

有限时间信息融合线性二次型最优控制

甄子洋, 江 驹, 王志胜, 王新华

(南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016)

摘要: 针对有限时间线性二次型最优控制问题, 提出了一种新的求解方法——信息融合估计方法. 基于线性最小方差估计准则下的融合估计理论, 通过融合期望状态轨迹、理想控制策略等软约束信息, 分别采用集中式融合和序贯式融合两种信息处理方法, 求得最优状态调节器问题的最优融合控制序列. 进一步从理论上论证了序贯式融合控制方法与传统最优控制方法的一致性, 并通过直流电机系统的数值仿真也验证了集中式和序贯式融合控制方法与传统最优控制方法的等效性, 从而统一了最优估计与最优控制问题, 并为最优控制问题提供了一种新的求解方法.

关键词: 最优控制; 信息融合; 最优估计

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Finite-time information fusion for linear quadratic optimal control

ZHEN Zi-yang, JIANG Ju, WANG Zhi-sheng, WANG Xin-hua

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China)

Abstract: For the finite-time linear quadratic optimal control problem, we propose a novel solving method — information fusion estimation method. Based on the fusion theory with minimum variance linear estimation criterion, the information of the desired state trajectory and the desired control strategy is fused to obtain the optimal fusion control sequence for the optimal state regulator by using the centralized and the sequential information fusion methods, respectively. The consistency between the sequential information fusion control method and the traditional optimal control method is theoretically proved. Numerical simulation results of a DC motor system show the equivalence of the centralized fusion control method, the sequential fusion control method and the traditional optimal method, thus unifying the optimal estimation and the optimal control and providing a novel method for optimal control problem.

Key words: optimal control; information fusion; optimal estimation

1 引言(Introduction)

线性二次型(linear quadratic, LQ)最优控制是最优控制理论中最为成熟的部分, 因其控制律为简单的线性形式而在工程中得到广泛应用. 最优控制问题的传统求解方法主要有极大值原理法、动态规划法、李雅普诺夫法和矩阵配方法等^[1-2]. 然而, 传统最优控制方法不适合处理控制受约束、状态和控制时滞、输入输出相关、非线性系统等情形. 近年来, 针对具有非线性、时滞性、受干扰、不确定性、状态约束等特性的实际系统, 如何设计出有效的最优或近优控制律, 已成为最优控制理论研究的热点^[3-4]. 信息融合是20世纪70年代出现的数据融合技术的延拓和发展, 已被广泛应用于众多军事和民用领域. 信息融合本质上是按照一定准则对多源信息进行分析 and 综合以完成估计、控制等决策. 融合估计主要研究多源信息下的最优估计问题, 是传统最优估计理

论与信息融合技术的有机结合. 李晓榕等人^[5]提出了统一线性数据模型和基于加权最小二乘估计、最佳线性无偏估计的最优融合准则. 周军、王志胜等人^[6]提出了数据的统一线性量测模型和基于线性均方估计的最优融合准则. 它们本质上是一致的. 近年来, 王志胜、甄子洋等人首次提出融合控制的概念, 即基于信息融合思想, 利用融合估计方法, 通过融合关于控制量的所有信息, 包括受控对象信息、性能评价信息、执行机构信息、测量信息、期望输出信息、干扰信息以及相关信息, 获得最优控制律, 目前融合估计方法已被推广应用于求解线性系统和非线性系统的预见控制问题、预测控制问题、解耦控制问题等, 从而产生了多种融合控制算法^[7-12]. 本文针对离散线性系统的有限时间LQ最优状态调节器问题, 提出了基于信息融合估计理论的两解法: 集中算法和序贯算法, 并通过理论推导和数值仿真证

明了与传统最优控制方法的等效性. 本文旨在为后续的复杂实际系统的最优控制问题研究奠定理论基础.

2 状态调节器问题描述及传统解法(State regulator problem description and traditional solving method)

设离散时间线性系统的状态方程和输出方程为

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad (1)$$

式中: $x_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 为状态向量, $u_k \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ 为控制向量. 设系统可控、可观测, 且初始状态为 $x_0 = 0$.

所谓离散状态调节器问题, 即要求最优控制序列 $u_k^*, k = 0, \dots, N-1$, 使性能指标为最小

$$J = x_N^T S x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k), \quad (2)$$

式中: 权重矩阵 $S = S^T \geq 0$, $Q_k = Q_k^T \geq 0$, $R_k = R_k^T > 0$, N 为末端时刻.

定理 1^[2] 对于有限时间离散线性系统的最优状态调节问题(1)–(2), 使性能指标函数为最小的最优控制序列为

$$u_k^* = -(R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k x_k, \quad (3)$$

式中: $k = 0, \dots, N-1$, P_k 是下列离散 Riccati 方程的对称非负定解:

$$P_k = (A_k - B_k K_k)^T P_{k+1} (A_k - B_k K_k) + K_k^T R_k K_k + Q_k, \quad (4)$$

式中: $P_N = S$, K_k 为反馈增益矩阵, 且

$$K_k = (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k.$$

3 信息融合最优状态调节器(Information fusion optimal state regulator)

由最优估计理论可知, 线性最小方差估计实质上是求解 LQ 最优问题, 相反, LQ 最优问题可转化为线性最小方差估计问题. 受此启发, 在任何 LQ 性能指标函数中可获得量测方程, 即信息表达式. LQ 最优控制问题亦是如此. 信息融合估计有两种处理方式: 集中算法和序贯算法. 信息的集中融合方式, 是将所有信息进行集中处理, 直接求出总信息量, 再进行估计. 信息的序贯融合方式是将信息逐一进行融合处理的过程. 为此, 下面分别利用两种融合算法来求解上述最优状态调节器问题.

3.1 基于融合估计集中算法的求解方法(Fusion estimation central algorithm-based solving method)

关于所有时刻的控制向量信息源包含两个:

1) 理想控制策略软约束信息: 从性能指标函

数(2)可以得到如下信息表达式:

$$0 = u_k + r_k, \quad (5)$$

式中: $E[r_k] = 0$, $\text{var}[r_k] = R_k^{-1}$. 进一步改写为如下集中形式:

$$u^* = u + r, \quad (6)$$

式中:

$$u^* = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T, \quad u = [u_0^T \ u_1^T \ \dots \ u_{N-1}^T]^T,$$

$$r = [r_0^T \ r_1^T \ \dots \ r_{N-1}^T]^T, \quad E[r] = 0,$$

$$\text{var}[r] = R^{-1} = \text{diag}\{R_0^{-1}, R_1^{-1}, \dots, R_{N-1}^{-1}\},$$

u^* 看作 u 的量测信息, 量测信息量为 R .

2) 期望状态轨迹软约束信息: 从性能指标函数(2)得到如下信息表达式:

$$0 = x_{k+1} + q_{k+1}, \quad (7)$$

式中:

$$E[q_{k+1}] = 0, \quad \text{var}[q_{k+1}] = Q_{k+1}^{-1}, \quad Q_N^{-1} = S^{-1},$$

进一步改写为如下集中形式:

$$x^* = x + q, \quad (8)$$

式中:

$$x^* = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T, \quad x = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T,$$

$$q = [q_1^T \ q_2^T \ \dots \ q_N^T]^T, \quad E[q] = 0, \quad Q_N^{-1} = S^{-1}$$

$$\text{var}[q] = Q^{-1} = \text{diag}\{Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \dots, Q_N^{-1}\}.$$

将系统状态方程(1)所包含的硬约束信息写成集中形式

$$x = (I - \bar{A})^{-1} (\bar{A} x_0 + \bar{B} u), \quad (9)$$

式中:

$$\bar{A} = [A_0^T \ 0 \ \dots \ 0]^T, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{A} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_{N-1}\},$$

$$\bar{B} = \text{diag}\{B_0, B_1, \dots, B_{N-1}\}.$$

将式(9)代入式(8)得到期望状态轨迹序列关于控制序列的信息表达式为

$$x^* - (I - \bar{A})^{-1} \bar{A} x_0 = (I - \bar{A})^{-1} \bar{B} u + q, \quad (10)$$

等式左侧看作 u 的量测信息, 信息量为

$$\bar{B}^T (I - \bar{A})^{-1T} Q (I - \bar{A})^{-1} \bar{B}.$$

根据信息融合估计定理^[7-8], 融合上述两个量测信息, 得出控制序列的最优融合估计为

$$\hat{u} = -[R + \bar{B}^T (I - \bar{A})^{-1T} Q (I - \bar{A})^{-1} \bar{B}]^{-1} \cdot$$

$$\bar{B}^T (I - \bar{A})^{-1T} Q (I - \bar{A})^{-1} \bar{A} x_0.$$

(11)

3.2 基于融合估计序贯算法的求解方法(Fusion estimation sequential algorithm-based solving method)

关于 k 时刻控制向量的信息源包含如下两个:

1) 性能指标函数(2)包含的理想控制策略软约束信息,如式(5)所示,其信息量为 R_k .

2) $k+1$ 时刻虚拟状态包含的软约束信息:设 $k+1$ 时刻的虚拟状态为 \hat{x}_{k+1} ,其关于 $k+1$ 真实状态的信息量为 \hat{P}_{k+1} ,则得到如下信息表达式:

$$\hat{x}_{k+1} = x_{k+1} + p_{k+1}, \quad (12)$$

式中: $E[p_{k+1}] = 0$, $\text{var}[p_{k+1}] = \hat{P}_{k+1}^{-1}$. 联立系统状态方程下的硬约束信息,得到关于 u_k 的软约束信息表达式为

$$\hat{x}_{k+1} - A_k x_k = B_k u_k + p_{k+1}, \quad (13)$$

其关于 u_k 的信息量为 $B_k^T \hat{P}_{k+1} B_k$.

因此,根据上述两个量测信息,得到 k 时刻控制向量的最优融合估计为

$$\hat{u}_k = -[R_k + B_k^T \hat{P}_{k+1} B_k]^{-1} B_k^T \hat{P}_{k+1} \cdot (\hat{x}_{k+1} - A_k x_k). \quad (14)$$

然而,若要求解最优控制向量,需要先求得虚拟状态信息及其信息量.通过融合已知的所有未来时刻期望状态轨迹信息,即可获得 $k+1$ 时刻的虚拟状态融合估计及其信息量,具体递推融合过程可参见文献[12]所述.由此可知,虚拟状态融合估计是未来虚拟状态融合估计和未来期望状态信息的线性函数,其求解过程是逆时间方向融合递推过程,由于末端时刻虚拟状态融合估计初值和期望状态值均为零,因此 $k+1$ 时刻的虚拟状态融合估计及其信息量分别为

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= 0, \\ \hat{P}_{k+1} &= A_{k+1}^T (\hat{P}_{k+2}^{-1} + B_{k+1} R_{k+1}^{-1} B_{k+1}^T)^{-1} A_{k+1} + Q_{k+1}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $k = 0, \dots, N-1$, $\hat{P}_N = Q_N = S$.

于是,得到如下定理.

定理2 对于有限时间离散线性系统的最优状态调节问题(1)-(2),使性能指标函数为最小的最优控制序列的融合估计为

$$\hat{u}_k = -(R_k + B_k^T \hat{P}_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T \hat{P}_{k+1} A_k x_k, \quad (17)$$

式中: $k = 0, \dots, N-1$, \hat{P}_k 是如下离散Riccati方程的对称非负定解:

$$\hat{P}_k = A_k^T (\hat{P}_{k+1}^{-1} + B_k R_k^{-1} B_k^T)^{-1} A_k + Q_k. \quad (18)$$

4 进一步讨论(Further discussion)

集中式信息融合控制算法属于非状态反馈型的开环控制,是一种理想化的最优控制方法,但在实际系统中难以应用.传统最优控制方法^[1-2]得到的最优控制律是状态反馈形式的,下面讨论序贯式信息融合控制方法与传统最优控制方法在的异同.

对传统最优状态调节器的Riccati方程(4)作如下推导:

$$\begin{aligned} P_k &= A_k^T P_{k+1} A_k - 2A_k^T P_{k+1} B_k K_k + K_k^T (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k) K_k + Q_k = \\ &= A_k^T P_{k+1} A_k - 2A_k^T P_{k+1} B_k K_k + A_k^T P_{k+1} B_k K_k + Q_k = \\ &= A_k^T [P_{k+1} - P_{k+1} B_k (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} \cdot B_k^T P_{k+1}] A_k + Q_k = \\ &= A_k^T (P_{k+1}^{-1} + B_k R_k^{-1} B_k^T)^{-1} + Q_k. \end{aligned} \quad (19)$$

通过比较式(18)和式(19)可得

$$P_k = \hat{P}_k, \quad (20)$$

即传统最优状态调节器的Riccati方程与信息融合最优状态调节器的Riccati方程是一致的.再比较式(3)与式(17)可得

$$u_k^* = \hat{u}_k. \quad (21)$$

于是,得到如下定理.

定理3 对于离散线性系统的最优状态调节器问题,序贯式信息融合最优控制方法与传统最优控制方法得到的控制律是完全等同的.

5 仿真研究(Simulation research)

下面通过数值仿真来验证信息融合最优控制的集中算法与序贯算法的等效性,并进一步验证与传统最优控制方法的等效性.

考虑无扰动的某线性直流无刷电机系统,系统变量及参数的物理含义可参见文献[12],其离散时间线性模型表示为

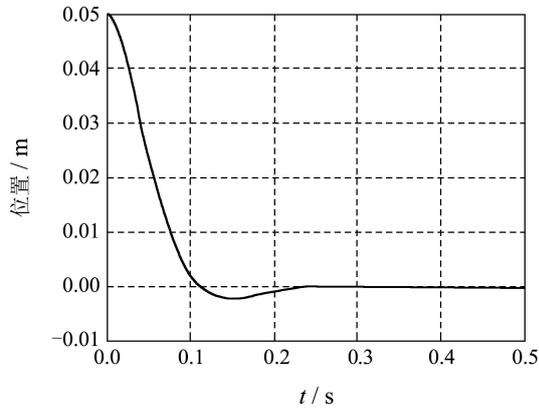
$$\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9.96 \times 10^{-4} \\ 0 & 9.91 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.74 \times 10^{-6} \\ 9.46 \times 10^{-3} \end{bmatrix} i_k. \quad (22)$$

在MATLAB 6.5仿真平台下运行控制系统,设置如下仿真参数:系统运行时间为0.5s;对于最优状态调节器问题,权重矩阵取

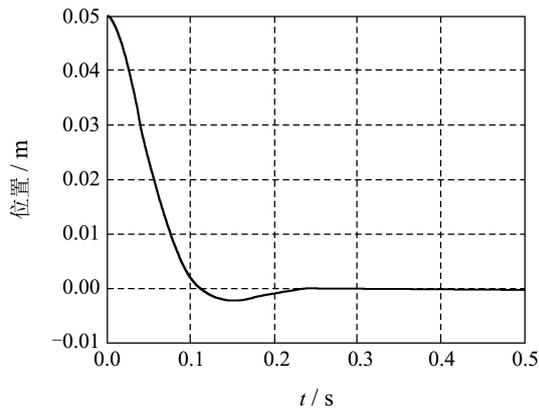
$$S = Q = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$R = 1$.通过仿真得到如下结果:对于最优状态调节

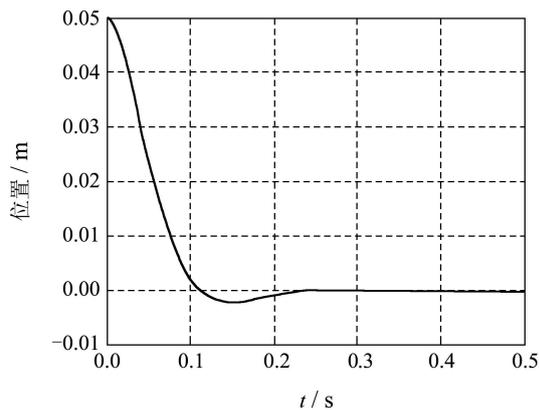
器问题, 传统最优控制方法^[1]、信息融合控制的集中算法和序贯算法下的系统性能指标值均为 $J = 1158.6$; 位置状态调节响应曲线的比较结果如图1所示, 控制量信号曲线的比较结果如图2所示, 从仿真结果来看, 集中式和序贯式信息融合控制方法与传统最优控制方法的各种响应曲线形状基本相似, 其细微差别是由计算误差带来的, 由此可知, 信息融合最优控制的集中算法和序贯算法都与传统最优控制方法都是等效的。



(a) 传统最优控制方法



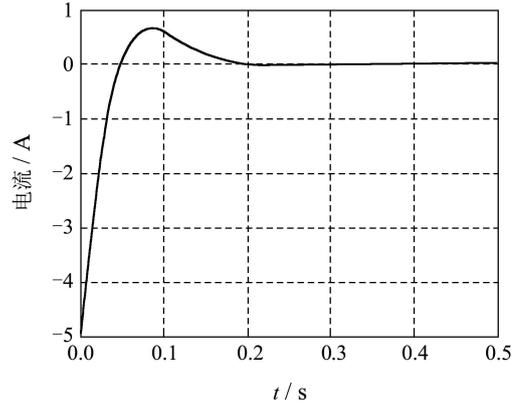
(b) 集中式信息融合控制方法



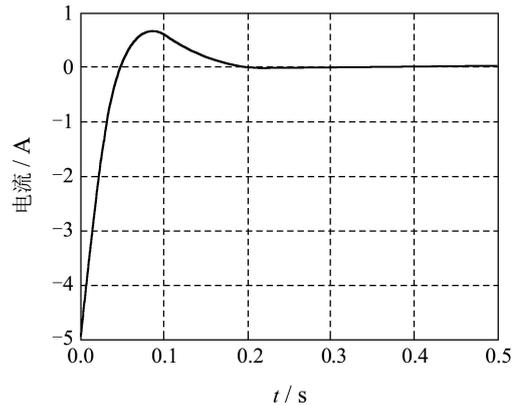
(c) 序贯式信息融合控制方法

图 1 位置状态调节响应曲线

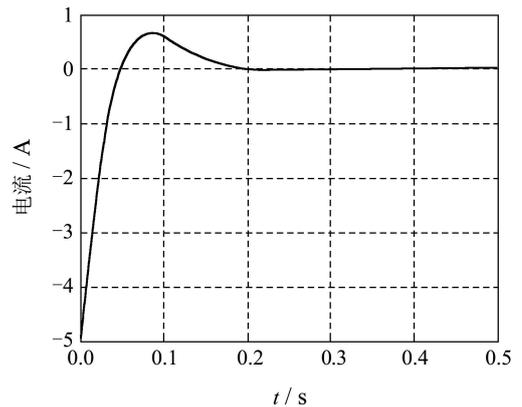
Fig. 1 Position state regulator response curves



(a) 传统最优控制方法



(b) 集中式信息融合控制方法



(c) 序贯式信息融合控制方法

图 2 最优控制信号曲线

Fig. 2 Optimal control signal curves

6 结论(Conclusion)

本文基于信息融合思想, 利用融合估计方法来解决传统有限时间LQ最优控制问题. 针对LQ最优控制中的状态调节器问题, 分别提出了集中式和序贯式信息融合控制算法. 从理论上证明了序贯式最优融合控制律与传统最优控制律是等同的. 通过直流电机系统的数值仿真研究, 得出信息融合控制的集中算法与序贯算法都和传统最优控制方法是等效的. 上述研究结果充分说明了融合控制方法是一种新的

最优控制方法, 它把控制系统的性能指标以及各种约束条件均以信息的形式体现, 适应面广, 有利于实现更全面意义下的最优。然而, 信息融合控制的研究还处于起步阶段, 有许多问题有待进一步的探索研究, 诸如如何将融合控制方法推广应用于不确定系统中。

参考文献(References):

- [1] 龚德恩. 离散控制系统理论引论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2004: 299 – 326.
(GONG Deen. *Discrete Control System Theory*[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2004: 299 – 326.)
- [2] 胡寿松, 王志胜, 胡维礼. 最优控制理论与系统[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2005: 162 – 207.
(HU Shousong, WANG Zhisheng, HU Weili. *Optimal Control Theory and Systems*[M]. 2nd Edition. Beijing: Science Press, 2005: 162 – 207.)
- [3] NIKOLAOS K, COSTAS K, COSTAS T, et al. Optimal controller tuning for nonlinear process[J]. *Automatica*, 2005: 41(1), 79 – 86.
- [4] KO S, BITMEAD R R. Optimal control for linear systems with state equality constraints[J]. *Automatica*, 2007, 43(9): 1573 – 1582.
- [5] LI X R, ZHU Y M, WANG J, et al. Optimal linear estimation fusion, Part I: unified fusion rules[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*. New York: IEEE, 2003, 49(9): 2192 – 2208.
- [6] 周军, 王志胜, 周凤岐. 基于线性均方估计的数据融合理论[J]. 宇航学报, 2003, 24(4): 364 – 367.
(ZHOU Jun, WANG Zhisheng, ZHOU Fengqi. The theory of multi-sensor system data fusion based on linear least estimation[J]. *Journal of Astronautics*, 2003, 24(4): 364 – 367.)
- [7] WANG Z S, WANG D B, ZHEN Z Y. Primary exploration of nonlinear information fusion control theory[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2007, 50(5): 686 – 696.
- [8] 王志胜. 时滞非线性离散动态系统最优控制的信息融合估计方法[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 538 – 542.
(WANG Zhisheng. Optimal control for time-delayed nonlinear discrete system based on information fusion estimation method[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 538 – 542.)
- [9] 甄子洋, 王志胜, 王道波. 基于信息融合最优估计的非线性系统预测控制[J]. 自动化学报, 2008, 34(3): 331 – 336.
(ZHEN Ziyang, WANG Zhisheng, WANG Daobo. Predictive control based on information fusion optimal estimation for nonlinear discrete system[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(3): 331 – 336.)
- [10] 甄子洋, 王志胜, 王道波. 基于信息融合估计的离散系统最优跟踪控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 81 – 85.
(ZHEN Ziyang, WANG Zhisheng, WANG Daobo. Discrete system optimal tracking control based on information fusion estimation[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(1): 81 – 85.)
- [11] 甄子洋, 王志胜, 王道波. 基于误差系统的信息融合最优预见跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(4): 425 – 428.
(ZHEN Ziyang, WANG Zhisheng, WANG Daobo. Optimal preview tracking control based on information fusion in error system[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(4): 425 – 428.)
- [12] 甄子洋, 王志胜, 王道波. 基于信息融合估计的离散线性系统预见跟踪控制[J]. 自动化学报, 2010, 36(2): 347 – 352.
(ZHEN Ziyang, WANG Zhisheng, WANG Daobo. Optimal preview tracking control based on information fusion in error system[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(2): 347 – 352.)

作者简介:

甄子洋 (1981—), 男, 博士, 讲师, 从事飞行控制、融合控制、计算智能等研究, E-mail: zhenziyang@nuaa.edu.cn;

江 驹 (1963—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 从事飞行控制、智能控制等研究, E-mail: jiangju@nuaa.edu.cn;

王志胜 (1970—), 男, 博士, 副教授, 从事融合估计与控制、机电模拟等研究, E-mail: wangzhisheng@nuaa.edu.cn;

王新华 (1977—), 男, 讲师, 从事先进飞行控制等研究, E-mail: xhwang@nuaa.edu.cn.