat{u}_N \ t_f].$$

状态初值问题(8)(16)采用4阶龙格库塔方法求解. 主NLP问题(26)采用序列二次规划(SQP)求解. SQP方法所需目标与约束函数的梯度由3.3节方法获得.

#### 算法步骤:

**Step 1** 初始化状态 $\mathbf{X}(0)$ ,  $p_k(0)$ , 初始控制猜测 $\hat{\mathbf{u}}_1$ , 迭代精度 $\varepsilon > 0$ . 迭代初值 $i = 1$ .

**Step 2** 计算当前第 $i$ 步迭代的目标函数 $J$ 和终端约束函数 $p_k(1)$ 值及对 $\hat{u}_j, t_f$ 的梯度.

**Step 3** 求解第 $i$ 步QP子问题, 生成新的迭代步 $\hat{\mathbf{u}}_{i+1}$ . 若 $\|J(\hat{\mathbf{u}}_{i+1}) - J(\hat{\mathbf{u}}_i)\| < \varepsilon$ , 则获得最优解, 迭代结束. 否则 $i = i + 1$ , 返回 Step 2继续求解.

### 5 实例测试(Examples)

本节以实际加工路径的TOTP问题为例, 验证所提出方法的有效性. 测试路径(图1)取自文献[20]的一个花瓶图案加工问题. 采用两轴加工方式. 测试路径由14个5次B样条曲线段组成.

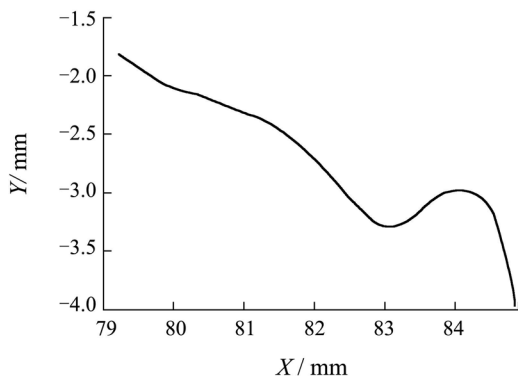


图1 测试路径  
Fig. 1 Test path

通常, TOTP问题在优化过程中可能存在多个局部最优解, 因此本文不能保证求解NLP问题获得的数值解是全局最优的. 为改善数值解的质量, 参考文献[21]的方法, 从4个不同的初始控制猜测迭代

求解TOTP问题, 然后保存其中最好的结果, 将剩余的3个结果作为新的初始猜测并重启问题. 虽然无法保证数值解一定为全局最优的, 但如果重启解改进不大或仍然比初始最好解差, 笔者仍然有信心称获得的数值解具有全局最优性.

首先研究仅加加速度约束的TOTP问题, 沿坐标方向加加速度限制为 $10000 \text{ mm/s}^3$ . 图2为优化得到的切向速度图, 图3-4分别为加速度和加加速度图. 图3中加速度为连续的, 进而可知速度为连续可微的, 因而轨迹是光滑的. 图4中加加速度具有“bang-bang”的结构, 即任意时刻至少有一个坐标方向的加加速度达到其边界值.

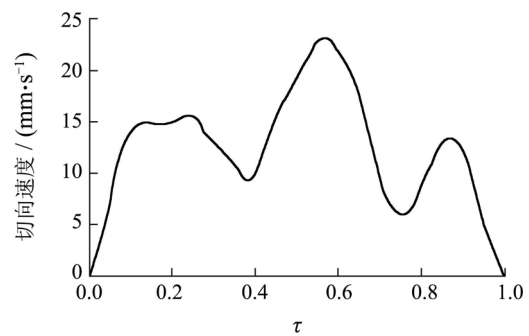


图2 加加速度约束下的切向速度图

Fig. 2 Plot of tangential velocity with jerk constraints

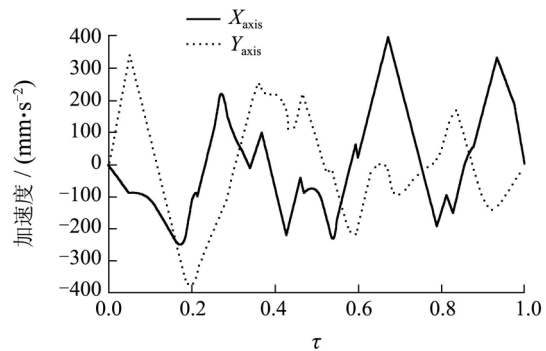


图3 加加速度约束下的加速度图

Fig. 3 Plots of accelerations along X and Y axis with jerk constraints

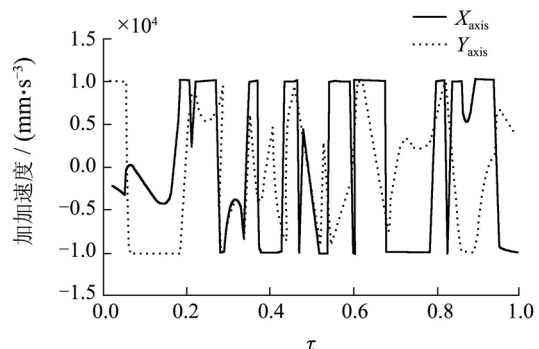


图4 加加速度约束下的加加速度图

Fig. 4 Plots of jerks along X and Y axis with jerk constraints

在加加速度约束基础上, TOTP问题中引入加速度约束, 加速度限制设为 $200\text{ mm/s}^2$ . 图5为相应切向速度图. 图6-7分别为优化得到的加速度及加加速度图. 结合图6-7可以看出加速度与加加速度均在约束范围内, 且任意时刻至少有一个约束在其边界上.

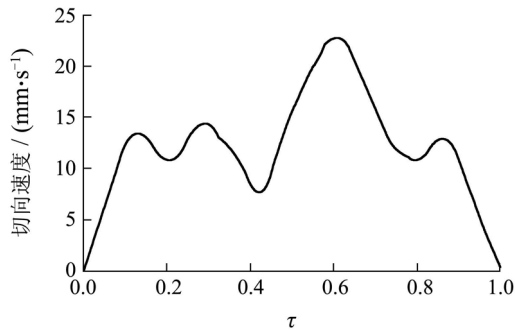


图 5 加加速度与加速度约束下的切向速度图

Fig. 5 Plot of tangential velocity with jerk and acceleration constraints

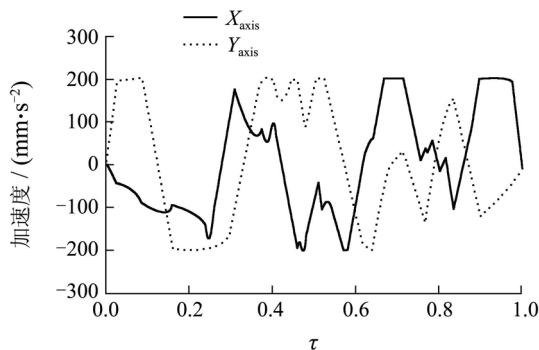


图 6 加加速度与加速度约束下的加速度图

Fig. 6 Plots of accelerations along X and Y axis with jerk and acceleration constraints

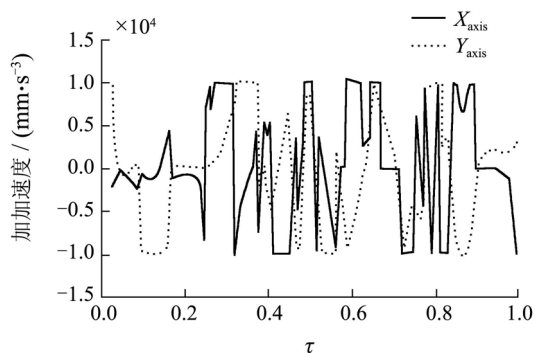


图 7 加加速度与加速度约束下的加加速度图

Fig. 7 Plots of jerks along X and Y axis with jerk and acceleration constraints

作为比较, 本例中研究了仅加速度约束的TOTP问题, 加速度约束仍为 $200\text{ mm/s}^2$ . 图8为相应切向速度图, 图9-10分别为优化得到的加速度及加加速度图. 比较图6和9可以看出加加速度约束下, 最优的加速度为 $C^0$ 连续的, 速度轨迹为光滑的( $C^1$ 连续),

而仅加速度约束下优化得到的加速度存在突变(见图9), 速度轨迹仅为 $C^0$ 连续(见图8). 图10显示不连续的加加速度导致局部加加速度值远大于容许值.

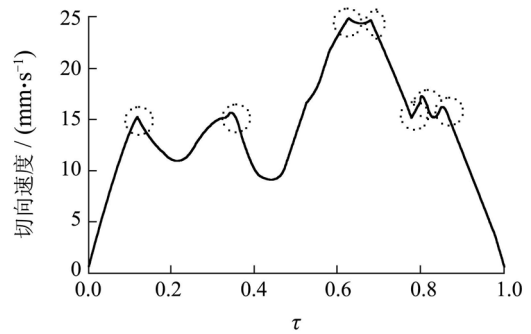


图 8 加速度约束下的切向速度图

Fig. 8 Plot of tangential velocity with acceleration constraints

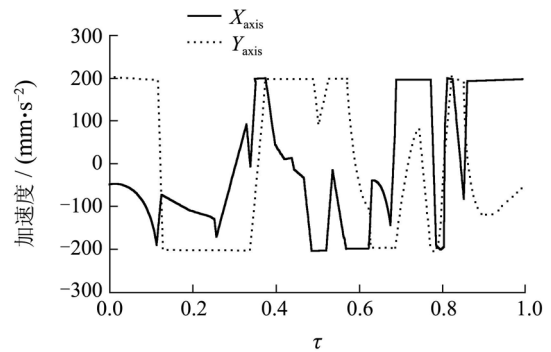


图 9 加速度约束下的加速度图

Fig. 9 Plots of accelerations along X and Y axis with acceleration constraints

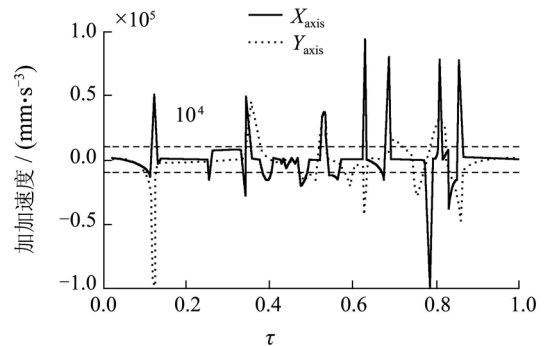


图 10 加速度约束下的加加速度图

Fig. 10 Plots of jerks along X and Y axis with acceleration constraints

## 6 结论(Conclusions)

针对CNC系统给定参数化路径, 给出了一种基于CVP的光滑时间最优轨迹规划方法, 并针对实际的加工路径进行测试, 验证了方法的有效性. CVP方法将时间最优轨迹规划问题转化为NLP问题进行求解. 这种转化求解的方法避免了对VLS的分析, 因此可以求解复杂路径的TOTP问题且可以方便地考虑多种约束. 通过在问题中引入加加速度约束, 使最优

的加速度具有连续结构,进而生成光滑给进轨迹.对于仅加加速度约束的轨迹规划问题,实验求得的时间最优加加速度曲线具有的“bang-bang”结构是符合时间最优轨迹最优性条件的,即任意时刻至少有一个坐标方向存在最大加/减速度.且实例测试结果显示加速度与加加速度约束问题的时间最优轨迹规划结果也是符合最优性条件的,因此本方法在求解光滑时间最优轨迹规划问题上是有有效的.

### 参考文献(References):

- [1] SMITH D R. *Variational Methods in Optimization*[M]. New York: Dover Press, 1974.
- [2] BOBROW J E, DUBOWSKY S, GIBSON J S. Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths[J]. *International Journal of Robotics Research*, 1985, 4(3): 3 – 17.
- [3] GEERING H, GUZZELLA L, HEPNER S, et al. Time-optimal motions of robots in assembly tasks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(6): 512 – 518.
- [4] CHEN Y, DESROCHERS A A. Structure of minimum-time control law for robotic manipulators with constrained paths[C] // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. New York: IEEE, 1989: 971 – 976.
- [5] SHIN K, MCKAY N. Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(6): 531 – 541.
- [6] TIMAR S D, FAROUKI R T. Time-optimal traversal of curved paths by Cartesian CNC machines under both constant and speed-dependent axis acceleration bounds[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2007, 23(5): 517 – 532.
- [7] DONG J, STORI J A. A generalized time-optimal bi-directional scan algorithm for constrained feedrate optimization[J]. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2006, 128(2): 379 – 390.
- [8] GASPARETTO A, ZANOTTO V. Optimal trajectory planning for industrial robots[J]. *Advances in Engineering Software*, 2010, 41(4): 548 – 556.
- [9] ERKORKMAZ K, HENG M. A heuristic feedrate optimization strategy for NURBS tool paths[J]. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 2008, 57(1): 407 – 410.
- [10] ALTINTAS Y, ERKORKMAZ K. Feedrate optimization for spline interpolation in high speed machine tools[J]. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 2003, 52(1): 297 – 302.
- [11] 甘亚辉, 戴先中. 基于遗传算法的多机器人系统最优轨迹规划[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(9): 1245 – 1252.  
(GAN Yahui, DAI Xianzhong. Optimal trajectory-planning based on genetic algorithm for multi-robot system[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(9): 1245 – 1252.)
- [12] 谭冠政, 王越超. 工业机器人时间最优轨迹规划及轨迹控制的理论与实验研究[J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(2): 185 – 192.  
(TAN Guanzheng, WANG Yuechao. Theoretical and experimental research on time-optimal trajectory planning and control of industrial robots[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(2): 185 – 192.)
- [13] MATTMULLER J, GISLER D. Calculating a near time-optimal jerk-constrained trajectory along a specified smooth path[J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2009, 45(9): 1007 – 1016.
- [14] DONG J Y, FERREIRA P M, STORI J A. Feed-rate optimization with Jerk constraints for generating minimum-time trajectories[J]. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2007, 47(12/13): 1941 – 1955.
- [15] BUSKENS C, MAURER H. SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints: adjoint variables, sensitivity analysis, and real-time control[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 120(1/2): 85 – 108.
- [16] 陈宁, 沈晓瑜, 桂卫华, 等. 多时滞线性系统的控制参数优化方法[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(8): 1099 – 1104.  
(CHEN Ning, SHEN Xiaoyu, GUI Weihua, et al. Control parameterization method of linear systems with multiple time-delays[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(8): 1099 – 1104.)
- [17] BLOSS K F, BIEGLER L T, SCHIESSER W E. Dynamic process optimization through adjoint formulations and constraint aggregation[J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 1999, 38(2): 421 – 432.
- [18] KREISSELMEIER G, STEINHAUSER R. Application of vector performance optimization to a robust control loop design for a fighter aircraft[J]. *International Journal of Control*, 1983, 37(2): 251 – 284.
- [19] 李树荣, 张强, 雷阳, 等. 自由时间最优控制问题的一种控制向量参数化方法[J]. *控制与决策*, 2011, 26(7): 1009 – 1013.  
(LI Shurong, ZHANG Qiang, LEI Yang, et al. Control vector parametrization approach for free time optimal control problems[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(7): 1009 – 1013.)
- [20] ZHANG L X, SUN R Y, GAO X S, et al. High speed interpolation for micro-line trajectory and adaptive real-time look-ahead in CNC machining[J]. *Science China, Technological Sciences*, 2011, 54(6): 1481 – 1495.
- [21] CONSTANTINESCU D. *Smooth time optimal trajectory planning for industrial manipulators*[D]. Vancouver, Canada: University of British Columbia, 1998.

### 作者简介:

**李树荣** (1966—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为最优控制理论、最优化方法、非线性系统控制、智能控制等, E-mail: lishuron@upc.edu.cn;

**张强** (1986—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为最优控制理论及相关工业应用, E-mail: automatic\_zhangqiang@126.com.